Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre [illegible].

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
[illegible]

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1913.

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1913.

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1913.

Der Diatomaceen-Bestand in Südhannover mit Einschluss des Harzes und seine Verteilung auf die Gewässer des Gebietes.

Von

A. Peter.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Januar 1913.

Seit langer Zeit bin ich bemüht, durch eigene und von mir veranlaßte Untersuchungen die Kenntnis des Kryptogamenbestandes in den niedersächsischen Landesteilen zu fördern, weil hier in dieser Beziehung noch wenig bekannt ist. Insbesondere waren diese Bestrebungen den Algen zugewendet, daneben den Pilzen aller Art, den Lichenen und Bryophyten.

Nachdem zunächst Max Schmidt[1]) in seiner Göttinger Dissertation die Algen der Lüneburger Heide — mit Ausschluß der Diatomaceen — behandelt hatte, geschah das gleiche durch Johannes Suhr[2]) für das östliche Weserbergland (Hils, Ith, Solling und benachbarte Gebiete). Schon lange vorher hatte ich selbst eine Reihe von Gewässern in der näheren Umgebung von Göttingen auf ihre Algenflora angesehen und derartige Untersuchungen je nach Tunlichkeit jahrelang fortgesetzt. Um endlich rascher damit voranzukommen, ließ ich auch durch meine Assistenten planmäßig Material sammeln und Bestimmungen ausführen, so daß allmählich der größte Teil Südhannovers mit Einschluß des Westharzes in den Bereich der Untersuchung gezogen werden konnte.

---

1) Dr. Max Schmidt, Grundlagen einer Algenflora der Lüneburger Heide. Göttinger Dissertation 1903.

2) Dr. Johannes Suhr, Die Algen des östlichen Weserberglandes. Göttinger Dissertation 1905.

Auch Hermann v. Alten[1]) hat sich mit den Algen unseres Gebietes insofern beschäftigt, als er im Anschluß an meine Bestrebungen im Auftrage des Niedersächsischen Botanischen Vereins einen Teil der westlichen großen Moore (Bourtanger Moor etc.) untersuchte.

Ferdinand Quelle hat als Assistent am hiesigen Botanischen Institut vor mehreren Jahren viel Zeit auf die Algen der näheren Umgebung von Göttingen verwendet, auch namentlich die Gegend von Nordhausen am Harz untersucht. Dadurch sind die bis dahin gewonnenen Feststellungen erheblich vervollständigt, und es ist ihnen manches neue hinzugefügt worden. Ich erachte es für angemessen, die z. T. mit Aufwand der Ferienzeit erarbeiteten Einzelheiten in besonderer Weise zu kennzeichnen.

Zuletzt hat Albert Zenker[2]) die Algenflora des ostfälischen Berg- und Hügellandes und der Gegend von Clausthal-Zellerfeld im Oberharz zum Gegenstand seiner Dissertation gemacht. Auch dessen Fundstellen sind im nebenstehenden Verzeichnis durch ein besonderes Zeichen kenntlich. Herrn Dr. Zenker bin ich ferner für die Bestimmung von mehreren hundert Präparaten mit Diatomaceen-Aufsammlungen zu Dank verpflichtet. Es ist zu hoffen, daß er auch die noch ausstehende Bestimmung der Diatomaceen der Lüneburger Heide demnächst fertig stellen wird.

Mehrere Zwischenfälle verzögerten die Niederschrift der Ergebnisse Jahre hindurch; erst jetzt kann eine Übersicht der festgestellten Algen mitgeteilt werden.

Im folgenden werden zunächst die Diatomaceen Südhannovers und des Westharzes zusammengestellt. Ihnen sollen die anderen Algen, für die das Material bereits vollständig vorliegt, möglichst bald folgen.

Das untersuchte Gebiet umfaßt das gesamte Berg- und Hügelland von der Weser bis nach Hildesheim, zum Brocken, weiterhin bis nach Nordhausen und über das Eichsfeld zum Hessischen Bergland bei Allendorf-Witzenhausen und bis zum Hohen Hagen bei Dransfeld. Orographisch, hydrographisch und geologisch von großer Mannigfaltigkeit, beherbergt es den einzelnen Örtlichkeiten entsprechend da und dort sehr ungleiche Artengemeinschaften. Auch sind die Arten und Varietäten der Diatomaceen von ganz verschiedener Verteilung, wie es als selbstverständlich erscheint.

---

1) Dr. Herm. v. Alten. Beiträge zur Kenntnis der Algenflora der Moore der Provinz Hannover. Jahresb. d. Niedersächs. Botan. Vereins Hannover, 1910; mit Nachtrag.

2) Dr. Albert Zenker, Algenflora des östfälischen Berg- und Hügellandes und der Nordspitze des Harzes. Göttinger Dissertation 1912.

Um in tunlichster Kürze einen Überblick des Formenbestandes zu gewähren, ist der systematischen Liste eine tabellarische Aufstellung beigegeben, in welcher die Fundstellen gruppenweise zusammengefaßt und landschaftlich geordnet sind, so daß die Verteilung jeder Art über das Gebiet mit einem Blick erfaßt, und ein Vergleich mit anderen Arten ohne weiteres gezogen werden kann. Auch auf die Massenverteilung ist Rücksicht genommen insofern, als durch ein besonderes Zeichen die Orte reichster Mengen bezw. dichtesten Auftretens gekennzeichnet werden.

Außerdem sind für die einzelnen Fundstellen oder Gruppen von solchen Listen aufgestellt, die den Artenbestand rasch übersehen lassen. Wo es wünschenswert erschien, wurden diese Verzeichnisse derart angeordnet, daß die Diatomaceen-Flora der einzelnen Kategorien von Gewässern oder der verschiedenen Höhenlagen leicht mit einander vergleichbar sind.

Da das südliche Hannover mit den angrenzenden Gebieten hauptsächlich der Trias und dem Diluvium angehört, so sind die Bäche, Tümpel und Teiche teils stark kalkhaltig, teils kalkarm. Besonders berücksichtigt wurden einige starke Quellen mit hohem Kalkgehalt; ihnen gegenüber die Teiche im südlichen Vorlande des Harzgebirges, die meist weiches Wasser führen. Auch die Rottlöcher für Flachs, die im Wesergebiete noch vielfach vorhanden sind, und die ebendort sehr verbreiteten Fischteiche werden hervorgehoben. Charakteristisch sind im Gebiet die zahlreichen Erdfälle, die durch das Nachsinken der oberflächlichen Gesteinsmassen in tief unter ihnen liegende ausgelaugte Stellen entstanden sind.

Von größeren stehenden Gewässern sind nur der Seeburger See auf dem Obereichsfeld und der Denkershäuser Teich bei Northeim zu nennen, beides größere Erdfälle, der erstere sumpfig, der letztere von mooriger Beschaffenheit. — An Moosmooren herrscht Armut: sie kommen nur im Solling vor, in Erdfällen bei Moringen, am Denkershäuser Teich, in einem der Ketterlöcher bei Tettenborn am Südharzrande, und auf den höchsten Erhebungen des Harzgebirges um den Brocken herum. Einige kleinere Grünlandmoore finden sich im Solling, der übrigens ein ausgedehntes Buntsandsteingebiet ist, bei Landolfshausen im Obereichsfeld, am Priorteich im Blumenberg bei Walkenried usw. — Salzstellen gibt es nur sehr wenige im Gebiet; einzelne werden unten hervorgehoben, sie enthalten jedoch nur eine ganz geringe Zahl von Brackwasserformen, da sie höchstens 0,5 % Kochsalz führen. Ihre Flora steht weit hinter derjenigen von der Numburg oder bei Artern zurück.

Die bedeutendsten Erhebungen über dem Meeresspiegel liegen im Harz, wo der Brocken bis zu 1141 m ansteigt. Auf dieses Gebirge ist bei den Untersuchungen besondere Sorgfalt verwendet worden, und zwar auf drei Gebiete desselben vorzugsweise, weil diese charakteristische Artengemeinschaften am ehesten erwarten ließen. So wurde das Bewässerungssystem der Bergwerke von Clausthal-Zellerfeld (Höhenlage 520—600 m), das mit über 60 Stauteichen, deren Zuflüssen und Verbindungsgräben eine Fülle von Diatomaceen beherbergt [1]), mit mehrjähriger Zwischenzeit zweimal untersucht. Eingehend ist ferner das Gebiet der (etwa 30) Teiche am Südfuß des Harzes von Sachsa über Walkenried und bis über Ellrich hinaus berücksichtigt worden. Endlich wurden die höchsten Erhebungen des Gebirges (Brocken 1141 m, Heinrichshöhe 1044 m, Königsberg 1029 m) und deren Umgebung mit ihren Mooren, Tümpeln und Bächen tunlichst genau abgesucht.

Von Interesse ist ein Vergleich des Diatomaceen-Bestandes dieser hochgelegenen Partien des Gebietes mit demjenigen des Riesengebirges. Wegen der viel beträchtlicheren Höhe der Sudeten (Schneekoppe 1604 m, Kammhöhe durchschnittlich 1450 m, Altvater 1490 m) und ihrer größeren Massenentwicklung dem Harzgebirge gegenüber ist in diesem eine geringere Zahl von Gebirgsformen zu erwarten. Das trifft zu, denn von den etwa 43 hierher gehörenden Arten des Sudeten kommen im Harz nur 10 vor, also etwa $^1/_4$. Die Varietäten, deren eine so große Menge in den Hochseen des Riesengebirges unterschieden worden sind, wurden bisher in unserm Gebiet nicht so eingehend studiert, daß ein zutreffender Vergleich möglich wäre.

In einem Moorbach des Oberharzes über St. Andreasberg gegen den Rehberg hin fanden sich mit einander einige bemerkenswerte Diatomaceen, die auch in Nordamerika gesellschaftlich beobachtet worden sind: Surirella anceps und S. delicatissima. Dort wie hier scheinen die Vorkommensbedingungen übereinzustimmen, so daß die in Europa sonst noch nicht gefundene S. delicatissima und die bisher nur im Riesengebirge in leeren Schalen beobachtete S. anceps auch bei uns eine gemeinsame Wohnstätte besitzen. In ihrer Gesellschaft befanden sich Diatoma anomalum *anceps, Eunotia Soleirolii, Navicula cardinalis, N. major, N. vulgaris *saxonica, Nitzschia linearis *tenuis, Surirella biseriata, Stauroneis anceps, Meridion constrictum, Tabellaria flocculosa, also eine Zusammenstellung teils sehr selten vorkommender, teils allgemein verbreiteter Formen.

1) Zencker a. a. O.

Verzeichnis der Arten, die in den höheren Lagen des Riesengebirges und im Harzgebirge zugleich vorkommen:

Melosira distans *nivalis	Navicula producta
Eunotia monodon	— contenta
— diodon	— divergens
— Arcus *bidens	— rhomboides
— gracilis	Surirella anceps.

Im Riesengebirge wurden ferner beobachtet:

Navicula polyonca
— Legumen
Cymbella turgida,

die hier nicht im Harzgebirge, sondern im Weserberglande angetroffen worden sind; außerdem Gomphonema lanceolatum und G. olivaceum, die beide hier nur in der Rasequelle bei Göttingen vorkommen, und G. montanum, das bei Sachsa am Fuß des Harzgebirges und bei Bremke unweit Göttingen gesehen worden ist.

Von anderen sonst als „Gebirgspflanzen“ bezeichneten Diatomaceen finden sich im Gebiet Cymbella gracilis und Epithemia Argus *alpestris, beide jedoch nicht im Harzgebirge, sondern in Gewässern des Hügellandes.

Gomphonema apicatum, das als eine „nordische“ Art bezeichnet wird, ist hier im Tieflande beobachtet worden.

Nur im Harzgebirge wurden gefunden:

Melosira distans *nivalis	Navicula contenta
Cyclotella antiqua	— mesolepta *angusta
Tabellaria fenestrata *asterionelloides	— stomatophora
	— cardinalis
Diatoma anomalum	Surirella elegans
Eunotia Soleirolii	— anceps
Navicula mutica	— delicatissima.

Nur mit dem Weserberglande hat der Oberharz gemeinsam folgende Arten, die außerhalb dieser beiden Gebiete nicht beobachtet wurden:

Navicula Pupula
— interrupta *bicapitata
— stauroptera
— rhomboides.

Nach den Beobachtungen im südhannoverschen Gebiet sind folgende Diatomaceen in den höheren Lagen des Harzge-

birges in besonders reicher Entwicklung zu finden, wenn sie im übrigen auch im Tieflande verbreitet sind:

Tabellaria flocculosa
Fragilaria virescens
Eunotia Arcus
— pectinalis
Cocconeis exilis
Surirella biseriata
Navicula vulpina
— interrupta
— Brebissonii
— lata
— viridis
— vulgaris

Die höheren Lagen des Harzgebirges erreichen nicht (davon die mit w bezeichneten nur im Weserberglande beobachtet):

Melosira arenaria
Cyclotella operculata
Cylindrotheca gracilis
Denticula tenuis *frigida
w — — inflata
— crassula
— elegans
— sinuata
w — Denticula
Diatoma vulgare
Fragilaria Harrisonii
w Synedra Vaucheriae
— capitata [1]
Ceratoneis Arcus
w Eunotia triodon
w — nodosa
Gyrosigma Kützingii
w Navicula silicula
— — *inflata
— affinis
— — *undulata
— Iridis
w — cuspidata *ambigua
w — minima
w — Rotaeana
— binodis
— bacilliformis
— Bacillum
Navicula Semen
— Atomus
— minuscula
w — cryptocephala *exilis
— rhynchocephala *amphiceros
w — radiosa *acuta
— gracilis
— peregrina
— Placentula [2]
w — — *anglica
w — appendiculata
w — subcapitata
w — polyonca
w — Legumen
w — stauroptera *parva
— hemiptera
w — viridis *commutata
— — *fallax
w — inaequalis
Stauroneis anceps *dilatata
w — platystoma
w — microstauron
Gomphonema parvulum
— angustatum
— gracile
w — — *dichotomum
— lanceolatum
— montanum

1) Auch Synedra Ulna geht nur bis Clausthal-Zellerfeld.
2) Nur im Habichtswald bei Cassel.

w Gomphonema geminatum
— apicatum
— olivaceum
w Cymbella pusilla
— parva
— cymbiformis
— Cistula *maculata
w — tumida
w — turgida
— prostrata
w — gracilis
Epithemia turgida
— Sorex
— Argus
— — *alpestris
— ocellata
— Zebra
w — — *proboscidea
w — rupestis
Rhopalodia gibba *ventricosa
— gibberula

Amphora ovalis *gracilis
— — *Pediculus
w Tryblionella angustata
Nitzschia dubia
— Palea
— Kützingiana *exilis
— communis
— amphibia
— acicularis
Cymatopleura Solea
— elliptica
Surirella linearis *tenella
— robusta
— striatula
w — ovalis *minuta
w — — *pinnata
— calcarata
— spiralis
Campylodiscus hibernicus *noricus
— — *costatus.

Von den häufiger vorkommenden sind ausgesprochene Tieflandarten:

Melosira arenaria
Cyclotella operculata
Fragilaria Harrisonii
Diatoma vulgare
Synedra capitata
Gomphonema angustatum
Cymbella prostrata
Epithemia turgida
— Sorex

Epithemia Argus
Tryblionella Hantzschiana
Nitzschia dubia
— communis
— acicularis
Cymatopleura Solea
— elliptica
Campylodiscus hibernicus *noricus

Die seltensten Arten und Varietäten sind bei uns:
Melosira distans *nivalis (nur im Oberharz)
Cyclotella antiqua (desgl.)
Coscinodiscus minor (nur im Weserberglande)
Cylindrotheca gracilis (Denkershäuser Teich, Botan. Garten, Nordhausen)
Tabellaria fenestrata *asterionelloides (nur im Oberharz)
Denticula tenuis *frigida (Weserbergland u. Rasequelle b. Göttingen)
— — *inflata (nur im Weserberglande)

Denticula crassula (nur bei Winzenburg)
— elegans (nur am südl. Harzrande)
— sinuata (Weserbergland u. Altenstein im Hess. Hügellande)
— Denticula (nur im Weserberglande)
Diatoma vulgare *grande (Weserbergland u. Rhumegebiet)
— anomalum (nur im Oberharz)
Synedra Vaucheriae (nur im Weserberglande)
Ceratoneis Arcus (Rhumegebiet u. Nordhausen)
Eunotia monodon (Weserbergland, Rhumegebiet, Oberharz)
— diodon (ebenda u. bei Walkenried)
— triodon (nur im Weserberglande)
— nodosa (desgl.)
— tetraodon (Kauffungerwald, Weserbergland, Walkenried, Clausthal)
— pectinalis *undulata (Weserbergland, Göttinger Hügelland, Oberharz)
— Soleirolii (nur im Oberharz)
— lunaris (Kauffungerwald; Kl. Hagen bei Göttingen, hier reichlich; Walkenried; Oberharz)
Gyrosigna Kützingiana (nur in den Kalkquellen bei Göttingen)
Navicula elliptica *minima (nur im Weserberglande)
— ovalis (nur um den Harz herum an wenigen Orten)
— silicula (nur im Weserberglande)
— — *inflata (Winzenburg, Weserbergland, Göttingerwald)
— affinis (nur Weserbergland)
— — *undulata (nur in der Rasequelle b. Göttingen, hier reichlich)
— producta (nur bei Winzenburg u. Clausthal)
— Iridis (Weserbergland, Rasequelle, Walkenried)
— cuspidata *ambigua (nur im Weserberglande)
— minima (desgl.)
— Rotaeana (desgl.)
— binodis (Hohe Hagen, Denkershäuser Teich, Winzenburg)
— mutica (nur bei Clausthal)
— bacilliformis (nur bei Walkenried)
— Pupula (Weserbergland, Clausthal)
— contenta (nur Oberharz)
— Bacillum (nur Winzenburg)
— Atomus (nur Hainberg bei Göttingen, hier in Menge)
— minuscula (nur ebenda)
— cryptocephala *exilis (nur im Weserberglande)
— rhynchocephala *amphiceros (Weserbergland, Nordhausen)
— vulpina (im Oberharz verbreitet, sonst nur noch bei Walkenried)
— radiosa *acuta (nur im Weserberglande)

Navicula gracilis (Weserbergland, Botan. Garten, Seeburgersee)
— peregrina (nur in den Brackwassern b. Göttingen u. im Rhumegebiete)
— oblonga *subparallela (nur im Weserberglande)
— Placentula *anglica (ebenso)
— appendiculata (desgl.)
— subcapitata (desgl.)
— interrupta *bicapitata (Weserbergland, Clausthal)
— mesolepta *angusta (nur bei Nordhausen)
— polyonca (nur im Weserberglande)
— Legumen (ebenda)
— borealis (nur im Weserberglande u. um den Oberharz herum zerstreut)
— stauroptera (Weserbergland, Clausthal)
— — *parva (nur in der Weser)
— stomatophora (nur bei Clausthal)
— hemiptera (nur am Hainberg bei Göttingen)
— parva (nur bei Winzenburg u. Clausthal)
— viridis *commutata (nur im Weserberglande)
— cardinalis (nur bei Walkenried u. Andreasberg)
— inaequalis (nur im Weserberglande)
— rhomboides (im Weserberglande verbreitet, sonst nur am Rehberg bei Andreasberg)
— — *viridula (nur Andreasberg u. Hainberg bei Göttingen)
Amphipleura pellucida (nur in den Kalkquellen bei Göttingen)
Stauroneis platystoma (nur im Weserberglande)
— microstauron (desgl.)
Gomphonema parvulum (nur bei Walkenried)
— gracile (nur im Victoriahause des Botan. Gartens)
— — *dichotomon (nur im Weserberglande)
— lanceolatum (nur in der Rasequelle)
— montanum (nur Göttingerwald u. Sachsa)
— geminatum (nur im Weserberglande)
— apicatum (nur im Rhumegebiet)
— olivaceum (nur in der Rasequelle)
Cymbella pusilla (nur im Weserberglande)
— parva (Weserbergland, Südharzrand)
— cymbiformis (Weserbergland u. Leinegebiet bei Göttingen)
— Cistula *maculata (Weserbergland, Walkenried)
— tumida (nur Weserbergland)
— turgida (desgl.)
— gracilis (desgl.)

Epithemia Argus *alpestris (nur Weserbergland u. bei Altenstein)
— ocellata (nur im Victoriahause des Botan. Gartens)
— Zebra (Weserbergland, Denkershäuser Teich)
— — *proboscidea (nur Weserbergland)
— rupestris (desgl.)
Rhopalodia gibba *ventricosa (Weserbergland, Harste, Denkershäuser Teich)
— gibberula (Hohe Hagen, Teiche des südl. Vorharzes)
Amphora ovalis *gracilis (Nordhausen, Unterharz)
Tryblionella angustata (Hohe Hagen, Weserbergland)
Nitzschia subtilis (Ümmelbergwiesen bei Nörten, Weendespring bei Göttingen, Clausthal)
— Palea (nur bei Winzenburg)
— Kützingiana *exilis (nur bei Nordhausen)
— amphibia (nur auf dem Hainberg bei Göttingen)
— linearis *tenella (nur bei Nordhausen)
— elegans (nur bei Clausthal)
Surirella robusta (nur im Kauffunger Wald)
— striatula (Weserbergland, Ümmelbergwiesen b. Nörten, Nordhausen)
— ovalis *minuta (nur im Weserberglande)
— — *pinnata (desgl.)
— calcarata (nur im Seeburger See)
— spiralis (nur im Weserberglande u. bei Harste)
— anceps (nur bei Walkenried u. Andreasberg)
— delicatissima (nur bei Andreasberg)
Campylodiscus hibernicus *costatus (nur im Weendespring)

Die im Gebiet häufigsten Diatomaceen sind:

Melosira varians
Tabellaria flocculosa
— fenestrata
Meridion circulare
— constrictum
Fragilaria virescens
— capucina
Synedra Ulna
— radians
Eunotia gracilis
— pectinalis
Cocconeis Pediculus
— exilis
Navicula cryptocephala
Navicula radiosa
— dicephala
— mesolepta
— Brebissonii
— major
— viridis
Stauroneis anceps
— Phoenicenteron
Gomphonema intricatum
— acuminatum
— constrictum
Cymbella Cistula
— ventricosa
Epithemia turgida

Amphora ovalis
Nitzschia amphioxys
— sigmoidea
Nitzschia linearis
Cymatopleura Solea
Surirella ovalis *ovata

Zusammenstellungen der an den einzelnen Fundstellen oder Fundstellengruppen beobachteten Diatomaceen.

Habichtswald bei Cassel, Wilhelmshöhe.

Melosira varians
Denticula tenuis
Diatoma vulgare
Fragilaria construens
Synedra radians
Cocconeis Placentula (nur hier beobachtet)
Gyrosigma attenuatum
Navicula elliptica
— cryptocephala
— radiosa
— dicephala
— interrupta
Stauroneis anceps *linearis
Cymbella naviculiformis
— cuspidata
Gomphonema constrictum
Amphora ovalis
Nitzschia sigmoidea
Cymatopleura Solea
Surirella linearis
— robusta *splendida
— ovalis
Campylodiscus hibernicus *noricus

Meissner, Bächlein im Moor auf der Höhe.

Tabellaria flocculosa
Navicula pusilla
— major
Navicula rhomboides
Surirella biseriata

Kauffungerwald, Moor auf dem Hühnerfeld.

Cyclotella Kützingiana
Tabellaria flocculosa
Fragilaria virescens
Eunotia tetraodon
— Arcus
— major
— gracilis
— pectinalis
— lunaris
Navicula cuspidata
Navicula cryptocephala
— radiosa
— Brebissonii
— Tabellaria
— major
— viridis
— rhomboides
Nitzschia amphioxys
Surirella biseriata
— robusta (nur hier gefunden).

Dransfeld, Wiesenbach am Wege zum **Hohen Hagen.**

Meridion circulare
Synedra Ulna
Cocconeis exilis
Gyrosigma attenuatum
Navicula silicula *gibberula
— cuspidata *obtusa

Navicula binodis
— sphaerophora
— viridula
— dicephala
— pusilla
— viridis
Stauroneis anceps *linearis
Gomphonema intricatum
Rhoicosphenia curvata
Rhopalodia gibberula
Amphora ovalis
Tryblionella angustata (nur hier und im Weserberglande)
Nitzschia parvula
— linearis
Cymatopleura Solea
— elliptica
Surirella linearis
— ovalis

Östliches **Weserbergland** (Hils, Ith, Solling etc.), in **Tümpeln, Teichen, Gräben.**

(Vergl. J. Suhr, Die Algen des östl. Weserberglandes 1905.)

Melosira varians
— arenaria
Cyclotella Kützingiana
Coscinodiscus minor (nur hier!)
Tabellaria flocculosa
— fenestrata
Denticula tenuis *frigida
— Denticula (nur hier beobachtet)
Meridion circulare
— constrictum
Diatoma vulgare
— — *grande
— elongatum
— hiemale
— — *mesodon
Fragilaria virescens
— capucina
— construens
— mutabilis
Synedra Vaucheriae (nur hier gefunden)
— Ulna
— capitata
— radians
Eunotia triodon (nur hier!)
— tetraodon
— Arcus
— — *bidens
— gracilis
Eunotia pectinalis
— — *undulata
Cocconeis Pediculus
— Placentula
— exilis
Gyrosigma attenuatum
Navicula elliptica
— —*minima (nur hier gefunden)
— silicula (desgl.)
— — *gibberula
— — *inflata
— amphisbaena
— affinis (nur hier beobachtet)
— — *amphirhyncha
— firma
— cuspidata
— — *ambigua (nur hier; auch in Moosmooren)
— — *obtusa
— minima (nur hier; auch in Moosmooren)
— Pupula
— sphaerophora
— cryptocephala
— — *exilis (nur hier!)
— rhynchocephala
— — *amphiceros (nur hier und bei Nordhausen beoachtet)
— viridula
— radiosa

Navicula ovalis *acuta (nur hier
— oblonga [und in der Weser)
— — *subparallela (nur hier!)
— dicephala
— Placentula *anglica (nur hier!)
— appendiculata (nur hier gef.)
— subcapitata (nur hier, auch [in Moosmooren)
— interrupta *bicapitata (nur [hier und bei Clausthal)
— mesolepta
— Brebissonii
— Legumen (nur hier gefunden)
— lata
— gibba
— Tabellaria
— major
— viridis
— — *commutata (nur hier)
— nobilis
— rhomboides
Stauroneis anceps
— — *linearis
— Phoenicenteron
Gomphonema intricatum
— — *Vibrio
— gracile *dichotomum (nur hier)
— geminatum (nur hier und in [der Weser)
— acuminatum
— constrictum
— — *capitatum
Rhoicosphenia curvata
Cymbella Ehrenbergii
Cymbella cuspidata
— affinis
— parva
— cymbiformis
— Cistula
— — *maculata
— lanceolata
— helvetica
— prostrata
— ventricosa
— gracilis (nur hier, auch in Fisch- [teichen und in Moosmooren)
Epithemia turgida
— Sorex
— Argus
— Zebra
Amphora ovalis
Tryblionella Hantzschiana
Nitzschia amphioxys
— parvula
— dissipata
— sigmoidea
— linearis
— — *tenuis
Cymatopleura Solea
Surirella biseriata
— linearis
— robusta *splendida
— ovalis *minuta (nur hier)
— — *ovata
— — *pinnata (nur hier)
— spiralis
Campylodiscus hibernicus *noricus

Östliches **Weserbergland, Fischteiche.**

Melosira varians
Cyclotella Kützingiana
Tabellaria flocculosa
— fenestrata
Denticula Denticula
Meridion circulare
— constrictum
Diatoma vulgare
— elongatum
— hiemale
— — *mesodon
Fragilaria virescens
— capucina
— construens

Fragilaria Harrisonii
— mutabilis
Synedra capitata
— radians
Eunotia tetraodon
— Arcus
— — *bidens
— gracilis
— pectinalis
Cocconeis Pediculus
— Placentula
— exilis
Gyrosigma attenuatum
Navicula elliptica
— silicula
— — *gibberula
— — *inflata
— amphisbaena
— affinis *amphirhyncha
— cuspidata
— — *ambigua
— — *obtusa
— minima
— sphaerophora
— cryptocephala
— rhynchocephala
— radiosa
— — *acuta
— oblonga
— dicephala
— mesolepta
— polyonca (nur hier gefunden)
— Legumen
— borealis
— gibba
— stauroptera
— Tabellaria
— major
— viridis
Navicula nobilis
— neglecta
Stauroneis anceps
— — *linearis
— Phoenicenteron
Gomphonema intricatum
— — *Vibrio
— geminatum (nur hier und in der Weser)
— acuminatum
— constrictum
Rhoicosphenia curvata
Cymbella pusilla (nur hier beobachtet)
— cuspidata
— cymbiformis
— lanceolata
— helvetica
— turgida (nur hier gefunden)
— ventricosa
— gracilis
Epithemia turgida
— Argus
— Zebra *proboscidea (nur hier und bei Stadtoldendorf)
Tryblionella Hantzschiana
Nitzschia amphioxys
— parvula
— dissipata
— sigmoidea
— linearis
— — *tenuis
Cymatopleura Solea
— elliptica
Surirella biseriata
— linearis
— robusta *splendida
— ovalis *ovata
— — *pinnata (nur hier)

Östliches **Weserbergland, Flachslöcher.**

Melosira varians
Cyclotella Kützingiana
Tabellaria flocculosa
— fenestrata

Denticula tenuis *inflata
— Denticula
Meridion circulare
Diatoma vulgare
Fragilaria Harrisonii
— mutabilis
Synedra Ulna
— radians
Eunotia Arcus
— gracilis
— pectinalis
Cocconeis Placentula
— exilis
Gyrosigma attenuatum
Navicula elliptica
— amphisbaena
— affinis
— Iridis
— cuspidata
— — *ambigua
— — *obtusa
— cryptocephala
— rhynchocephala
— — *amphiceros
— viridula
— radiosa
— — *acuta
— gracilis
— dicephala
— mesolepta
— Brebissonii
— lata

Navicula gibba
— major
— viridis
— nobilis
— inaequalis (nur hier beobachtet)
— rhomboides
Stauroneis anceps
— Phoenicenteron
Gomphonema intricatum
— — *Vibrio
— geminatum
— acuminatum
— constrictum
Rhoicosphenia curvata
Cymbella cuspidata
— Cistula *maculata
— lanceolata
— prostrata
Epithemia turgida
Rhopalodia gibba *ventricosa
Amphora ovalis
Nitzschia amphioxys
— parvula
— dissipata
— sigmoidea
— linearis *tenuis
Cymatopleura Solea
Surirella linearis
— ovalis *minuta (nur hier)
— — *ovata
— — *pinnata (nur hier)

Östliches **Weserbergland, Bäche.**

Melosira varians
— arenaria
Cyclotella Kützingiana
Tabellaria flocculosa
— fenestrata
Denticula Denticula
Meridion circulare
— constrictum

Diatoma vulgare
— — *grande
— elongatum
— hiemale *mesodon
Fragilaria capucina
— construens
Synedra Ulna
— capitata

Synedra radians
Ceratoneis Arcus
Eunotia Arcus
— — *bidens
— gracilis
— pectinalis
— — *undulata
Cocconeis Pediculus
— Placentula
— exilis
Gyrosigma attenuatum
Navicula elliptica
— silicula
— — *inflata
— amphisbaena
— affinis
— Iridis *firma
— cuspidata
— — *obtusa
— Rotaeana
— sphaerophora
— cryptocephala
— rhynchocephala
— viridula
— radiosa
— dicephala
— pusilla
— Brebissonii
— viridis
— nobilis
— neglecta
Stauroneis anceps
— — *linearis
— — *dilatata
— microstauron (nur hier ge- [funden)
— Phoenicenteron
Gomphonema angustatum
— intricatum
— geminatum
— acuminatum
— constrictum
— — *capitatum
Rhoicosphenia curvata
Cymbella Ehrenbergii
— cuspidata
— parva
— Cistula
— lanceolata
— aspera
— ventricosa
Epithemia turgida
— rupestris (nur hier beobachtet)
Amphora ovalis
Tryblionella angustata (nur hier [und am Hohen Hagen)
Nitzschia amphioxys
— parvula
— dissipata
— sigmoidea
— linearis
— linearis *tenuis
Cymatopleura Solea
— elliptica
Surirella biseriata
— linearis
— robusta *splendida
— striatula
— ovalis *minuta (nur hier)
— — *ovata
— — *pinnata (nur hier)
— — *angustata
Campylodiscus hibernicus *noricus

Sphagneta des **Solling.**

Melosira varians
Tabellaria flocculosa
— fenestrata
Meridion constrictum

Grünmoore des **Solling.**

Tabellaria fenestrata
Diatoma elongatum
Eunotia monodon
— Arcus

Fragilaria virecens
Eunotia Arcus
— gracilis
— diodon
— tetraodon
— pectinalis
Navicula elliptica
— silicula *gibberula
— cuspidata *ambigua
— subcapitata
— mesolepta
— divergens
— stauroptera
— Tabellaria
— viridis
Gomphonema intricatum
Stauroneis anceps
— Phoenicenteron
Cymbella helvetica
Encyonema gracile
Tryblionella Hantzschiana
Surirella biseriata
— linearis
Eunotia gracilis
Cocconeis exilis
Navicula dicephala
— mesolepta
— Brebissonii
— borealis
— major
— viridis
Gomphonema acuminatum
Stauroneis anceps
Cymbella parva
Nitzschia amphioxys
Surirella linearis
— spiralis

Tümpel am **Holzberg** bei Stadtoldendorf.

Tabellaria flocculosa
Denticula tenuis *inflata
— sinuata
Eunotia gracilis
Cocconeis Pediculus
— exilis
Navicula cuspidata *obtusa
— gracilis
— dicephala
— mesolepta
Stauroneis platystoma (nur hier
— Phoenicenteron [gefunden!)
Gomphonema intricatum
— — *Vibrio
— acuminatum
Cymbella lanceolata
Epithemia Argus *alpestris
— Zebra *proboscidea (nur hier u.
— gibba [im Weserberglande)
— — *ventricosa
Nitzschia amphioxys
— dissipata
— sigmoidea
Surirella spiralis
Campylodiscus hibernicus *noricus

Weser, Strom und Altwässer.

Melosira varians
Cyclotella Kützingiana
Tabellaria flocculosa (Strom)
— fenestrata (Strom)

Diatoma vulgare
— hiemale *mesodon
Fragilaria capucina
— construens
— Harrisonii
Synedra Ulna
— capitata
— radians
Eunotia nodosa (nur hier beobachtet)
— gracilis
Cocconeis Placentula
— exilis
Gyrosigma attenuatum
Navicula silicula *gibberula
— amphisbaena
— cuspidata
— — *obtusa
— cryptocephala
— rhynchocephala
— radiosa
— — *acuta
— dicephala
— mesolepta
— Brebissonii
— divergens
— stauroptera *parva
— viridis
— nobilis

Navicula neglecta (Strom)
Stauroneis anceps
— Phoenicenteron
Gomphonema geminatum (nur hier und im Weserbergland)
— acuminatum
— constrictum
— — *capitatum
Rhoicosphenia curvata
Cymbella Cistula
— — *maculata
— lanceolata
— tumida (nur hier beobachtet)
— prostrata (Strom)
— ventricosa
Rhopalodia gibba *ventricosa
Amphora ovalis
Nitzschia amphioxys
— parvula
— dissipata
— sigmoidea
Cymatopleura Solea
— elliptica
Surirella biseriata
— linearis
— ovalis
— — *ovata

Botanischer Garten zu Göttingen:

Teich:

Molosira varians
Cyclotella Kützingiana
Cylindrotheca gracilis
Diatoma vulgare
— elongatum
Synedra Ulna
Fragilaria virescens
Cocconeis Pediculus
— exilis
Gyrosigma acuminatum
— attenuatum

Victoria-Haus:

Cyclotella Kützingiana
Synedra Ulna

Navicula amphisbaena	Navicula gracilis
— silicula *gibberula	— mesolepta
— cryptocephala	
— radiosa	
— Brebissonii	
— major	Gomphonema gracile (nur hier beobachtet)
Cymbella affinis	Cymbella affinis
Epithemia Sorex	Epithemia Argus
Amphora ovalis	— ocellata (nur hier gefunden)
— — *Pediculus	Rhopalodia gibba
Tryblionella Hantzschiana	
Nitzschia dissipata	
— sigmoidea	Nitzschia sigmoidea
— linearis	— linearis
— acicularis	— acicularis
Cymatopleura Solea	

Erdfälle bei **Moringen.**

Tabellaria flocculosa	Navicula viridis
Synedra radians	— nobilis
Eunotia gracilis	Stauroneis anceps
— pectinalis	— Phoenicenteron
Cocconeis Placentula	Gomphonema intricatum
— exilis	— acuminatum
Navicula cuspidata *obtusa	Epithemia turgida
— radiosa	— Argus
— mesolepta	Surirella ovalis *ovata
— Brebissonii	

Gegend von Harste, Hevensen, Gladebeck, Holtensen, Parensen.
(Quellen, Tümpel, Gräben, Flachslöcher.)

Harste, Quelltümpel am Westberg.	**Hevensen, Gladebeck,** Gräben.	**Parensen,** Flachslöcher.	**Holtensen,** Tümpel mit Erlen.
Meridion circulare	Meridion circulare	Meridion circulare	Tabellaria flocculosa
Fragilaria capucina		Fragilaria capucina	— fenestrata
Cocconeis Pediculus			Eunotia gracilis
— exilis	Cocconeis exilis		— pectinalis
Gyrosigma attenuatum			— — *undulata
Navicula cryptocephala	Navicula cuspidata	Navicula elliptica	Navicula cuspidata
— radiosa		— radiosa	— rhynchocephala
		— dicephala	— interrupta

Navicula pusilla		Navicula mesolepta	Navicula mesolepta
			— Placentula *anglica
— Brebissonii	Navicula Brebissonii	— major	— Brebissonii
— vulgaris	— viridis	— viridis	— viridis
	Stauroneis anceps	Stauroneis Phoenicen- [teron	Stauroneis anceps
			— Phoenicenteron
Gomphonema con- [strictum *capitatum	Gomphonema angu- [statum	Gomphonema intrica- [tum	Gomphonema con- [strictum *capitatum
Cymbella naviculiformis		Epithemia turgida	Cymbella Ehrenbergii
Encyonema prostratum		Rhopalodia gibba	— Cistula
— ventricosum		[*ventricosa	Epithemia Argus
Amphora ovalis		Amphora ovalis	
Tryblionella Hantzschiana			
Nitzschia sigmoidea	Nitzschia parvula	Nitzschia sigmoidea	Nitzschia dubia
— linearis		— linearis	— linearis
		— amphioxys	— amphioxys
Cymatopleura Solea			
Surirella linearis			
— ovalis *ovata	Surirella ovalis *ovata	Surirella spiralis (nur [hier und im Weser- [berglande).	Surirella ovalis
— — *angustata.	— — *angustata.		

Salzgräben

Ümmelwiesen bei Nörten.	bei **Sülbeck.**
Tabellaria fenestrata	Diatoma vulgare
Eunotia Arcus	Synedra Ulna
Cocconeis exilis	— radians
Navicula cryptocephala	Cocconeis Pediculus
— peregrina (sonst nur noch im	Navicula rhynchocephala
— dicephala [Rhumegebiet)	— viridula
Stauroneis Phoenicenteron	— peregrina (sonst nur noch im
Gomphonema intricatum	— gibba [Rhumegebiet)
Cymbella cymbiformis	— viridis
Amphora ovalis	Gomphonema intricatum
Nitzschia subtilis	Amphora ovalis
Surirella striatula	Nitzschia parvula
— ovalis *ovata	Surirella ovalis *ovata.

Göttingen, Tümpel auf dem **Kleinen Hagen.**

Tabellaria flocculosa	Eunotia bidens
Eunotia Arcus	— lunaris
— gracilis	Cocconeis exilis

Cocconeis Pediculus
Navicula sphaerophora
— rhynchocéphala
— radiosa
— oblonga
— dicephala
— mesolepta
— gibba
— major
Navicula viridis
— nobilis
Stauroneis anceps
— Phoenicenteron
Cymbella affinis
— aspera
— prostrata
Rhopalodia gibba

Göttingen, Tümpel am **Hainberg.**

Melosira varians
Meridion circulare
Fragilaria capucina
— mutabilis
Synedra Ulna
— radians
Cocconeis exilis
Gyrosigma acuminatum
Navicula affinis *amphirhyncha
— minuscula (nur hier beobachtet)
— cryptocephala
— cuspidata
— Atomus (nur hier beobachtet)
— radiosa
— hemiptera (nur hier gefunden)
— viridis
— rhomboides *viridula (nur hier [und bei Andrasberg i. H.)
Navicula vulgaris
Stauroneis anceps *linearis
Gomphonema intricatum
— — *Vibrio
— constrictum
Cymbella cuspidata
— affinis
— Cistula
— aspera
— prostrata
— helvetica
Epithemia turgida
Nitzschia sigmoidea
— linearis
— amphibia (nur hier beobachtet)
Surirella linearis
Cymatopleura Solea
Campylodiscus hibernicus *noricus

Göttingen, Bereich des **Leinetales.**

Melosira varians
Tabellaria flocculosa
Diatoma vulgare
Meridion circulare
— constrictum
Fragilaria virescens
— capucina
— construens
— mutabilis
Synedra Ulna
— capitata
— radians
Cocconeis Pediculus
— Placentula
— exilis
Gyrosigma acuminatum
— attenuatum
Navicula elliptica
— silicula *gibberula
— cuspidata
— cryptocephala
— rhynchocephala
— radiosa
— oblonga

Navicula dicephala
— pusilla
— Brebissonii
— major
— viridis
Stauroneis anceps
— — *linearis
— Phoenicenteron
Gomphonema intricatum *Vibrio
— acuminatum
— constrictum
Rhoicosphenia curvata
Cymbella Ehrenbergii
— affinis
— cymbiformis
— Cistula
— lanceolata
— prostrata
Epithemia turgida
— Sorex
Rhopalodia gibba
Amphora ovalis
— — *Pediculus
Tryblionella Hantzschiana
Nitzschia amphioxys
— dubia
— sigmoidea
— linearis
— — *tenuis
— communis
Cymatopleura Solea
— elliptica
Surirella robusta *splendida
— ovalis *ovata
— — *angustata
Campylodiscus hibernicus *noricus

Göttinger **Hügelland rechts der Leine.**

(Rodetal, Oberbillingshausen, Reyershausen, Bremke.)

Melosira varians
Meridion circulare
— constrictum
Diatoma hiemale *mesodon
Fragilaria virescens
— construens
— mutabilis
Synedra Ulna
— radians
Eunotia gracilis
Cocconeis exilis
Navicula silicula *inflata
— viridula
— radiosa
— major
Stauroneis anceps *linearis
— Phoenicenteron
Gomphonema intricatum
— — *Vibrio
— montanum (nur hier u. b. Sachsa beobachtet)
— acuminatum
— constrictum
Cymbella naviculiformis
Amphora ovalis
Nitzschia amphioxys
— parvula
— sigmoidea
Surirella ovalis
— — *ovata
— — *angustata
— linearis

Northeim, Tümpel am Bahnhof.

Meridion circulare
— constrictum
Fragilaria capucina
Synedra Ulna
Eunotia Arcus
— gracilis
Cocconeis exilis
Navicula dicephala

Navicula interrupta
— viridis
Stauroneis Phoenicenteron
Gomphonema angustatum
— intricatum *Vibrio
Gomphonema constrictum
Cymbella aspera
Nitzschia amphioxys
Surirella ovalis *ovata

Denkershäuser Teich.

Cylindrotheca gracilis
Tabellaria flocculosa
Cocconeis Pediculus
Gyrosigma attenuatum
Navicula elliptica
— affinis *amphirhyncha
— binodis
— cryptocephala
— radiosa
— Brebissonii
— major
— viridis
Stauroneis anceps
— — *linearis
Gomphonema angustatum
Rhoicosphenia curvata
Cymbella naviculiformis
Epithemia turgida
— Sorex
— Zebra (nur hier u. im Weserbergland)
Rhopalodia gibba
— — *ventricosa
Amphora ovalis
Tryblionella Hantzschiana
Nitzschia parvula
— sigmoidea
— linearis
Cymatopleura Solea
— elliptica
Surirella ovalis
— — *ovata
— — *angustata

Weendespring bei Götingen (und Weendebach).

Melosira varians (Auxosporen)
— arenaria
Meridion circulare
Fragilaria capucina
— construens
— Harrisonii
— mutabile
Synedra Ulna
— capitata
Cocconeis Pediculus
Gyrosigma acuminatum
— Kützingii
Navicula elliptica
— radiosa
— viridis
Amphipleura pellucida (nur hier und in der Rasequelle)
Stauroneis Phoenicenteron
Gomphonema intricatum
— acuminatum
— constrictum
Epithemia turgida
Amphora ovalis
Nitzschia amphioxys
— dissipata
— sigmoidea
— linearis
— subtilis
Cymatopleura Solea
Surirella biseriata
Campylodiscus hibernicus *noricus

Rasequelle und Abfluß bei Rosdorf.

Melosira varians
— arenaria
Cyclotella operculata
Meridion circulare

Diatoma hiemale
Fragilaria capucina
— mutabilis
Synedra Ulna
— capitata
Cocconeis Pediculus
— exilis
Eunotia Arcus
Gyrosigma acuminatum
— Kützingii
— attenuatum
Navicula elliptica
— amphisbaena
— affinis* undulata (nur hier!)
— Iridis
Navicula radiosa
— mesolepta
— major
Amphipleura pellucida (nur hier
[und im Weendespring)
Gomphonema lanceolat. (nur hier!)
— acuminatum
— constrictum *capitatum
— olivaceum (nur hier gefunden)
Amphora ovalis
Nitzschia linearis
— communis
Cymatopleura Solea
— elliptica
Surirella robusta *splendida

Winzenburg: Quellen und Teiche.

Melosira varians
— arenaria
Cyclotella Kützingiana
Denticula tenuis
— — *frigida
— crassula (nur hier beobachtet)
Meridion circulare
Diatoma vulgare
— elongatum
Fragilaria virescens
— Harrisonii
Synedra Ulna
— capitata
— radians
Eunotia Arcus
— pectinalis
Cocconeis Pediculus
— Placentula
— exilis
Gyrosigma attenuatum
Navicula elliptica
— silicula *inflata
— producta (nur hier und bei
— binodis [Clausthal-Zellerfeld)
— Bacillum (nur hier gefunden)
— rhynchocephala
Navicula radiosa
— oblonga
— mesolepta
— Brebissonii
— lata
— Tabellaria
— parva (nur hier und bei Claus-
— major [thal-Zellerfeld)
— viridis
Stauroneis anceps *linearis
— Phoenicenteron
Gomphonema acuminatum
— constrictum
Cymbella affinis
— lancolata
— helvetica
— aspera
Nitzschia dubia
— sigmoidea
— linearis *tenuis
— Palea (nur hier gefunden)
Cymatopleura Solea
— elliptica
Surirella robusta *splendida
Campylodiscus hibernicus *noricus

Hedemünden, Kalkbach.

Meridion circulare
Navicula cuspidata *obtusa
— neglecta
Cymbella Cistula
— lanceolata
Cymatopleura elliptica

Altenstein, Kalkquelle.

Denticula sinuata
Meridion circulare
Diatoma hiemale
Cocconeis Placentula
— exilis
Navicula elliptica
Navicula radiosa
— Brebissonii
Cymbella lanceolata
Epithemia Argus *alpestris (nur hier und im Weserbergland)
Nitzschia amphioxys

Eichsfeld: Tümpel und Gräben.

Melosira varians
Tabellaria flocculosa
Meridion circulare
Diatoma vulgare
Fragilaria virescens
Synedra Ulna
Cocconeis Pediculus
— exilis
Gyrosigma acuminatum
Navicula elliptica
— silicula *gibberula
— affinis *amphirhyncha
— rhynchocephala
— radiosa
— dicephala
— mesolepta
— Brebissonii
— stauroneiformis
— gibba
Navicula major
— viridis
— nobilis
Stauroneis anceps
— — *linearis
— Phoenicenteron
Gomphonema acuminatum
— constrictum
Rhoicosphenia curvata
Cymbella Cistula
— lanceolata
Amphora ovalis
Nitzschia amphioxys
— sigmoidea
— linearis
Cymatopleura Solea
Surirella ovalis
Campylodiscus hibernicus *noricus

Seeburger See.

Cyclotella operculata
Synedra Ulna
Cocconeis Pediculus
Gyrosigma attenuatum
Navicula cryptocephala
— gracilis
Rhoicosphenia curvata
Cymbella lanceolata
Cymbella prostrata
Amphora ovalis
Nitzschia linearis
Cymatopleura Solea
— elliptica
Surirella ovalis *ovata
— calcarata (nur hier gefunden)
Campylodiscus hibernicus *noricus

Rhume—Oder, Altwässer und Tümpel.

Melosira varians
Meridion circulare
Diatoma vulgare
— hiemale
Tabellaria flocculosa
Fragilaria capucina
Synedra Ulna
— radians
Eunotia monodon
— Arcus
Eunotia gracilis
Cocconeis Pediculus
— exilis
Gyrosigma attenuatum
Navicula cryptocephala
— radiosa
— dicephala
— pusilla
Navicula viridis
— neglecta
Gomphonema angustatum
— constrictum
Cymbella Cistula
— prostrata
— ventricosa
Epithemia turgida
— Argus
Amphora ovalis
Nitzschia sigmoidea
— amphioxys
— linearis
— — *tenuis
Cymatopleura Solea
Surirella ovalis *ovata
— — *angustata

Rhume—Oder, in den Flüssen.

†Melosira varians
Tabellaria flocculosa
†Meridion circulare
— constrictum
†Diatoma vulgare
— — *grande
— hiemale *mesodon
†Fragilaria capucina
— mutabilis
Synedra Ulna
— radians
Eunotia Arcus
— gracilis
Cocconeis Pediculus
— exilis
†Gyrosigma acuminatum
†— attenuatum
Navicula silicula *gibberula]
— amphisbaena
— cuspidata *obtusa
— sphaerophora
Navicula cryptocephala
— viridula
— radiosa
— dicephala
— peregrina
— pusilla
— mesolepta
— Tabellaria
— viridis
Stauroneis anceps
— Phoenicenteron
Gomphonema intricatum
— acuminatum
— constrictum
— apicatum (nur hier!)
Rhoicosphenia curvata
Cymbella naviculiformis
— Cistula
— prostrata
— ventricosa
Amphora ovalis

Tryblionella Hantzschiana
Nitzschia parvula
†— sigmoidea
†— linearis
— — *tenuis
†Cymatopleura Solea
Surirella linearis
— ovalis *ovata

Amphora ovalis *angustata

Rhumspringe

die mit † bezeichneten, dazu:
Diatoma hiemale (sehr viel)
Navicula elliptica
— major
Nitzschia amphioxys

Südlicher Vorharz:

Erdfälle bei Pöhlde, Scharzfeld, Herzberg, Tettenborn.	Teiche bei Barbis, Nüxei, Neuhof etc.	Liebenrode: Tümpel, Hundegrube.
Melosira varians	Melosira varians	
Cyclotella Kützingiana	Cyclotella Kützingiana	Cyclotella Kützingiana
Tabellaria flocculosa	Tabellaria flocculosa	Tabellaria flocculosa
— fenestrata	— fenestrata	— fenestrata
	Denticula tenuis	
Meridion circulare		Meridion circulare
— constrictum		— constrictum
Odontidium hiemale *mesodon	Odontidium hiemale	
Fragilaria capucina	Fragilaria capucina	
— construens	— construens	
	— Harrisonii	
— mutabilis		Fragilaria mutabilis
Synedra Ulna	Synedra Ulna	Synedra Ulna
— capitata		
— radians	— radians	
Eunotia diodon		
— Arcus *bidens		
— major		Eunotia major
— gracilis	Eunotia gracilis	
— pectinalis	— pectinalis	— pectinalis
Cocconeis Pediculus		
	Cocconeis Placentula	Cocconeis Placentula
— exilis		
	Navicula ovalis	
Navicula silicula *gibberula	— silicula *gibberula	Navicula silicula *gibberula
— amphisbaena	— amphisbaena	

Navicula affinis *amphirhyncha		Navicula affinis *amphirhyncha
— cryptocephala	Navicula cryptocephala	— cryptocephala
— viridula		
— radiosa	— radiosa	— radiosa
	— oblonga	
— dicephala		
— mesolepta		— mesolepta
— Brebissonii		— Brebissonii
— borealis		
— gibba	— gibba	
— viridis	— viridis	— viridis
— nobilis		— nobilis
	— vulgaris	
— vulgaris *saxonica		
Stauroneis anceps	Stauroneis anceps	Stauroneis anceps* dilatata
— Phoenicenteron		— Phoenicenteron
	Gomphonema intricatum	Gomphonema intricatum *Vibrio
Gomphonema acuminatum	— acuminatum	— acuminatum
— constrictum	— constrictum	— constrictum
— — *capitatum		
Cymbella naviculiformis	Cymbella Cistula	Cymbella Cistula
— helvetica	— helvetica	
	— aspera	— aspera
— ventricosa	— ventricosa	
Epithemia turgida	Epithemia turgida	Epithemia turgida
	— Argus	
	Rhopalodia gibba	
	— gibberula	
	Amphora ovalis	
Nitzschia parvula	Nitzschia parvula	
— sigmoidea	— sigmoidea	
Cymatopleura Solea	Cymatopleura Solea	

Siebertal und Seitentäler, ca. 340 m.

(Melosira arenaria)[1]
Meridion circulare
Fragilaria virescens
Fragilaria construens
Eunotia gracilis
— pectinalis

1) Bei Altenau.

Cocconeis exilis	Cymbella naviculiformis
Navicula silicula *gibberula	Amphora ophalis
— mesolepta	Nitzschia parvula
— Brebissonii	— linearis
— vulgaris	Surirella ovalis *ovata

Südharz.

Herzberg, 240 m.	Sachsa, 324 m.	Walkenried/Ellrich, 240—260 m.	Nordhausen, 183 m.
	Melosira varians	Melosira varians	Melosira varians
			— arenaria
			Cyclotella operculata
		Cyclotella Kützingiana	
			Cylindrotheca gracilis
	Tabellaria flocculosa	Tabellaria flocculosa	
	— fenestrata	— fenestrata	
		Denticula tenuis	
		— elegans (nur hier !)	
	Meridion circulare	Meridion circulare	Meridion circulare
Meridion constrictum	— constrictum	— constrictum	
		Diatoma vulgare	Diatoma vulgare
Diatoma hiemale			— hiemale
— — *mesodon	Diatoma hiemale *mesodon		
	Fragilaria virescens	Fragilaria virescens	
		— capucina	Fragilaria capucina
	— construens	— construens	
		— Harrisonii	
	— mutabilis	— mutabilis	
Synedra Ulna	Synedra Ulna	Synedra Ulna	Synedra Ulna
		— capitata	
	— radians	— radians	
			Ceratoneis Arcus
Eunotia Arcus		Eunotia Arcus	
		— major	
	Eunotia gracilis	— gracilis	
		— pectinalis	
		— — *undulata	
		— lunaris	
	Cocconeis Pediculus	Cocconeis Pediculus	Cocconeis Pediculus
	— Placentula	— Placentula	
	— exilis	— exilis	— exilis

Herzberg, 240 m.	Sachsa, 324 m.	Walkenried/Ellrich, 240—260 m.	Nordhausen, 183 m.
			Gyrosigma acuminatum
		Gyrosigma attenuatum	— attenuatum
		Navicula elliptica	Navicula elliptica
		— ovalis	
	Navicula silicula *gibberula	— silicula *gibberula	— silicula *gibberula
		— amphisbaena	— amphisbaena
		— affinis *amphirhyncha	
		— Iridis	
	— cuspidata *obtusa	— cuspidata	— cuspidata
		— bacilliformis (nur hier!)	
		— cryptocephala	— cryptocephala
	— rhynchocephala	— rhynchocephala	
			— rhynchoceph. *amphiceros
		— viridula	
			— vulpina
	— radiosa	— radiosa	
	— oblonga	— oblonga	— oblonga
Navicula dicephala	— dicephala	— dicephala	
		— pusilla	
	— interrupta	— interrupta	
— mesolepta	— mesolepta	— mesolepta	
— Brebissonii	— Brebissonii	— Brebissonii	— Brebissonii
		— divergens	
	— borealis		
		— gibba	
		— major	
	— viridis	— viridis	
	— nobilis	— nobilis	
		— cardinalis (nur hier u. bei Andreasberg)	
Stauroneis anceps		Stauroneis anceps	Stauroneis anceps
		— — *linearis	— — *linearis
	Stauroneis anceps *dilatata	— — *dilatata	
— Phoenicenteron	— Phoenicenteron	— Phoenicenteron	— Phoenicenteron
		Gomphonema parvulum (nur hier)	
	Gomphonema angustatum		
	— intricatum	— intricatum	

Herzberg, 240 m.	Sachsa, 324 m.	Walkenried/Ellrich, 240—260 m.	Nordhausen, 183 m.
	Gomphonema montanum (nur hier u. bei Bremke)	Gomphonema parvulum *Vibrio	
	— acuminatum	— acuminatum	Gomphonema acuminatum
	— constrictum	— constrictum	— constrictum
	— — *capitatum		
		Rhoicosphenia curvata	Rhoicosphenia curvata
		Cymbella Ehrenbergii	
Cymbella naviculiformis	Cymbella naviculiformis	— naviculiformis	
		— cuspidata	Cymbella cuspidata
	— parva (nur hier u. im Weserberglande)	— parva	
	— Cistula	— Cistula	
		— — *maculata (nur hier u. i. Weserbergl.)	
	— lanceolata	— lanceolata	
— helvetica	— helvetica	— helvetica	
	— aspera	— aspera	
— ventricosa	— ventricosa	— ventricosa	
	Epithemia turgida	Epithemia turgida	
		— Sorex	
		— Argus	
	Rhopalodia gibba	Rhopalodia gibba	Rhopalodia gibba
	Amphora ovalis	Amphora ovalis	Amphora ovalis
			— — *Pediculus
	Nitzschia amphioxys	Nitzschia amphioxys	Nitzschia amphioxys
		— parvula	
			— dubia
		— dissipata	
		— sigmoidea	— sigmoidea
		— linearis	— linearis
			— Kützingiana *exilis (n. hier)
			— communis
			— acicularis
		Cymatopleura Solea	Cymatopleura Solea
		Surirella biseriata	
Surirella linearis		— linearis	Surirella linearis *tenella (nur hier)

Herzberg, 240 m.	Sachsa, 324 m.	Walkenried/Ellrich, 240—260 m.	Nordhausen, 183 m.
		Surirella robusta	Surirella robusta
		*splendida	— striatula [*splendida
Surirella ovalis *ovata	Surirella ovalis *ovata	— ovalis *ovata	— ovalis *ovata
	— — *angustata		
		— anceps (nur hier u. bei Andreasberg)	
		Campylodiscus hibernicus *noricus	

Oberharz.

Clausthal-Zellerfeld, 550—600 m.	Andreasberg-Sonnenberg-Rehberg-Oderbrück, 625—790 m	Schierke-Schluft-Eckerloch, 600—900 m.	Brocken-Königsberg-Heinrichshöhe, 1030—1142 m.
Melosira varians			
— distans *nivalis (nicht in tieferen Lagen)			Melosira distans *nivalis
Cyclotella Kützingiana			
— antiqua (nur hier)			
Tabellaria flocculosa	Tabellaria flocculosa	Tabellaria flocculosa	Tabellaria flocculosa
— fenestrata	— fenestrata		
— — *asterionelloides (nur hier)		Denticula tenuis (die einzige Dentic., die ins Gebirge geht)	
Meridion circulare			
— constrictum	Meridion constrictum	Meridion constrictum	
Diatoma vulgare			
— — *grande			
— elongatum			
— hiemale			
— — *mesodon	Diatoma hiemale *mesodon	Diatoma hiemale *mesodon	
— anomalum (nur im Oberharz!)	— anomalum *anceps	— anomalum	
Fragilaria virescens	Fragilaria virescens	Fragilaria virescens	Fragilaria virescens
— capucina		— capucina	
— construens	— construens	— construens	— construens
— mutabilis			
Synedra Ulna			

Clausthal-Zellerfeld, 550—600 m.	Andreasberg-Sonnenberg-Rehberg-Oderbrück, 625—790 m.	Schierke-Schluft-Eckerloch, 600—900 m.	Brocken-Königsberg-Heinrichshöhe, 1030—1142 m.
Synedra radians			
Eunotia diodon			
— tetraodon	Eunotia tetraodon		
— Arcus	— Arcus	Eunotia Arcus	Eunotia Arcus
— — *bidens	— — *bidens	— — *bidens	
— major	— major		— major
— gracilis	— gracilis	— gracilis	— gracilis
— pectinalis	— pectinalis	— pectinalis	— pectinalis
— — *undulata			
— Soleirolii (nur im Oberh.)	— Soleirolii		
— lunaris	— lunaris		
		Cocconeis Pediculus	Cocconeis Pediculus
Cocconeis Placentula			
— exilis	Cocconeis exilis	— exilis	— exilis
Gyrosigma acuminatum			
— attenuatum			
Navicula elliptica			
— ovalis (nur in Harzwässern)			
— silicula *gibberula			
— amphisbaena			
— affinis *amphirhyncha	Navicula affinis *amphirhyncha		
— producta (nur hier u. b. Winzenburg)			
— cuspidata	— cuspidata		
— — *obtusa			Navicula cuspidata *obtusa
— mutica (nur hier)			
— Pupula (nur hier u. i. Weserbergl.)			
— sphaerophora			
— cryptocephala	— cryptocephala		
— rhynchocephala	— rhynchocephala		— rhynchocephala
— viridula			
— vulpina	— vulpina		— vulpina
— radiosa	— radiosa	Navicula radiosa	
		— oblonga	
— dicephala	— dicephala		— dicephala

Clausthal-Zellerfeld, 550—600 m.	Andreasberg-Sonnenberg-Rehberg-Oderbrück, 625—790 m.	Schierke-Schluft-Eckerloch, 600—900 m.	Brocken-Königsberg-Heinrichshöhe, 1030—1142 m.
Navicula pusilla			
— interrupta	Navicula interrupta	Navicula interrupta	Navicula interrupta
— — *bicapitata (nur hier u. i. Weserbergl)			
— mesolepta			— mesolepta
			— — *angusta (nur hier)
— Brebissonii	— Brebissonii	— Brebissonii	— Brebissonii
— divergens	— divergens		— divergens
— borealis			
— lata	— lata	— lata	— lata
— gibba			
— stauroptera (nur hier u. i. Weserbergl.)			
— Tabellaria			
— major	— major		
— viridis	— viridis	— viridis	— viridis
— nobilis			
	— cardinalis (nur hier u. bei Sachsa)		
— vulgaris	— vulgaris	— vulgaris	— vulgaris
	— — *saxonica		
	— rhomboides (auch im Weserbergland)		
	— — *viridula (sonst nur noch am Hainberg bei Göttingen)		
— neglecta			— neglecta
Stauroneis anceps	Stauroneis anceps	Stauroneis anceps	Stauroneis anceps
— — *linearis			
— Phoenicenteron	— Phoenicenteron	— Phoenicenteron	— Phoenicenteron
Gomphonema intricatum		Gomphonema intricatum	Gomphonema intricatum
— — *Vibrio			
— acuminatum			
— — *coronatum			
— constrictum			
— — *capitatum			
Rhoicosphenia curvata			

Clausthal-Zellerfeld, 550—600 m.	Andreasberg-Sonnenberg-Rehberg-Oderbrück, 625—790 m.	Schierke-Schluft-Eckerloch, 600—900 m.	Brocken-Königsberg-Heinrichshöhe, 1030—1142 m.
Cymbella naviculiformis		Cymbella naviculiformis	
— cuspidata			
— affinis	Cymbella affinis		
— parva			
— Cistula			
— lanceolata			
— helvetica	— helvetica		
aspera			
ventricosa		— ventricosa	Cymbella ventricosa
Rhopalodia gibba			
Amphora ovalis			
Tryblionella Hantzschiana			
Nitzschia amphioxys		Nitzschia amphioxys	
— parvula			Nitzschia parvula
— dissipata	Nitzschia dissipata		
— sigmoidea	— sigmoidea		
— linearis			
— — *tenuis	— linearis *tenuis		
— subtilis			
Surirella biseriata	Surirella biseriata		Surirella biseriata
— linearis	— linearis	Surirella linearis	— linearis
— elegans (nur hier!)			
— robusta *splendida	— robusta *splendida	— robusta *splendida	
— ovalis			
— — *ovata			
— — *angusta			
	— anceps (nur hier u. bei Walkenried)		
	— delicatissima (nur hier beobachtet!)		

Tabellarische Übersicht der Verteilung der Diatomaceen auf die Gewässer des Gebietes, in systematischer Anordnung.

Zeichenerklärung:

o = vorhanden

● = in Menge

	Habichtswald	Meißner	Kauffunger Wald	Hohe Hagen	Kleine Gewässer	Weser	Sphagneta	Moringen	Harste	Northeim	Denkersh. Teich	Sülbeck	Uemmelberg-Wiese
	Hess. Gebirge			Weser-Leine-Hügel: D. Weserb.				Weser-Leine-Hügel: Hügelland				Göttinger Gebiet: Salz	
Melosira varians	o				●	o	o						
distans *nivalis													
Roeseana													
arenaria					o								
Cyclotella operculata													
antiqua													
Kützingiana			o		o	o							
Coscinodiscus minor					o								
Cylindrotheca gracilis											o		
Tabellaria flocculosa		o	o		●	o			o		o		
fenestrata		o			●	o			o				o
— *asterionelloides													
Denticula tenuis	o												
— *frigida					o								
— *inflata					o								
crassula													
elegans													
sinuata					o								
Denticula					●	o							

	Kleiner Hagen	Botan. Garten	Wasserhaus	Leinetal	Hainberg	Göttinger Wald	Weendespring	Rasequelle	Winzenburg	Altenstein	Hedemünden	Gräben, Tümpel	Seeburger See
	Göttinger Gebiet: Göttingen						Göttinger Gebiet: Kalkquellen					Eichsfeld	
Melosira varians		o		o	o	o	●	o	o			o	
distans *nivalis													
Roeseana													
arenaria							●	o	o				
Cyclotella operculata								o					●
antiqua													
Kützingiana			o						o				
Coscinodiscus minor													
Cylindrotheca gracilis		o											
Tabellaria flocculosa	●			o									
fenestrata													
— *asterionelloides													
Denticula tenuis									o				
— *frigida									o				
— *inflata													
crassula									o				
elegans													
sinuata										o			
Denticula													

	Altwässer	Rhume/Oder	Rhumspringe	Erdfälle	Harbis/Neuhof	Liebenrode	Herzberg	Sachsa	Walkenried/Ellrich	Nordhausen	Siebertal	Clausthal-Zellerf.	Andreasberg	Rehberg/Oderbr.	Schierke/Eckerloch	Moore	Brockengebiet	Unterharz
	Rhumegebiet			Südl. Vorharz			Südharz				Oberharz							
Melosira varians	o	o	●	●	o			o	●	o		o						
distans *nivalis												o				o		
Roeseana																		o
arenaria										o	o							
Cyclotella operculata										●								
antiqua												o						
Kützingiana				o	o	o			o			o						
Coscinodiscus minor																		
Cylindrotheca gracilis										o								
Tabellaria flocculosa		o		o	o	o		o	●	●		●	●	●	●	●	●	
fenestrata				o	o	o		o	●	o		●		o				
— *asterionelloides												o						
Denticula tenuis					o				o						o			
— *frigida																		
— *inflata																		
crassula																		
elegans									o									
sinuata																		
Denticula																		

Meridion circulare	constrictum	Diatoma vulgare	— *grande	elongatum	hiemale	— *mesodon	anomalum	Fragilaria virescens	capucina	construens	Harrisonii	mutabilis	Synedra Vaucheriae	Ulna	capitata	radians	Ceratoneis Arcus	Eunotia monodon	diodon	triodon	nodosa	tetraodon	Arcus	— *bidens	major	gracilis	pectinalis	— *undulata	Soleirolii	lunaris	Cocconeis Pediculus	Placentula	exilis
								○															●			●	●				○		○
								○															○			○	○						○
	○					○	○	○	○	○													●	○		○	○				○		●
	○					○		○		○													○	○	○	○	○			▪			○
	○						○	○															▪			○	○		○				○
○	●		○	○	○	●	○	●	○	○		○		●		●		○	○			○	●	●	○	●	●	●	○	○	○	○	●
○								○		○																○	○						▪
●	○	●			●				○					○			○														●		▪
○	○	●						○	○		○			▪	○	○			○			○	○		○	●	●			○	●	○	●
○	○					○		○		○		○		○		○										○					○	○	○
	○				○	○								○									○										
○	○											○		○											○		○					▪	
					○				○	○	○			○		○										○	○					▪	
○	○					○			○	○		○		●	○	●			▪					○	○	●	○				○		○
○		○			●				○																								
○	○	○	○			○			○			○		○		○	○						○			○					○		○
○		○			○				○					○		○		○					○			○					○		○
														○																	○		
○		○						●						○																	○		○
○					○																											○	○
○		▪		○				○			○				○								○				○				○	○	○
○					○				○			○		○	○								○								○		○
○									○	○	○	○		○	○																○		
●	○							○		○		○				○										○							○
○														○		○																	○
●	○	▪						○	●	○		○		○	○	○															●	○	○
														○																			
		○		○				○						○																	○		○
																							○	○		○				●	○		○
																							○										○
		○												○		○															○		
																															○		
○	○								○					○									○			○						○	○
●									○																	○	○	○					●
○									○					○		○										○	○					○	○
	○							○											○				○			○	○						
									○	○				○	○						○											○	
	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	●	○	●		○		○		○	○	○	○	○	○	○			○	●	●
○																																	
								●														○	○		○	○	○			○			
		○								○																						○	

Zeichenerklärung:

o = vorhanden

● = in Menge

	Hess. Gebirge			Weser-Leine-Hügel								Göttinger Gebiet													Eichsfeld		Rhumegebiet			Südl. Vorharz			Südharz				Oberharz							
				D. Weserb.				Hügelland				Salz		Göttingen						Kalkquellen																							
	Habichtswald	Meißner	Kauffunger Wald	Hohe Hagen	Kleine Gewässer	Weser	Sphagneta	Moringen	Harste	Northeim	Denkersh. Teich	Sülbeck	Uemmelberg-Wiese	Kleiner Hagen	Botan. Garten	Wasserhaus	Leinetal	Hainberg	Göttinger Wald	Weendespring	Rasequelle	Winzenburg	Altenstein	Hedemünden	Gräben, Tümpel	Seeburger See	Altwässer	Rhume/Oder	Rhumspringe	Erdfälle	Barbis/Neuhof	Liebenrode	Herzberg	Sachsa	Walkenried/Ellrich	Nordhausen	Siebertal	Clausthal-Zellerf.	Andreasberg	Rehberg/Oderbr.	Schierke/Eckerloch	Moore	Brockengebiet	Unterharz
Gyrosigma acuminatum															o		o	o	o	o	o				o			o	o		[o					o		o						
Kützingii																				o	o																							
attenuatum	o			o	o	o			o						o		o				o	o				o		o	o			o			o	o		o						
Navicula elliptica	o				●				o		o						o			o	o	o	o		o				o						o	o		o						
— *minima					□																																							
ovalis																															o				o			o						
silicula					□																																							
— *gibberula				o	o		o			o					o		o					o			o			o			o	o		o	o	o	o	o						
— *inflata					o														o			o																						
amphisbaena					o	o									o						o							o		o	o				●	o		o						
affinis					□																																							
— *amphirhyncha					o						o							o							o						o	o						o	o					
— *undulata																					●																							
producta																						o																o						
Iridis					□																o														o									
cuspidata			o		o	o			o								o	o																	o	o		o				o		
— *obtusa				o	o	o	o		o															o				o						o				●						
— *ambigua					o		o																																					
minima					o		o																																					
Rotaeana					□																																							
binodis				o							o											o																						
mutica																																						o						
bacilliformis																																			o									
Pupula					□																																	o						
contenta																																						o						
Bacillum																						o																						

Semen	Atomus	minuscula	sphaerophora	cryptocephala	— *exilis	rhynchocephala	— *amphiceros	viridula	vulpina	cincta *Cari	radiosa	— *acuta	gracilis	peregrina	oblonga	— *subparallela	dicephala	Placentula	— *anglica	pusilla	appendiculata	subcapitata	interrupta	— *bicapitata	mesolepta	— *angusta	polyonca	Brebissonii	divergens	Legumen	borealis	lata	gibba	stauroptera	— *parva	stomatophora	Tabellaria	hemiptera	parva	major	viridis
○																																									
									○								○								○	○		○	○												●
				○													○						○					○	○			○									●
						○			○		○				○								●					○				○									●
				○		○			○		○												○						○			○									●
									○		○																	○												○	
			○	●		●		○	○		●						○			○			●	○	●			●	○		○	○	●	○		○	○		○	●	●
																									○			○													
				○			○		○						○													○													
				●		○		○			●				○		○			○			○		●			●	○				○							○	●
						○					●				○		○						○		○			○			○										○
																	○								○			○													
				○							○														○			○													○
				○							○				○																		○								○
				○				○			●						○								○			○			○		○								●
																																								○	
			○	○				○			●			○			○			○					○												○				○
											○						○			○																					○
				○									○																												
						○					○						○								○			○					○							○	○
											○																														
						□					○				○										○			□				□					□		○	○	○
											○														○															□	
											○																														○
								○			●																													○	
	●	□									○																											○			
				○		○					●				○		○			○								○												○	○
													○												○																
				○							○																	○												○	
			○	○		○					□				○		□								○								□							○	○
				○										○			○																								
						○		○						○																			○								○
				○							○																	○												○	○
											○						○						○																		○
				○		○					○						○			○			○		○			○												○	●
											○														○			○													○
																	○					○			○				○					○			○				
				○								○					○												○						○						
			○	●	○	●	○	○			●	○	○		○	○	●		○	○	○	○		○	●		○			○	○	○	●	○			○			○	●
			○					○									○			○																					○
				○							○																	○									○			○	○
																				○																				○	
				○						○	○						○	○					○																		

Zeichenerklärung:

o = vorhanden

● = in Menge

	Hess. Gebirge			Weser-Leine-Hügel								Göttinger Gebiet													Eichsfeld		Rhumegebiet			Südl. Vorharz			Südharz				Oberharz							
				D. Weserb.				Hügelland				Salz		Göttingen						Kalkquellen																								
	Habichtswald	Meißner	Kaufunger Wald	Hohe Hagen	Kleine Gewässer	Weser	Sphagneta	Moringen	Harste	Northeim	Denkersh. Teich	Süllbeck	Uemmelberg-Wiese	Kleiner Hagen	Botan. Garten	Wasserhaus	Leinetal	Hainberg	Göttinger Wald	Weendespring	Rasequelle	Winzenburg	Altenstein	Hedemünden	Gräben, Tümpel	Seeburger See	Altwässer	Rhume/Oder	Rhumspringe	Erdfälle	Barbis/Neuhof	Liebenrode	Herzberg	Sachsa	Walkenried/Ellrich	Nordhausen	Siebertal	Clausthal-Zellerf.	Andreasberg	Rehberg/Oderbr.	Schierke/Eckerloch	Moore	Brockengebiet	Unterharz
Navicula viridis *commutata					o																																							
— *fallax																																												o
nobilis					●	o		o						■											o					o	o	o		o	o			●						
cardinalis																																			o				o					
inaequalis					o																																							
vulgaris					o	o			o									o										o									o	o	o		o	●	●	
rhomboides					●																																			o				
— *saxonica		o	o																												o				o				o					
— *viridula																		o																					o					
neglecta					■																			■			o											o			o			
Amphipleura pellucida																				o	o																							
Stauroneis anceps					●			o	o	o	o			o			o								o			o		o	o		o		o	o		●	o		o		o	
— *dilatata					o																											o		o	o									
— *linearis	o			o	o	o					o						o	o	o			o			o										o	o		o						
platystoma					o																																							
microstauron					o																																							
Phoenicenteron					●			o	o	o			o	o			o			o					o			o		o		o	o	o	●	o		●		o	o			
Gomphonema parvulum																																			o									
angustatum					o				o	o	o																o								o									
intricatum				o	●			o	o			o	o				o	o	o	o		o						o			o			o	o			●					o	
— *Vibrio					●					o								o	o													o			o			o						
gracile																o																												
— *dichotomum					o																																							

lanceolatum																					o																						
montanum																			o															o									
geminatum					●	o																																					
acuminatum					o	o		o		o							o		o	o	o	o			o			o		●	o	o		●	●			●					
constrictum	o				●					o							o	o	o	o		o			o		o	o		●	o	o		o	●	o		●					
— *capitatum					o	o			o												o									o				o				o					
apicatum																												o															
olivaceum																					o																						
Rhoicosphenia curvata					●	o					o						●								o	●		o							o	o		o					
Cymbella pusilla					o																																						
Ehrenbergii					o				o								o																		o			o					
naviculiformis	o								o		o								o									o		o			o	o	●		o	●			o		
cuspidata	o				o																														●	o		o					
affinis					o					o				o	o	o	o	o				o																o	o				
parva					o		o																											o	o								
cymbiformis					o								o				o																										
Cistula					o	o			o	o							o	o						o	o		o	o			o	o		o	o			o					
— *maculata					o	o																													o								
lanceolata					●	o											o		o			o	o		o	o								o	o			o					
helvetica					o		o											o				o								o	o		o	o	o			o					
aspera					o					o				o				o				o									o	o		●	o			o					
tumida						o																																					
turgida					o																																						
prostrata					o				o					o			o	o								o	o	o															
ventricosa					o	o			o										o								o	o		o	o		o	o	o			o			●		o
gracilis					o		o																																				
Epithemia turgida					●			o	o		o							o		o							o			o	o	o		o	●								
Sorex					o					o	o				o			o																	o								
Argus					o			o	o							o											o				o			o	o								
— *alpestris					o																		o																				
ocellata																o																											
Zebra					o						o																																
— *proboscidea					o																																						
rupestris					o																																						
Rhopalodia gibba					o					o	o					o															o			o	●			o					
— *ventricosa					o	o			o		o																																
gibberula				o																											o												

Zeichenerklärung:

o = vorhanden
● = in Menge

	Hess. Gebirge			Weser-Leine-Hügel								Göttinger Gebiet												
				D. Weserb.				Hügelland				Salz		Göttingen						Kalkquellen				
	Habichtswald	Meißner	Kauffunger Wald	Hohe Hagen	Kleine Gewässer	Weser	Sphagneta	Moringen	Uarste	Northeim	Denkersh. Teich	Sülbeck	Uemmelberg-Wiese	Kleiner Hagen	Botan. Garten	Wasserhaus	Leinetal	Heinberg	Göttinger Wald	Weendespring	Rasequelle	Winzenburg	Altenstein	Hedemünden
Amphora ovalis	o				●				o		o	o	o		o		●		o	o	o	o		
— *gracilis																								
— *Pediculus					o										o		o							
Normanni																								
Tryblionella Hantzschiana					o		o		o		o				o		o							
angustata				o	o																			
Nitzschia amphioxys					●			o	o	o							o		o	o			o	
parvula				o	●	o			o		o	o							o					
dubia									o								o					o		
dissipata					o										o					o				
sigmoidea	o				●				o		o				o	o	●	o	o	o		o		
linearis				o	o				●						o	o	o		o	o	o		o	
— *tenuis					o												o					o		
subtilis													o							o				
Palea																						o		
Kützingiana *exilis																								
communis								o									o				o			
amphibia																		o						
acicularis								o							o	o	o							
Cymatopleura Solea	o			o	●	o			o						o		●	●	o	o	o	o		
elliptica				o	o	o					o						o				o	o		

	Eichsfeld		Rhumegebiet			Südl. Vorharz			Südharz				Oberharz							
	Gräben, Tümpel	Seeburger See	Altwässer	Rhume/Oder	Rhumspringe	Erdfälle	Barbis/Neuhof	Liebenrode	Herzberg	Sachsa	Walkenried/Ellrich	Nordhausen	Siebertal	Clausthal-Zellerf.	Andreasberg	Rehberg/Oderbr.	Schierke/Eckerloch	Moore	Brockengebiet	Unterharz
Amphora ovalis	o	o	o	o			●			o	●	o	o	●						
— *gracilis												o								o
— *Pediculus												o								
Normanni																				o
Tryblionella Hantzschiana				o										o						
angustata																				
Nitzschia amphioxys	o		o		o					o	o	o		●			o			
parvula				o		o	o				o		o	o					o	
dubia												o								
dissipata											o			o		o				
sigmoidea	o		o	o	o	o	o				o	o		o						
linearis	o	o	o	o	o						o	o	o	o						
— *tenuis			o	o										o	o					
subtilis														o						
Palea																				
Kützingiana *exilis												o								
communis												o								
amphibia																				
acicularis												o								
Cymatopleura Solea	o	o	o	o	o	o	o				o	●								
elliptica		o	o	o																

Surirella biseriata		o	o		o	o	o													o															o	o		●	o			o	o
linearis	o			o	●				o									o	o			o						o			o		o		●			●	o		●		
— *tenella																																				o							
elegans																																						o					
robusta			o																																								
— *splendida	o				o	o											o			o		o									o				o	o		●					
striatula					o								o																							o							
ovalis	o			o		o			o		o								o			o			o													o					
— *ovata					●	o			o		o	o	o				o		o							o	o	o					o	o	o	o	o	o					
— *minuta					o																																						
— *angusta					o				o		o								o								o	o						o				o					
— *pinnata					o																																						
calcarata																										o																	
spiralis					o				o																																		
anceps																																			o				o				
delicatissima																																							o				
Campylodiscus hibernicus *noricus	o				o												o			o		o			o	o										o							
— *costatus																				o																							

Verzeichnis der in Südhannover mit Einschluß des Harzgebirges beobachteten Diatomaceen nebst den Fundstellen.

Bacillariaceae.

A. Centricae.

I. Discoideae.

1. Melosira Ag.

1. M. varians Ag. In Deutschland in vielerlei Gewässern überall gemein, oft mit Auxosporen. — Cassel: Wilhelmshöhe. Göttingen: Teich im Botanischen Garten; °Feuerteich; Leinekanal bei der Mühle, am Waageplatz, Walkemühle, Gräben, Städt. Brauerei. °Weendebach in dichten Mengen; °Weendespring; Quellteich der Rase; Hainberg; Tümpel bei Bremke. Landolfshausen → Seulingen. Teiche bei Winzenburg. Solling: Ahle bei Neuhaus; Lennetal bei Kirchbach. ×Östl. Weserbergland in Bächen, Flachslöchern, Fischteichen, Gräben, Teichen und Hochmooren, in Altwässern der Weser. Rhumetal: Altwässer, Oder, Rhume und Tümpel von Catlenburg bis Wulften; °Rhumspringe in der Quelle massenhaft. Südharz: Gräben und Erdfälle bei Scharzfeld, Pöhlde, Nüxei, obere und untere Kranichteich bei Neuhof; — Teiche bei Sachsa; — Blumenbergteiche bei Walkenried; — bei °Nordhausen häufig in der Zorge und Salza. Oberharz: Teiche beim Genesungsheim und in *mehreren anderen Teichen bei Clausthal-Zellerfeld.

2. M. distans Kütz. Von dieser sonst verbreiteten Art kommt im Gebiet nur die auch anderwärts (Hochseen des Riesengebirges) als Gebirgsform bekannte var. nivalis Sm. vor. — Oberharz, Clausthal: Graben beim Genesungsheim Erbprinzentanne; zwischen Brocken und Königsberg.

3. M. (Orthosira) Roeseana Rabh. wird vom Bodetal im Unterharz angegeben.

4. M. (Orthosira) arenaria Moore. Liebt Quellbecken, Mergel- und Kalkgruben, auch in Teichen. Hier ebenfalls vorzugsweise in Kalkquellen. Göttingen: im Weendespring mit Auxosporen; °Abfluß der Rasequelle zwischen Amblystegium filicinum. Quelle unter der Winzenburg bei Freden. Im Weserbergland selten: Bäche bei ×Thüste und Relliehausen; ×Teich zwischen Relliehausen und

° Beobachtung von Dr. Ferd. Quelle
× „ „ Dr. Joh. Suhr
* „ „ Dr. Alb. Zenker
Die Zeichen gelten immer bis zum nächsten Semikolon oder Punkt.

Hilwartshausen. Südharz: °Salzaquelle bei Nordhausen zwischen Amblystegium fallax. Oberharz: Altenau in Gräben (leg. Prof. Fricke-Bremen).

2. Cyclotella Kütz.

5. C. operculata Kütz. bildet weißliche Schleimmassen, die zuerst an fremden Gegenständen haften, später frei werden. — Göttingen: °Quellbecken der Rase bei Rosdorf zahlreich. Eichsfeld: im Plankton und in der Uferzone des °Seeburger Sees in Menge (hier auch von Dr. Voss gesammelt). Südharz: in der °Zorge bei Nordhausen und den sie begleitenden Tümpeln öfters in Menge.

6. C. antiqua W. Sm. In Deutschland nur im Starnberger See in Südbayern beobachtet. — Oberharz: Teich westl. vom Genesungsheim bei Clausthal.

7. C. Kützingiana Thwaites. Bisher besonders in Süddeutschland (Augsburg, Frankfurt a. M.) beobachtet. — Göttingen: im Wasserpflanzenhause des Botanischen Gartens. Kauffunger Wald. ×Altwässer der Weser. ×Solling in Teichen und Bächen. *Teiche bei Winzenburg. Südharz: Tümpel und Erdfälle bei Pöhlde, oberer und unterer Kranichteich bei Neuhof, Hundegrube bei Liebenrode; — Graben im Klosterhof bei Ellrich. Oberharz: unterer Spiegelthaler Teich; auch in *mehreren anderen Teichen daselbst.

3. Coscinodiscus Ehrenb.

8. C. minor Ehrenb. Sonst eine Brackwasserform, die an der Elbemündung bei Cuxhaven beobachtet wurde, ist auch im ×Solling gefunden: bei „Roshagen“ zwischen Neuhaus und Höxter, vielleicht nur gelegentlich verschleppt.

II. Solenoidea.

4. Cylindrotheca Rabh.

9. C. gracilis (Bréb.) Grun. = C. Gerstenbergeri Rabh. kommt sowohl im süßen Wasser wie im Brackwasser vor, meist einzeln in Gräben und Tümpeln von Sachsen und Schlesien. — Einzeln im °Teich des Botanischen Gartens zu Göttingen und im °Denkershäuser Teich bei Northeim; in der Wilhelmsquelle bei Gandersheim (leg. Dr. Besecke). Südharz: in den von Quellwasser durchflossenen Wagengeleisen eines Feldweges am °Gesundbrunnen bei Nordhausen 1902 und 1906.

B. Pennatae.

III. Fragilarioideae.

5. Tabellaria Ehrenb.

10. T. flocculosa (Roth) Kütz. Verbreitet und gemein in Seen, Teichen, Gräben, Sümpfen und Mooren vom Tiefland bis ins Gebirge. — Göttingen: Graben neben dem Leinekanal; Tümpel auf dem Kl. Hagen in großer Menge; Holtensen. Moor am °Denkershäuser Teich. Kauffunger Wald (Moor mit Sphagnum). Solling: in der Ahle bei Neuhaus und an ×vielen anderen Orten, auch in der ×Weser. Am °Meißner im Frau Holleteich und auf der Höhe mit Sedum villosum. Rhumethal: in der Rhume bei Catlenburg. Südharz: Altwässer an der Oder bei Pöhlde; Erdfälle und Tümpel bei Herzberg —> Pöhlde; im Sphagnetum eines der °Ketterlöcher südl. Tettenborn; unterer Kranichteich bei Neuhof; Hundegrube bei Liebenrode; — Schmelzteich bei Sachsa; Tümpel am Sachsenstein; — in mehreren Teichen zwischen Walkenried und Sachsa, bei Ellrich; mooriger Tümpel zwischen °Radeweg und Hasselfelde und in den Fischteichen unterhalb Birkenmoor bei Ilfeld. Oberharz: Bach zwischen *Wildemann und Lautenthal; in allen Teichen bei Clausthal-Zellerfeld; in der Sperrlutter bei Andreasberg; °Moorbächlein über Andreasberg; zwischen Andreasberg und dem Sonnenberg; Abfluß des Oderteiches; Bäche am Rehberg, auch Hühnerbrühe; Bodetal und Eckerloch über Schierke; von Schierke zum Brocken an mehreren Stellen; Heinrichshöhe; Sphagnetum am Königsberg; zwischen Königsberg und Brocken; Brockenkuppe.

11. T. fenestrata Kütz. Verbreitung wie T. flocculosa, oft mit ihr gesellschaftlich. — Im Moor auf der Höhe des °Meißner. Göttingen: Tümpel bei Holtensen; Graben auf den Ümmelwiesen bei Nörten. Im östl. ×Weserberglande an vielen Orten, auch in der Weser. Südharz: Tümpel und Erdfälle bei Pöhlde und Herzberg; Hundegrube bei Liebenrode; °Sphagnetum in einem der Ketterlöcher bei Tettenborn; — Schmelzteich bei Sachsa; Tümpel am Sachsenstein; — in den Blumenbergteichen und anderen Teichen bei Walkenried und Ellrich; °Fischteiche bei Birkenmoor über Ilfeld. Oberharz: in zahlreichen Teichen und Gräben bei Clausthal-Zellerfeld; in den Bächen am Rehberg bei Andreasberg.

var. asterionelloides Grun. — Oberharz: beim Unteren Spiegelthaler Kurhaus und in mehreren anderen *Teichen der Clausthaler Gegend.

6. Denticula (Kütz.) Grun.

12. D. tenuis Kütz. Zwischen Grünalgen in Seen und Teichen, aber im Gebiet auch in Bächen und Quellen. Cassel: Wilhelmshöhe. Winzenburg: in der Quelle unterhalb der Burg. Südharz: oberer und unterer Kranichteich bei Neuhof; — in den Blumenbergteichen bei Walkenried. Oberharz: Kalte Bode bei Schluft über Schierke. — War aus dem Harz schon bekannt.

var. frigida Kütz. seltener, hier nur im *Apenteich bei Winzenburg und im Solling: Teich in ×Völkerhausen.

var. inflata W. Sm. im östl. ×Weserberglande in Teichen und Flachslöchern, auch am ×Holzberg bei Stadtoldendorf.

13. D. crassula Naeg. Hier nur im *Fabrikteich bei Winzenburg gefunden.

14. D. elegans Kütz. Bewohnt höhere Lagen (Bayr. Alpen, Bayr. Hochebene); bei Stolberg und Kirchberg im Unterharz schon früher beobachtet. — Südharz: Graben im Klosterhof bei Ellrich.

15. D. (Grunowia) sinuata W. Sm. — In den ×Sümpfen am Holzberge bei Stadtoldendorf. Einzeln zwischen Hypnum commutatum in einem Kalkquell bei der °Försterei Altenstein unweit Allendorf a. W. — Sonst in Schlesien, Thüringen (Eisenach), Bayern an überrieselten Felsen.

16. D. (Grunowia) Denticula Grun. = Nitzschia Denticula Grun. = Dent. obtusa Kütz. Im ×östlichen Weserberglande in den verschiedensten Gewässern häufig, auch in den ×Altwässern der Weser.

7. Meridion Ag.

17. M. circulare Ag. Überall in Gewässern mannigfachster Art; bei uns im Frühjahr an vielen Orten sehr häufig, bei Göttingen selbst in den kleinsten Bächen des Muschelkalkgebietes, z. B. Gräben am Maschmühlenweg, am Hainholzweg, Tümpel an der Kaiserallee, Bach bei der städtischen Brauerei, Volksbadeanstalt; °Weendespring; °Rasequelle; Hainberg; Tümpel bei Bremke; Oberbillingshausen; zwischen Nörten und Wollbrechtshausen. Eichsfeld: zwischen Landolfshausen und Seulingen. Dransfeld: ⟶ Hohe Hagen; Drainageabfluß zwischen Mariengarten und Jühnde. Hanflöcher bei Parensen; Graben zwischen Gladebeck und Hevensen; Tümpel am Westberg bei Harste; Tümpel beim Bahnhof Northeim. Moringen: im °Ilepol. Teiche bei °Winzenburg. Rhumethal: Altwässer bei Catlenburg; Oder zwischen Wulften und Catlenburg; °Rhumequelle bei Rhumspringe; °Waldquelle zwischen Rollshausen und Rüdershausen. Südharz: Altwässer der Oder bei Pöhlde;

Erdfall Scharzfeld—Pöhlde; Hundegrube bei Liebenrode; — Sachsa: Schmelzteich, Tümpel am Sachsenstein; — Teiche zwischen Walkenried und Sachsa, Blumenbergteiche; — Siebertal; — bei °Nordhausen in einem Tümpel an der Zorge beim Kurhaus, in der Salza an Hippuris, im Bächlein bei der Kuckucksmühle und am Netzkater bei Ilfeld; in einem Graben bei °Thürungen unweit Kelbra. Oberharz: in Bächen *Wildemann—Lautenthal und *Grund—Wildemann. In einem Kalkquell bei °Altenstein bei Allendorf a. W. zwischen Hypnum commutatum.

18. M. constrictum Ralfs. Verbreitet in Schlesien, Sächs. Schweiz, Thüringen, Südbayern, aber minder häufig als M. circulare. — Göttingen: Graben am Maschmühlenweg. Tümpel bei Bremke; beim Bahnhof Northeim. Solling: in der Ahle bei Neuhaus und sonst im ×östl. Weserberglande an vielen Orten in Mooren, Gräben, Teichen und Tümpeln. Rhumetal: in der Oder zwischen Wulften und Catlenburg. Südharz: Erdfall zwischen Scharzfeld und Pöhlde; Hundegrube bei Liebenrode; Mühlgraben in Herzberg; — Tümpel am Sachsenstein; — Blumenbergteiche und Teiche am Bahndamm westl. Walkenried, bei Ellrich; — °Moorgraben bei Birkenfeld über Ilfeld. Oberharz: Clausthal-Zellerfeld im unteren Spiegelthaler Teich, südl. des Genesungsheims, am mittleren Grabenweg beim Johanneser Kurhaus, alter Bergwerksgraben daselbst, Ablauf der Teiche bei der Untermühle, Gräben und Teiche beim Kurhaus Untermühle, zwischen Wegs- und Untermühle, und in *mehreren anderen Teichen der Gegend; — °Moorbach über Andreasberg; Bach am Rehberg; Bodetal zwischen Schluft und Schierke.

8. **Diatoma** DC.

19. D. vulgare Bory. Nicht selten, besonders in Berggegenden. — Göttingen: Teich im Botanischen Garten, im Leinekanal und den Gräben bis zur Walkemühle. Northeim: in Gräben bei Sülbeck. Teiche bei *Winzenburg. Im ×Solling verbreitet; Lennetal bei Kirchbrah. Eichsfeld: auf Cladophora glomerata in der Aue zwischen °Waake und Ebergötzen. Rhumetal: Altwässer bei Catlenburg, in der Rhume daselbst, in der Oder → Wulften; Tümpel am Bahnhof Wulften; °Waldquelle zwischen Rollshausen und Rüdershausen westl. von Rhumspringe. Südharz: bei Pöhlde in Altwässern an der Oder; — im Teich an den Blumenbergköpfen bei Walkenried; — in der °Zorge bei Nordhausen massenhaft. Cassel: Wilhelmshöhe.

var. grande (W. Sm.) Grun. zieht rasch fließendes Wasser

vor. Hier nur in der Rhume bei Catlenburg; in zwei Teichen des ×Solling und in einigen Teichen bei *Clausthal-Zellerfeld im Oberharz.

20. D. elongatum Ag. Sonst in schnellfließenden Gewässern aller Art, besonders in Gebirgen. — *Mühlteich bei Winzenburg. Im ×Solling an mehreren Stellen. Oberharz: in einigen Teichen bei *Clausthal. Göttingen: Teich des Botanischen Gartens.

21. D. (Odontidium) hiemale Ehrenb. Oft zwischen Wasserpflanzen, Moosen und Fadenalgen. — ×Solling: Fischteiche bei Düsterntal und Teich an der Bahn zwischen Stadtoldendorf und Vorwohle. Göttingen: im neuen Teich bei der °Rasemühle unweit Rosdorf. Allendorf a. W.: im °Kalkquell bei Altenstein zwischen Hypnum commutatum. In der °Rhumequelle massenhaft. Südharz: Altwässer an der Oder bei Pöhlde; Teich bei Nüxei; Mühlgraben in Herzberg; — °Beratal oberhalb Ilfeld stellenweise massenhaft, im Frühling regelmäßig; im Ritterteich bei Leimbach und in der westlichen °Salzquelle an der Numburg östl. von Nordhausen. — Oberharz: Teich südl. vom Genesungsheim bei Zellerfeld.

var. mesodon Grun. bildet in Quellen, Bächen und Abzugsgräben der Gebirgsgegenden flutende braune Rasen oder schleimige Massen. — Solling: in der Ahle bei Neuhaus. Rhumetal: Rhume und Oder zwischen Catlenburg und Wulften. Südharz: Erdfall und Tümpel östlich von Pöhlde; Mühlgraben in Herzberg; — Tümpel am Sachsenstein. Oberharz: Gräben bei Erbprinzentanne und neben dem unteren Spiegelthaler Teich; Teich beim Genesungsheim; Teich zwischen Wegs- und Untermühle und Ablauf der Teiche bei der Untermühle, außerdem noch in mehreren *Teichen bei Clausthal-Zellerfeld; Rehbach am Rehberg bei Andreasberg; Straße von Eckerloch nach Schierke; Bodetal zwischen Schluft u. Schierke.

22. D. (Odontidium) anomalum W. Sm. Scheint anderwärts häufiger zu sein als im Gebiet. — Oberharz: Bodetal Schluft—Schierke; Straße Eckerloch—Schierke; — bei Clausthal-Zellerfeld im Teich südlich des Genesungsheim, im Ablauf der Teiche bei der Untermühle, Graben beim Kurhaus Untermühle. — Eine zu D. anceps Kirchn.[1]) gehörige Form in einem °Moorbach über Andreasberg.

9. Fragilaria Lyngb.

23. F. virescens Ralfs. In stehenden und fließenden Gewässern bis ins Gebirge sehr häufig, meist zwischen Algen und anderen Wasserpflanzen. — Kauffunger Wald: auf dem Hühnerfeld

1) Schmidt, Atlas der Diatomeenkunde Taf. 267 No. 50/54.

massenhaft im Bach. Göttingen: Teich im Botan. Garten; Graben am Maschmühlenweg; Bach bei der städt. Brauerei. *Mühlenteich bei Winzenburg. Tümpel bei Bremke. Eichsfeld: °Mackenrode—Landolfshausen in fließendem Graben in großer Menge. ×Solling: in Teichen, Fischteichen und Hochmooren. Südharz: Schmelzteich bei Sachsa; Tümpel am Sachsenstein; Teiche im Blumenberg. Oberharz: Siebertal; Andreasberg—Sonnenberg; Bäche am Rehberg; Brockenfeld bei Oderbrück; am Königsberg im Eckerloch; in der Ecker daselbst; Brocken—Königsberg an der Bahn; Bodetal Schluft—Schierke; — in zahlreichen Gräben und Teichen der Gegend von Clausthal-Zellerfeld (auch Dr. Zenker).

24. F. (Staurosira) capucina Desmaz. Herbst und Frühjahr, weit verbreitet. — Göttingen: Graben neben dem Leinekanal; °Gräben östl. vom Bahnhof Rosdorf; Hainberg; am °Maschmühlenweg viel häufiger als P. virescens; Rasequelle; Teich vor der °Brauerei Weendespring und in den Quellteichen daselbst. Solling: in der Ahle bei Neuhaus. ×Östl. Weserbergland in Bächen, Teichen, Sümpfen und in den Altwässern der Weser. Hügelland: Flachslöcher bei Parensen; Tümpel am Westberg bei Harste; Tümpel beim Bahnhof Northeim; °zwischen Moringen und Lutterhausen im Ilepol. Rhumetal: Altwässer bei Catlenburg; Oder Wulften—Catlenburg; Altwässer bei Pöhlde; Rhumequelle. Südharz: Erdfall zwischen Scharzfeld und Pöhlde; Teich bei Nüxei; oberer und unterer Kranichteich bei Neuhof; — Teiche zwischen Walkenried und Sachsa; — in der °Zorge unterm Schurzfellsteg bei Nordhausen. Oberharz: bei ×Clausthal nur im Abfluß der Pfauenteiche, im Joh. Friedrich-, Wasserlauf-, Sumpf- und oberen Hahnebalzer Teich; — Bodetal zwischen Schluft und Schierke.

25. F. (Staurosira) construens (Ehrenb.) Grun. = Odontidium Tabellaria W. Sm. In Nord- und Mitteldeutschland nicht selten in ruhigen und bewegten Gewässern, bis hoch ins Gebirge hinauf. Die Varietäten dieser polymorphen Art wurden hier nicht unterschieden. — Cassel: Wilhelmshöhe. ×Weserbergland in Gräben, Teichen und Altwässern der Weser. Solling: in der Ahle bei Neuhaus. Göttingen: Bach bei der städt. Brauerei; Weendespring. Hügelland: Teich bei der oberen Rodemühle; Tümpel bei Bremke. Südharz: Erdfall Scharzfeld—Pöhlde; oberer Kranichteich bei Neuhof; — Tümpel am Sachsenstein. Oberharz: im Siebergebiet; — in mehreren *Teichen bei Clausthal-Zellerfeld; — Bäche am Rehberg, auch in der Hühnerbrühe; — in der Ecker und am Königsberg beim Eckerloch; Bodetal Schuft—Schierke.

25b. F. (Staurosira) Harrisonii W. Sm. = Odontidium Har-

risonii W. Sm. In Deutschland selten (Ostpreußen, Bayern; einige Varietäten bei München, Salzburg, Berlin). — ×Östl. Weserbergland in Teichen: Bisperode, Diedersen, Düsterntal, Schorborn, Arholzen. Freden: Quelle unterhalb der Winzenburg. Göttingen: Weendespring. Südharz: oberer Kranichteich bei Neuhof; — Teiche im Blumenberg bei Walkenried; Itelteich; Graben im Klosterhof Ellrich.

25c. F. (Staurosira) mutabilis W. Sm. = Odontidium mutabile W. Sm. Bei uns in Gewässern sehr verschiedener Art, auch in Kalkquellen und in raschfließenden Gewässern. — ×Solling: in Teichen. Göttingen: Gräben am Maschmühlenweg, am Hainholzweg; Bach bei der städt. Brauerei; °Weendespring; °Rasequelle und im neuen Teich daselbst. Tümpel bei Bremke. Rhumegebiet: Oder Wulften—Catlenburg. Südharz: Erdfall Herzberg —> Pöhlde; Hundegrube bei Liebenrode; — Tümpel am Sachsenstein. Oberharz: Teich nördlich Genesungsheim Zellerfeld und sonst in den *Teichen bei Clausthal-Zellerfeld nicht selten.

10. Syncdra Ehrenb. (In dieser Gattung folge ich Kirchner in der Kryptogamenflora von Schlesien.)

26. S. Vaucheriae Kütz. auf größeren Algen, nur im ×Solling: Teich der Sägemühle bei Schießhaus.

27. S. Ulna Ehrenb. In zahlreichen Formen weit verbreitet, meist in stehenden oder langsam fließenden Gewässern an Algen und anderen Wasserpflanzen, meist in Menge. — Göttingen: Teich und Victoriahaus im Botan. Garten; Leinekanal und Gräben in den Wiesen; Maschmühlenweg; Gräben bei °Rosdorf; °Rasequelle daselbst; Hainberg; °Teich östl. des Bismarckturmes; Weendespring; Teich bei der oberen Rodemühle. Dransfeld —> Hohe Hagen. Winzenburg: Quelle und *Teiche. Solling: in der Ahle bei Neuhaus; Lennetal bei Kirchbrah; im westl. ×Weserbergland in Bächen, Flachslöchern, Tümpeln und in den Altwässern der Weser. Eichsfeld: Landolfshausen—Seulingen; °Uferzone des Seeburger Sees und Gräben daselbst. °Brunnentrog in Lutterhausen bei Moringen; im Ilepol daselbst. Tümpel beim Bahnhof Northeim; Graben bei Sülbeck. Rhumegebiet: Altwässer bei Catlenburg; Rhume und Oder bis Wulften; Tümpel am Bahnhof Wulften. — Altwässer an der Oder bei Pöhlde. Südharz: Erdfälle und Tümpel bei Herzberg—Pöhlde, auch in dem Erdfall mit schwimmender Insel; Teich bei Nüxei; oberer Kranichteich bei Neuhof; Tümpel und Hundegrube bei Liebenrode; — Sachsa: Schmelzteich; Tümpel am Bahndamm und am Sachsenstein; — Mühlgraben in Herzberg; — Teich westl.

Walkenried am Bahndamm; Graben im Klosterhof bei Ellrich; — in der °Zorge bei Nordhausen. — Oberharz: Spiegelthaler Teiche und in vielen °Teichen und Gräben bei Clausthal-Zellerfeld und in der °Innerste bei Wildemann.

28. S. capitata Ehrenb. In Gräben und Teichen verbreitet, bei uns jedoch nicht überall. — Teiche bei *Winzenburg. ×Östl. Weserbergland: Teiche zwischen Negenborn und Golenbach, bei Diedersen; Altwässer der Lenne bei Osterbrak und der Weser bei Würgassen. Göttingen: Bach bei der städt. Brauerei; Graben neben dem Leinekanal; °Teich vor der Brauerei Weendespring reichlich; °Rasequelle bei Rosdorf. Südharz: Erdfall mit schwimmender Insel bei Pöhlde; — im Itelteich bei Walkenried.

29. S. radians Kütz. In ruhigeren Gewässern nicht selten. — Cassel: Wilhelmshöhe. *Teiche bei Winzenburg. Solling: Lennetal bei Kirchbrak. Ilepol bei Moringen. Im ×Weserbergland überall verbreitet und häufig. Göttingen: Graben neben dem Leinekanal; Tümpel auf dem Hainberg und im Ebertal; Teich bei der oberen Rodemühle. Northeim: Graben bei Sülbeck. Rhumegebiet: Altwässer bei Catlenburg; Rhume ebenda; Oder zwischen Wulften und Catlenburg; Altwässer an der Oder bei Pöhlde. Südharz: Erdfälle und Gräben bei Herzberg und Pöhlde, auch in dem Teich mit schwimmender Insel; Beberteich bei Barbis; oberer und unterer Kranichteich bei Neuhof; — in den Tümpeln bei Sachsa und am Sachsenstein; — Itelteich und Teich westl. von Walkenried. Oberharz: in zahlreichen Teichen bei Clausthal-Zellerfeld.

11. Ceratoneis Ehrenb.

30. C. Arcus Kütz. In Deutschland stellenweise nicht selten; kommt auch in warmen Quellen vor. — Im °Flußgebiet der Oder unterhalb Herzberg März 1903; einzeln, aber regelmäßig, in der °Zorge unterhalb Nordhausen zwischen Melosira, im Frühling und Herbst 1906.

12. Eunotia Ehrenb.

31. E. monodon Ehrenb. Bisher nur in den Hochseen des Riesengebirges gefunden. — Solling: im ×Mecklenbruch bei Silberborn. Rhumetal: Altwässer der Oder. Oberharz bei *Clausthal: Teich bei Buntenbock, mittlerer und oberer Einersberger Teich, Hüttenteich.

32. E. diodon Ehrenb. Im Gebiet nur in Gräben und Teichen, ist sonst (Sächsische Schweiz, Riesengebirge, Eisenach) besonders in stark fließenden Gewässern beobachtet worden. — Solling:

×Torfmoor bei Silberborn. Südharz: Erdfälle zwischen Pöhlde und Herzberg; °Moor am Priorteich bei Walkenried. Oberharz: oberer und unterer Spiegelthaler Teich; mittlerer Grabenweg beim Johanneser Kurhaus; alter Bergwerksgraben daselbst; in *mehreren anderen Teichen bei Clausthal-Zellerfeld.

33. E. triodon Ehrenb. nur im ×Solling: Teich der Sägemühle bei Schießhaus. — Sonst in Sachsen, Schlesien, Bayern.

34. E. nodosa Ehrenb. nur in den ×Altwässern der Weser zwischen Dölme und Grave.

35. E. tetraodon Ehrenb. In Deutschland zerstreut. — Kauffunger Wald: °Heidemoor auf dem Hühnerfeld. ×Solling an wenigen Orten. Oberharz: mittlerer Grabenweg und alter Bergwerksgraben beim Johanneser Kurhause bei Clausthal-Zellerfeld; *Zankwieser- und oberer Pfaffenteich daselbst. Südharz: Moor am °Priorteich bei Walkenried.

36. E. (Himantidium) Arcus Ehrenb. Die Angabe „liebt Kalk"[1]) findet in unserem Gebiet wenig Bestätigung. Die Pflanze ist hier weit verbreitet und im Weserberglande wie im Harzgebirge am häufigsten. — *Apenteich bei Winzenburg. ×Weserbergland in Flachslöchern, Fischteichen, Tümpeln, Bächen und Hochmooren verbreitet. Kauffunger Wald: Hühnerfeld im Moor und sonst. Göttingen: Tümpel auf dem Kl. Hagen; °Quellbecken der Rase bei Rosdorf; Graben auf den Ümmelwiesen bei Nörten. Northeim: Tümpel am Bahnhof. Rhumegebiet: in der Oder zwischen Catlenburg und Wulften und in Altwässern und Gräben bis Pöhlde. Südharz: Teich westl. von Walkenried; — Mühlgraben in Herzberg. Oberharz: Teich westl. vom Genesungsheim, Ablauf der Teiche bei der Untermühle, unterer Spiegelthaler Teich bei Clausthal-Zellerfeld und in vielen anderen *Teichen daselbst; — Andreasberg—Sonnenberg, Bäche am Rehberg, Brockenfeld bei Oderbrück, am 3eckigen Pfahl, zwischen Brocken und Königsberg, Sphagnetum auf dem Königsberg, Brockenkuppe, am Königsberg beim Eckerloch, zwischen Schierke und dem Brocken, Bodetal Schierke—Schluft.

var. bidens V. H. wurde bisher im Riesengebirge beobachtet, ist auch hier Gebirgsform. — Göttingen: Tümpel auf dem Kl. Hagen. ×Weserbergland in Fischteichen, Tümpeln und Bächen. Südharz: Erdfall östl. Pöhlde in der Wiese. Oberharz: bei *Clausthal-Zellerfeld in vielen Teichen; — Bäche am Rehberg, Hühner-

---

1) v. Schönfeldt, Diatomaceae Germaniae S. 116.

brühe daselbst; Bodetal zwischen Schluft und Schierke; Straße vom Eckerloch nach Schierke.

37. E. (Himantidium) major Rabenh. Seltene Art, bisher nur in Schlesien und Rheinhessen gefunden. — Kauffungerwald. Solling: ×Altwasser der Lenne bei Osterbrak. Südharz: Erdfall an der Oder bei Pöhlde; Hundegrube bei Liebenrode; — Teiche im Blumenberg bei Walkenried. Oberharz: bei *Claustbal - Zellerfeld im Zankwieser-, Neuen Grumbacher-, Kl. Clausthaler- und Hüttteich, im Entensumpf; Teich zwischen Wegs- und Untermühle, alte Harzburger Chaussee; — Bach am Rehberg. *Birkenteich bei Salzdetfurth.

38. E. (Himantidium) gracilis Rabenh. Die Art ist bekannt aus dem Riesengebirge, Sachsen, Rheinhessen und Oberbayern. Bei uns nicht nur in Torf- und Sumpfgewässern, sondern in Wasser jeder Art und von jeder Bewegung weit verbreitet. — Kauffunger Wald: Graben und Moor des Hühnerfeldes. Erdfälle bei Moringen. Göttingen: Tümpel auf dem Kl. Hagen; bei Holtensen. ×Östl. Weserbergland in Bächen, Tümpeln, Teichen, Flachslöchern, Fischteichen, Wiesen- und Hochmooren überall verbreitet. Tümpel bei Bremke; am Bahnhof Northeim. Rhumegebiet: Altwässer und Oder zwischen Catlenburg und Wulften; Erdfall links der Oder bei Pöhlde. Südharz: Erdfälle bei Herzberg und Pöhlde, auch in dem mit der schwimmenden Insel; Schützendrift beim Aukrug; Teich bei Nüxei; unterer Kranichteich bei Neuhof; — Teich bei Walkenried; Blumenbergteiche; Teich bei Ellrich an der Sülzhainer Chaussee; Graben im Klosterhof bei Ellrich; — im Siebertal; — Bach bei Sachsa; Tümpel am Sachsenstein. Oberharz: in sehr vielen Teichen und Gräben der Gegend von Clausthal - Zellerfeld; — Andreasberg —> Sonnenberg; Bäche und Hühnerbrühe am Rehberg; Abfluß des Oderteiches; Brockenfeld bei Oderbrück; Weg beim 3eckigen Pfahl; Brockenkuppe; von Schierke zum Brocken.

39. E. (Himantidium) pectinalis Rabenh. Kommt auch im Gebiet nirgends in kalkhaltigem Wasser vor. — Kauffunger Wald: Moor auf dem Hühnerfeld im Sphagnetum. ×Östl. Weserbergland sehr verbreitet in Flachslöchern, Fischteichen, Teichen, Gräben, Bächen und Moosmooren. Solling: in der Ahle bei Neuhaus. Göttingen: Tümpel bei Holtensen. Moringen: im Ilepol. Quelle unterhalb der Winzenburg. Südharz: Erdfälle und Tümpel (auch in dem mit schwimmender Insel) bei Pöhlde; unterer Kranichteich bei Neuhof; Tümpel und Hundegrube bei Liebenrode; — Teiche im Blumenberg; Steinbruchteich daselbst; °Moor am Priorteich bei Walkenried; Itelteich; Ellrich im Teich an der Sülzhainer

Chaussee; Graben im Klosterhof bei Ellrich. Oberharz: in sehr vielen Teichen und Gräben der Umgebung von Clausthal-Zellerfeld; — Siebergebiet; Andreasberg —> Sonnenberg; Bäche und überschwemmte Wege am Rehberg; Brocken —> Königsberg; Brockenkuppe; am Königsberg und in der Ecker beim Eckerloch; Schierke —> Brocken.

var. undulata Ralfs, meist mit der Hauptform gemeinsam. — ×Weserbergland an mehreren Stellen. Göttingen: Tümpel bei Holtensen. Oberharz: bei Clausthal-Zellerfeld in vielen Teichen und Gräben.

40. E. (Himantidium) Soleirolii Kütz. Schlesien und im Riesengebirge. — Oberharz: im *unteren Nassewieser Teich bei Clausthal; — °Moorbach über Andreasberg ziemlich reichlich.

41. E. (Pseudo-Eunotia) lunaris (Ehrenb.) Grun. = Synedra lunaris Ehrenb. Schlesien bis ins Mährische Gesenke. — Kauffunger Wald: auf dem °Hühnerfeld sehr häufig. Göttingen: auf dem °Kl. Hagen an Conferva im Frühjahr und Herbst sehr häufig. Südharz: Teich bei Ellrich —> Sülzhain. Oberharz: *unterer Spiegelthaler-, Prinzen-, oberer Einersberger- und Hüttteich bei Clauthal-Zellerfeld; — Rehbach am Rehberg bei Andreasberg.

V. Achnanthoideae.

13. **Cocconeis** Ehrenb.

42. C. Pediculus Ehrenb. Sehr häufig und verbreitet. — *Abfluß des Apenteiches bei Winzenburg. Solling: Lennetal bei Kirchbrah, auch sonst im ×östlichen Weserberglande in Teichen, Tümpeln, Sümpfen und Bächen. Göttingen: Teich im Botan. Garten; Leinekanal beim Waageplatz; Graben neben dem Leinekanal; Bach bei der städt. Brauerei; Walkemühle; Weendespring; Tümpel auf dem Kl. Hagen; °Rasequelle bei Rosdorf an Blättern von Juncus. Northeim: Graben bei Sülbeck; Denkershäuser Teich. Eichsfeld: °Waake —> Ebergötzen in der Aue auf Cladophora glomerata; im Seeburger See auf Cladophora. Rhumegebiet: Altwässer der Oder und in der Oder von Catlenburg bis Pöhlde; Rhume bei Catlenburg. Südharz: Erdfall Scharzfeld —> Pöhlde; — Tümpel beim Bahnhof Sachsa; — Teiche westl. Walkenried am Bahndamm und an den Blumenbergsköpfen; Itelteich; Graben im Klosterhof bei Ellrich; — im °Flußgebiet der Zorge bei Nordhausen auf Cladophora häufig. Oberharz: Clausthal im *Gr. Kranicher Teich; — zwischen Brocken und Königsberg am Bahndamm; Kalte Bode bei Schluft über Schierke.

43. C. Placentula Ehrenb. Sehr anpassungsfähig. — Cassel: Wilhelmshöhe. °Kalkquell bei Altenstein unweit Allendorf a. W. an Hypnum commutatum. Winzenburg: Quelle unterhalb der Ruine; *Apenteich und Fabrikteich daselbst. ×Östl. Weserbergland häufig in Gewässern aller Art, auch in der Weser. Solling: Lennetal bei Kirchbrah. Göttingen: Graben neben dem Leinekanal; Leinemühle bei Hillerse unweit Northeim. Ilepol bei Moringen. Südharz: oberer Kranichteich bei Neuhof; Tümpel und Hundegrube bei Liebenrode; — Tümpel am Bahnhof Sachsa; — Itelteich; Graben im Klosterhof bei Ellrich. Oberharz: *Auerhanteich und oberer Spiegelthaler Teich bei Clausthal.

44. C. (Microneis) exilis Kütz. = Achnanthes exilis Kütz. In Wässern aller Art bis ins Gebirge, sowohl in Kalkquellen wie im Sphagnetum des Harzgebirges sehr verbreitet und häufig. — *Winzenburg: Apenteich und Fischteich. ×Östl. Weserbergland überall. Solling: in der Ahle bei Neuhaus. Allendorf a. W.: °Kalkquell bei der Försterei Altenstein an Hypnum commutatum. Göttingen: Teich im Botan. Garten; Leinekanal am Waageplatz; Graben am Hainholzweg; Teiche beim Kehr und auf dem Hainberg; Tümpel bei Herberhausen; Tümpel auf dem Kl. Hagen; bei Holtensen; Graben bei Hevensen; am Westberg bei Harste; Graben auf den Ümmelwiesen bei Nörten; Tümpel bei Bremke; Oberbillingshausen; in der °Rasequelle bei Rosdorf häufig; in einem °Tümpel bei Rosdorf auf Vaucheria. Northeim: Tümpel beim Bahnhof. Moringen: Ilepol und Erdfälle. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Rhumegebiet: in der Rhume bei Catlenburg; in Altwässern daselbst; Oder und ihre Altwässer von Catlenburg bis Pöhlde; Erdfälle bei Pöhlde und —> Herzberg. Südharz: Schmelzteich und Tümpel bei Sachsa und am Sachsenstein; — Teich westl. Walkenried; Blumenbergsteiche; Itelteich; Steinbruchsteich im Blumenberg; Badeteich bei Ellrich; — °Nordhausen: auf Cladophora fracta am Schurzfell und in einem Tümpel der großen Kiesgrube zwischen Nordhausen und Sandhausen. Oberharz: bei Clausthal-Zellerfeld in zahlreichen Teichen und Gräben; — Sperrlutter bei Andreasberg; Siebertal; überschwemmter Weg am Rehberg; Weg beim 3eckigen Pfahl; Sphagnetum auf dem Königsberg; in der Ecker und am Königsberg beim Eckerloch; Schierke —> Brocken an der Chaussee oben; Kalte Bode bei Schluft über Schierke.

VI. Naviculoideae.

14. Gyrosigma Cleve.

45. G. acuminatum Kütz. Fließende und stehende Ge-

wässer bis ins Gebirge. — Göttingen: Teich im Botan. Garten; Bach bei der städt. Brauerei; bei °Rosdorf; im neuen Teich der °Rasemühle einzeln; im °Ebertal; °Weendespring; zwischen °Waake und Ebergötzen im Wiesensumpf; Tümpel über °Mackenrode. Rhumegebiet: Oder zwischen Wulften und Catlenburg; °Rhumspringe. Vorharz: oberer Kranichteich bei Neuhof. Südharz: einzeln zwischen Oscillarien im °Bach am Gänseanger bei Steinbrücken (Nordhausen). Oberharz: bei *Clausthal-Zellerfel nur im Gr. Kranicher und unteren Flößteich beobachtet.

46. G. Kützingii Grun. Eine seltene Art, hier nur in Kalkquellen. — Göttingen: Rasequelle bei Rosdorf; in Weendespring ziemlich häufig (v. Alten).

47. G. attenuatum Kütz. In stehenden und fließenden Gewässern. — Cassel: Wilhelmshöhe. *Teiche bei Winzenburg. Göttingen: oberer °Feuerteich; Teich im Botan. Garten; Leinekanal bei der Mühle; °Rasequelle bei Rosdorf. Dransfeld —> Hohe Hagen. Tümpel am Westberg bei Harste. °Seeburger See auf dem Eichsfeld. Rhumegebiet: Oder zwischen Wulften und Catlenburg; Tümpel am Bahnhof Wulften; °Rhumequelle. Südharz: Tümpel bei Liebenrode; in mehreren Teichen im Blumenberg bei Walkenried; Itelteich; °Nordhausen zwischen Oscillarien im Bach am Gänseanger in Steinbrücken, in einem Tümpel an der Zorge beim Kurhaus. Oberharz: bei °Clausthal-Zellerfeld nur im Polster- und Schalker-Teich; bei der °Seesener Mühle. ×Östl. Weserbergland in Teichen, Flachslöchern, Gräben und Bächen, auch in den Altwässern der Weser.

15. Navicula Bory.

48. N. (Diploneis) elliptica Kütz. In Deutschland weit verbreitet. — Cassel: Wilhelmshöhe. *Quelle des Apenteiches bei Winzenburg. ×Östl. Weserbergland häufig. Allendorf a. W.: °Kalkquelle bei Altenstein. Göttingen: Leinekanal an der Mühle; am Kreuzbergweg —> Kreuzberg; Weendespring; °Rasequelle; Flachslöcher bei Parensen. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen; °Rhumequelle. Northeim: Denkershäuser Teich. Südharz: Teiche im Blumenberg, auch Priorteich, bei Walkenried; °Ententeich beim Vorwerk Schate bei Nordhausen. Oberharz: Clausthal-Zellerfeld bei der Brockenaussicht im Graben; im Sphagnetum oberhalb des oberen Spiegelthaler Teiches; *mittl. Pfauenteich, Lange-, Schalker-, Semmelwieser- und Wasserlauf-Teich; Bach zwischen *Grund und Wildemann.

var. minima V. H. — ×Solling in Tümpeln und Teichen.

49. N. (Diploneis) ovalis Hilse. In Gräben und Teichen (Sachsen, Thüringen etc.). — Südharz: oberer Kranichteich bei Neuhof; Teich im Blumenberg bei Walkenried. Oberharz: zwischen Wegs- und Untermühle bei Clausthal-Zellerfeld.

50. N. (Caloneis) silicula Ehrenb. = N. limosa Kütz. Hier und da. — ×Solling in Bächen und Teichen.

var. gibberula Kütz. Zerstreut in Deutschland (Bayern). — *Fabrikteich bei Winzenburg. ×Solling in Fischteichen, Hochmooren etc. Dransfeld —> Hohe Hagen. Göttingen: Teich im Bot. Garten; °Feuerteich am Albanitor; Kreuzbergweg; °Graben östlich vom Bahnhof Rosdorf; Leinemühle bei Hillerse. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Rhumegebiet: Oder zwischen Wulften und Catlenburg. Südharz: Graben in Pöhlde; unterer Kranichteich bei Neuhof; Hundegrube bei Liebenrode; Erdfall auf der Schützendrift beim Aukrug; — Tümpel am Sachsenstein; — Siebertal; — Teiche im Blumenberg bei Walkenried; Graben im Klosterhof und Teich an der Sülzhainer Chaussee bei Ellrich; — Tümpel bei °Salza unweit Nordhausen. Oberharz: bei Clausthal-Zellerfeld im Graben neben dem unteren Spiegelthaler Teich; alter Bergwerksgraben beim Johanneser Kurhaus; Ablauf der Teiche bei der Untermühle; *Gr. Jägersblecker-, Lange-, untere Hahnebalzer- und Wasserlauf-Teich.

var. inflata Kütz. Scheint selten zu sein (Schlesien, Bayern). — *Fabrikteich in Winzenburg. Solling: in der Ahle bei Neuhaus. ×Östl. Weserbergland in Teichen und Bächen. Göttingen: bei Oberbillingshausen.

51. N. (Caloneis) amphisbaena Bory. Verbreitet, Frühling bis Herbst. — Wilhelmsquelle bei Gandersheim (Dr. Besecke). ×Weserbergland und Altwässer der Weser. Göttingen: Teich im Botan. Garten; Rasequelle bei Rosdorf. Rhumegebiet: Rhume bei Catlenburg; Oder zwischen Catlenburg und Wulften. Südharz; Erdfall Scharzfeld —> Pöhlde; oberer Kranichteich bei Neuhof; — Teich westl. von Walkenried am Bahndamm; bei °Nordhausen im Ententeich beim Vorwerk Schate unweit Gr. Werther, in Tümpeln des Flußgebietes der Zorge, zwischen Oscillarien am Gänseanger in Steinbrücken. Oberharz: bei *Zellerfeld nur im unteren und mittleren Pfauenteich und in einem Graben daselbst.

52. N. (Neidium) affinis Ehrenb. — In Flachslöchern, Tümpeln und Bächen des ×östl. Weserberglandes zerstreut.

var. amphirhyncha Ehrenb. Nicht häufig (Sachsen). — ×Solling an mehreren Orten. Göttingen im oberen °Ebertal (66 μ lang). Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Northeim: Denkers-

häuser Teich. Südharz: Graben in Pöhlde; Erdfall auf der Schützendrift beim Aukrug; Tümpel und Hundegrube bei Liebenrode. Oberharz: alter Bergwerksgraben beim Johanneser Kurhaus und in *mehreren anderen Teichen bei Clausthal-Zellerfeld; — Andreasberg —> Sonnenberg.

var. undulata Grun. Sehr selten, bisher nur in Hessen beobachtet. — Göttingen: in der Rasequelle bei Rosdorf sehr häufig Febr. 1910.

53. N. (Neidium) producta W. Sm. Geht bis ins Gebirge (Kochelsee im Riesengebirge). — *Apenteich bei Winzenburg. — *Oberharz: neuer und mittlerer Grumbacher-, gr. Kellerhals-, oberer und unterer Spiegelthaler-Teich, auch sonst im *Gebiet der Innerste bis Hildesheim[1]).

54. N. (Neidium) Iridis Ehrenb. Bisher im Rheintal, Hessen, Ostpreußen. — Göttingen: °Rasequelle bei Rosdorf, 69 μ lang. Südharz: Teich am Bahndamm westl. Walkenried. — Dazu N. firma Kütz. im ×östl. Weserbergland in Bächen, Flachslöchern und Teichen.

55. N. cuspidata Kütz. In Deutschland verbreitet. — Kauffunger Wald. ×Östl. Weserbergland in Tümpeln, Fischteichen, Flachslöchern, Bächen und in den Altwässern der Weser. Göttingen: Tümpel bei Holtensen; °Ebertal; °Graben östl. Rosdorf. Südharz: Itelteich bei Ellrich; °Nordhausen in einem Tümpel bei Salza, im Ententeich bei Vorwerk Schate, im Zorgebett. Oberharz: in einigen Teichen bei *Clausthal-Zellerfeld; — Weg beim 3eckigen Pfahl unweit Oderbrück.

var. obtusa W. Sm. — ×Östl. Weserbergland, in Tümpeln, Fischteichen, Flachslöchern, Bächen, Mooren und Altwässern der Weser. Hedemünden in einem Kalkbach. Dransfeld —> Hohe Hagen. Göttingen: Graben bei Hevensen und —> Gladebeck. Rhumegebiet: Oder zwischen Catlenburg und Wulften. Südharz: Tümpel am Sachsenstein. Oberharz: Karpfenteich bei Hahnenklee; *Bach zwischen Wildemann und Lautenthal; Clausthal-Zellerfeld: Graben zwischen Wegs- und Untermühle; in *mehreren anderen Teichen daselbst.

var. ambigua Ehrenb. — ×Östl. Weserbergland in Tümpeln, Fischteichen, Flachslöchern und Mooren.

56. N. minima Grun. In Gewässern, alten Aquarien, Kalthäusern. — ×Östl. Weserbergland in Fischteichen, Flachslöchern und Mooren.

---

1) Zenker, Algenflora des ostfälischen Berg- und Hügellandes etc. 1912, S. 47.

57. N. Rotaeana Rabenh. Sumpfige Stellen (Augsburg, Sächs. Schweiz). — Solling: Lennetal bei Kirchbrah.

58. N. binodis Ebrenb. In Deutschland verbreitet, aber nicht häufig (Oberlausitz, Bayern). — *Fabrikteich bei Winzenburg. Dransfeld —> Hohe Hagen. Northeim: Denkershäuser Teich.

59. N. mutica Kütz. Eine weitverbreitete Art, hier aber nur beobachtet im Oberharz: *Ziegenberger Teich bei Clausthal.

60. N. bacilliformis Grun. Bisher nur in Sachsen beobachtet. — Südharz: Teiche im Blumenberg bei Walkenried.

61. N. Pupula Kütz. In Deutschland verbreitet; hier jedoch nur Einbeck: in ×Teichen des Gutsgartens Hoppensen. Oberharz: *mittlerer Pfauenteich bei Zellerfeld.

62. N. contenta Grun. Bisher nur im Riesengebirge. — Oberharz: *Polsterteich bei Clausthal.

63. N. Bacillum Ehrenb. Nicht sehr verbreitet. — Quelle unterhalb der Winzenburg bei Freden.

64. N. Semen Ehrenb. — Bodethal im Harz. Fossil bei Eger und im ostpreußischen Bernstein[1]).

65. N. Atomus Naeg. In Brunnen, Quellen und Gräben, an feuchten Felsen, im warmen Abflußwasser von Dampfmaschinen. Göttingen: an der °Chaussee Knochenmühle —> Roringen im ersten Wassersprung rechts in dichter schleimiger Haut auf dem Grunde des Gewässers, die Masse zusammenhängend.

66. N. minuscula Grun. Auf Algen, in Quellen und Bachrinnen, in Aquarien etc. — Göttingen: Tümpel bei Herberhausen auf Wiesen.

67. N. (Anomoioneis) sphaerophora Kütz. Zerstreut (Sächs. Schweiz, Thüringer Wald). — ×Solling an mehreren Orten. Dransfeld —> Hohe Hagen. Göttingen: Tümpel auf dem Kl. Hagen. Rhumegebiet: Oder zwischen Wulften und Catlenburg. Oberharz: bei *Clausthal - Zellerfeld im kleinen Jägersblecker-, im mittleren und oberen Einersberger Teich.

66. N. cryptocephala Kütz. Sehr verbreitet. — Cassel: Wilhelmshöhe. ×Im östl. Weserbergland an vielen Orten, auch in Altwässern der Weser. Solling auch: Lennetal bei Kirchbrah. Kauffungerwald: auf dem Hühnerfeld. Göttingen: Teich im Botan. Garten; °oberer Feuerteich am Albanitor; Kreuzbergweg; am Hainholzweg; Leinekanal beim Waageplatz; Bach bei der städt. Brauerei; Tümpel auf dem Kl. Hagen; Graben auf den Ümmelwiesen bei Nörten; Tümpel am Westberg bei Harste. Northeim:

---

1) v. Schönfeldt, l. c. S. 151.

Denkershäuser Teich. Rhumegebiet: Oder zwischen Catlenburg und Wulften; Tümpel beim Bahnhof Wulften. Eichsfeld: °Seeburger See. Südharz: Tümpel östlich in der Wiese bei Pöhlde; Schützendrift beim Aukrug in einem Erdfall; Gräben und Erdfälle bei Pöhlde, auch in dem mit der schwimmenden Insel; Tümpel bei Liebenrode; Beberteich bei Barbis; — Teich westlich von Walken- am Bahndamm; Teiche an den Blumenbergsköpfen daselbst; Teich bei Ellrich —> Sülzhain; — bei °Nordhausen in der Zorge, im Ententeich bei Schate, in Salza. Oberharz: in vielen Teichen und Gräben der Gegend von Clausthal-Zellerfeld; in den Bächen am Rehberg bei Andreasberg; Brockenfeld bei Oderbrück.

var. exilis V. H. — Solling: in ×Teichen beim Forsthause Fredelshagen.

69. N. rhynchocephala Kütz. In Gräben, Tümpeln, Teichen, Bächen verbreitet und häufig. — *Fabrikteich bei Winzenburg. ×Östl. Weserbergland häufig. Solling: in der Ahle bei Neuhaus. Göttingen: Graben am Maschmühlenweg; Tümpel auf dem Kl. Hagen; bei Holtensen; Graben bei Sülbeck. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Südharz: Schmelzteich bei Sachsa; Teich im Blumenberg bei Walkenried; Teich bei Ellrich —> Sülzhain. Oberharz: in mehreren Teichen und Gräben bei Clausthal-Zellerfeld; — Bäche am Rehberg bei Andreasberg; Eckerloch am Königsberg.

var. amphiceros Grun. bei Nordhausen[1]) in Gräben. — ×Solling in Gräben und Flachslöchern.

70. N. viridula Kütz. Sümpfe, Tümpel, Gräben. — ×Weserbergland in Teichen, Tümpeln und Bächen. Dransfeld —> Hohe Hagen. Tümpel bei Bremke. Northeim: Graben bei Sülbeck. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg. Südharz: Erdfälle beim Aukrug, zwischen Herzberg und Pöhlde; — Teich Ellrich —> Sülzhain. Oberharz bei Clausthal: alte Herzbergerchaussee; *kleiner Clausthaler Teich.

71. N. vulpina Kütz. Sonst im Tieflande (bei Augsburg, in Thüringen, im Spreewald, in Ostpreußen, bei Nordhausen[2])), hier aber nur im Harzgebirge und in dessen Vorland. Oberharz: *Clausthal-Zellerfeld im oberen Hahnebalzer-, Joh. Friedrich-, mittleren Einersberger- und Hütt-Teich; — Sperrlutter bei Andreasberg; Bach am Rehberg; am Königsberg beim Eckerloch; Heinrichshöhe.

72. N. cincta Ehrenb. In Holstein gefunden.

var. Cari Ehrenb. Fossil im Habichtswald bei Cassel[3]).

1) v. Schönfeldt, l. c. S. 156.
2) „ „ S. 157.
3) „ „ S. 158.

73. N. radiosa Kütz. Weit verbreitet, geht bis in die Alpen. Im Gebiet oft massenhaft im Algenauftrieb. — Cassel: Wilhelmshöhe. Allendorf a. W.: °Kalkquelle bei Altenstein. Kauffunger Wald: Moor auf dem Hühnerfeld. Solling: in der Ahle bei Neuhaus; Lennetal bei Kirchbrak. ×Östliches Weserbergland überall verbreitet und häufig. Winzenburg bei Freden: Quelle unter der Burg; *Fabrikteich. Göttingen: Teich im Botan. Garten; °oberer Feuerteich am Albanitor; Leinekanal beim Waageplatz und bei der Mühle; Graben neben dem Leinekanal; Bach bei der städt. Brauerei; Graben am Maschmühlenweg; Teiche beim Hainholzhof, im Ebertal und auf dem Hainberg; Walkemühle; °Graben östlich Rosdorf: °Rasequelle; Tümpel über °Mackenrode; Weendespring; Tümpel auf dem Kl. Hagen; über Herberhausen. Hügelland: Teich bei der oberen Rodemühle; Flachslöcher bei Parensen; Tümpel am Westberg bei Harste. Northeim: Denkershäuser Teich im Moor; Leinemühle bei Hillerse. Moringen: im Ilepol. Eichsfeld: °Waldsumpf Waake → Ebergötzen; Landolfshausen → Seulingen. Rhumegebiet: Altwässer und Rhume bei Catlenburg; Oder Wulften → Catlenburg; Tümpel am Bahnhof Wulften; Altwässer an der Oder bei Pöhlde. Südharz: Erdfälle (auch der mit schwimmender Insel) und Tümpel bei Pöhlde und Scharzfeld; oberer und unterer Kranichteich bei Neuhof; Tümpel und Hundegrube bei Liebenrode; Teich bei Nüxei; — Tümpel und Bach bei Sachsa; Tümpel am Sachsenstein; — in allen Teichen im °Blumenberg und sonst westlich von Walkenried; beim °Priorteich im Moor; Ellrich im Badeteich, im Teich → Sülzhain. Oberharz: in sehr zahlreichen Teichen und Gräben der Gegend um Clausthal-Zellerfeld; — Andreasberg → Sonnenberg; Bäche und Hühnerbrühe am Rehberg; Bodetal zwischen Schluft und Schierke.

var. acuta (W. Sm) Grun. [Sachsen.] — ×Östl. Weserbergland in Tümpeln, Fischteichen, Flachlöchern, in der Weser.

74. N. gracilis Ehrenb. Stellenweise und einzeln. — Weserbergland: ×Flachslöcher zwischen Salzhemmendorf und Hemmendorf; Sümpfe am ×Holzberg bei Stadtoldendorf. Göttingen: im Victoriahause des Botan. Gartens. Eichsfeld: °Seeburger See.

75. N. peregrina Ehrenb. Lebt in Brackwasser, z. B. in den Thüringischen Salinen. — Göttingen: Graben auf den Ümmelwiesen; Graben bei Sülbeck (beide etwas salzhaltig). Rhumegebiet: Oder zwischen Wulften und Catlenburg.

76. N. oblonga Kütz. Stellenweise (Sachsen, Hessen, Frankfurt, Bayern). — *Winzenburg: Tümpel in der abgebrannten Fabrik. ×Weserbergland: Teiche bei Giesenberg; Fischteiche süd-

westlich Diedersen. Göttingen: °oberer Feuerteich am Albanitor; beim Bahnhof °Rosdorf im Bächlein; °Tümpel auf dem Kl. Hagen. Südharz: oberer Kranichteich bei Neuhof; — Tümpel beim Bahnhof Sachsa; — Itelteich bei Ellrich; bei °Nordhausen im Ententeich beim Vorwerk Schate. Oberharz: Bodetal Schluft —> Schierke.

var. subparallela Rabenh. Weserbergland: in Teichen bei ×Giesenberg; ×Grundmühle bei Amelungsborn.

77. N. dicephala W. Sm. In Sachsen, Thüringen, in den großen Bayerischen Seen; — im Gebiet verbreitet. Cassel: Wilhelmshöhe. Im ×östlichen Weserberglande häufig in Tümpeln, Teichen, Mooren, Bächen und den Altwässern der Weser. Dransfeld —> Hohe Hagen. Göttingen: Bach bei der städt. Brauerei; Kreuzbergweg; am Maschmühlenweg im Graben; Tümpel auf dem Kl. Hagen; Flachslöcher bei Parensen; Graben auf den Ümmelwiesen bei Nörten. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Northeim: Tümpel am Bahnhof. Rhumegebiet: Tümpel am Bahnhof Wulften; Oder Wulften —> Catlenburg. Südharz: Gräben und Erdfälle bei Herzberg und Pöhlde; — Mühlgraben in Herzberg; — Bach bei Sachsa; Tümpel am Sachsenstein; — Teich westl. Walkenried. Oberharz: bei Clausthal-Zellerfeld in mehreren Teichen und Gräben und im Sphagnetum oberhalb des oberen Spiegelthaler Teiches; im nördlichen Vorlande des Harzes nicht gefunden. — Brockenfeld bei Oderbrück; Brockenkuppe.

78. N. Placentula Ehrenb. ist bei Cassel[1]) fossil.

var. anglica Ralfs. = N. tumida W. Sm. Selten. — Nur Solling: im Teich der ×Sägemühle bei Schießhaus.

79. N. pusilla W. Sm. Kommt in Deutschland sowohl in Süßwasser wie in Brackwasser vor. — Dransfeld —> Hohe Hagen. Solling: in der Ahle bei Neuhaus. Göttingen: Walkemühle; Tümpel am Westberg bei Harste. Rhumegebiet: Tümpel nördlich am Bahnhof Wulften; Rhume bei Catlenburg. Südharz: Teiche im Blumenberg. Oberharz: Graben neben dem unteren Spiegelthaler Teich; ×Joh. Friedrich-Teich bei Clausthal-Zellerfeld. — Auf dem °Meißner im Moor auf der Höhe, nicht ganz sicher bestimmt (vergl. Nav. Carassius), eine interessante Moorform.

80. N. (Pinnularia) appendiculata Ag. nur zerstreut in Deutschland beobachtet. — Weserbergland: Teich in ×Allersheim.

81. N. (Pinnularia) subcapitata Greg. = Hilseana Jan., nur im Riesengebirge gefunden. — Solling: ×Hochmoor zwischen Uslar und Lakenhaus; ×Tümpel bei Volpriehausen.

---

1) v. Schönfeldt, l. c. S. 163.

82. N. (Pinnularia) interrupta W. Sm. Verbreitet. — Cassel: Wilhelmshöhe. Göttingen: Tümpel bei Holtensen. Northeim: Tümpel am Bahnhof. Südharz: Tümpel am Sachsenstein; — Teich westl. Walkenried am Bahndamm. Oberharz: in zahlreichen Gräben und Teichen bei Clausthal - Zellerfeld; — Bäche am Rehberg bei Andreasberg; Bodetal Schluft —> Schierke; Chaussee Schierke —> Brocken an verschiedenen Stellen; Brocken —> Königsberg am Bahndamm.

var. bicapitata Lagerstr. — Solling: in ×Tümpeln bei Volpriehausen und Fredelshagen. — Oberharz: Teich südl. des Genesungsheims Zellerfeld.

83. N. (Pinnularia) mesolepta Ehrenb. in stehenden Gewässern. — Im ×Weserberglande verbreitet, auch in Hochmooren des Solling. *Teiche bei Winzenburg bei Freden. Moringen: im Ilepol und in den Erdfällen bei Wetze. Göttingen: Victoriahaus im Botan. Garten; im °neuen Teich der Rasemühle; Tümpel bei Holtensen; auf dem Kl. Hagen. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg. Südharz: Erdfall Herzberg —> Pöhlde; Hundegrube bei Liebenrode; — Mühlgraben in Herzberg; — Tümpel am Sachsenstein; — Teiche westl. von Walkenried am Bahndamm und im Blumenberg; Moor am °Priorteich daselbst. Oberharz: in mehreren Teichen und Gräben um Clausthal-Zellerfeld; — Siebertal; — Brockenkuppe.

var. angusta Cleve. findet sich am Brocken[1]).

84. N. (Pinnularia) polyonca Breb., eine seltene Art (nur Hochseen des Riesengebirges), findet sich hier im ×Solling: Fischteiche vom Michhäuschen 0.5 km gegen Winnefeld hin östlich.

85. N. (Pinnularia) Brebissonii Kütz. = Pinnularia stauroneiforme Sm. Häufig bis ins Gebirge. — Kauffunger Wald: Moor auf dem Hühnerfeld. *Fabrikteich bei Winzenburg bei Freden. Göttingen: Teich im Botan. Garten; Graben am Maschmühlenweg; Tümpel bei Holtensen; Graben Gladebeck —> Hevensen. Ilepol bei Moringen. Tümpel am Westberg bei Harste. Northeim: Denkershäuser Teich. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Südharz: Erdfall auf der Schützendrift beim Aukrug; Tümpel bei Liebenrode; — Tümpel am Sachsenstein; — Mühlgraben in Herzberg; — Teiche westl. von Walkenried, in mehreren Teichen im Blumenberg; Teich Ellrich —> Sülzhain; — °Tümpel an der Zorge unweit des Kurhauses bei Nordhausen, 43 μ lang. Oberharz: bei Clausthal-Zellerfeld in zahlreichen Teichen und Gräben; — Siebertal;

1) v. Schönfeldt, l. c. S. 170.

Bäche am Rehberg bei Andreasberg; Ecker beim Eckerloch; Brocken —> Königsberg; Brockenkuppe; Heinrichshöhe; Chaussee Schierke —> Brocken, oben.

86. N. (Pinnularia) divergens W. Sm. Bisher nur in den Seen des Riesengebirges. — Solling: ×Hochmoor bei Uslar 7.3 km —> Lakenhaus; auch ×Altwässer der Weser zwischen Dölme und Grave. Südharz: in einem Teich im Blumenberg bei Walkenried. Oberharz: bei *Clausthal-Zellerfeld in mehreren Teichen [1]); — Rehbach am Rehberg bei Andreasberg; Brocken —> Königsberg am Bahndamm; Brockenkuppe.

87. N. (Pinnularia) Legumen Ehrenb. Selten, nur im Riesengebirge. — ×Solling: in Fischteichen Milchhäuschen —> Winnefeld, Nienover —> Winnefeld und bei Dickling, Teich in Relliehausen.

88. N. (Pinnularia) borealis Ehrenb., sonst in Deutschland häufig, ist hier nur selten beobachtet worden. ×Solling: im Mecklenbruch bei Silberborn und in Fischteichen Milchhäuschen 0.5 km —> Winnefeld östlich. Südharz: Erdfall zwischen Herzberg und Pöhlde; — Tümpel am Sachsenstein. Oberharz; *Fortuner Teich bei Clausthal.

88. N. (Pinnularia) lata Breb. Gebirgspflanze (Schlesien: Hohe Eule; Varietäten in Thüringen und im Riesengebirge). — Weserland: Flachslöcher am Bahnhof ×Osterwald. Solling: ×Neuhaus 3 km —> Höxter bei Roßhagen. Freden: *Apenteich bei Winzenburg. Oberharz: *Entensumpf, unterer Nassewieser- und Hasenbacher Teich bei Clausthal; — in den Bächen am Rehberg bei Andreasberg; zwischen Brocken und Königsberg am Bahndamm; Chaussee Schierke —> Brocken bei der 2. Bahnkreuzung.

90. N. (Pinnularia) gibba (Ehrenb.) W. Sm. wird selten (zwischen Oscillarien) in Teichen, Seen und Sümpfen gefunden. Im Gebiet bis ins Harzgebirge. — ×Weserbergland an vielen Fundstellen, meist in Fischteichen. Göttingen: Tümpel auf dem Kl. Hagen; Graben bei Sülbeck. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Südharz: Erdfälle Herzberg —> Pöhlde, Erdfall mit schwimmender Insel bei Pöhlde; Beberteich bei Barbis; — Teiche im Blumenberg bei Walkenried, auch °Priorteich daselbst. Oberharz: in mehreren Gräben und Teichen bei Clausthal-Zellerfeld.

91. N. (Pinnularia) stauroptera Grun. in vielerlei Gewässern. — ×Solling: im Hochmoor Uslar —> Lakenhaus und in den Fischteichen Dassel —> Eisenhütte. Oberharz: *Langebach und Hütt-Teich bei Zellerfeld.

---

1) A. Zenker, l. c. S. 50.

var. parva Grun. bei Dresden gefunden; hier in den ×Altwässern der Weser bei Würgassen.

92. N. (Pinnularia) stomatophora Grun. — Harzburg[1]).

93. N. (Pinnularia) Tabellaria Ehrenb. Aus Schlesien, Hessen, Franken bekannt. — Kauffungerwald: Hühnerfeld. ×Weserbergland in Teichen, Tümpeln, Hochmooren. *Winzenburg bei Freden im Fabrikteich. Rhumegebiet: in der Oder zwischen Wulften und Catlenburg. Oberharz: mittlerer Grabenweg und alter Bergwerksgraben beim Johanneser Kurhaus, Teich zwischen Wegs- und Untermühle und in *einigen anderen Teichen bei Clausthal-Zellerfeld.

94. N. (Pinnularia) hemiptera Kütz. Scheint selten zu sein. — Göttingen: Tümpel bei Herberhausen auf Wiesen.

95. N. (Pinnularia) parva (Ehrenb.) Greg. in Holstein, Sachsen. — Nur in einem Tümpel bei *Winzenburg und im *Teich bei der Seesener Mühle.

96. N. (Pinnularia) major Kütz. Verbreitet und häufig in Wässern aller Art. — ×Östl. Weserbergland an mehreren Orten, Ithwiesen, Wickensen, Osterwald, Salzhemmendorf. Kauffunger Wald: °Heidemoor auf dem Hühnerfeld häufig. *Freden: Winzenburg im Fabrikteich und Mühlteich. °Meißner im Moor auf der Höhe mit Sedum villosum. Göttingen: Teich des Botan. Gartens; °oberer Feuerteich; am °Maschmühlenweg; beim °Bahnhof Rosdorf; °Quellbecken der Rase bei Rosdorf; °Tümpel auf dem Kl. Hagen; Flachslöcher bei Parensen; Tümpel bei Bremke. Eichsfeld: °Wiesensumpf Waake —> Ebergötzen. Northeim: °Moor am Denkershäuser Teich. °Rhumspringe in der Quelle. Südharz: Teiche im Blumenberg bei Walkenried. Oberharz: Graben neben dem unteren Spiegelthaler Teich bei Clausthal und in *sehr zahlreichen anderen Teichen daselbst; °Bach über Andreasberg.

97. N. (Pinnularia) viridis Nitzsch. Verbreitet und häufig. — Kauffungerwald: Hühnerfeld. ×Östl. Weserbergland verbreitet. *Teiche bei Winzenburg. Göttingen: am Kreuzbergweg, Graben am Hainholzweg; Tümpel bei Holtensen; Weendespring; Tümpel auf dem Kl. Hagen; Graben Gladebeck —> Hevensen; Flachslöcher bei Parensen. Moringen: im Ilepol. Dransfeld —> Hohe Hagen. Northeim: Tümpel beim Bahnhof; Graben bei Sülbeck; Denkershäuser Teich. Solling: in der Ahle bei Neuhaus. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Rhumegebiet: Altwässer bei Catlenburg; Oder Wulften —> Catlenburg. Südharz: Erdfall mit schwimmender

1) v. Schönfeldt, l. c. S. 175.

Insel bei Pöhlde; Erdfälle bei Herzberg und Scharzfeld —> Pöhlde; unterer und oberer Kranichteich bei Neuhof; Erdfall auf der Schützendrift beim Aukrug; Tümpel und Hundegrube bei Liebenrode; — Bach und Tümpel bei Sachsa und am Sachsenstein; — Teiche westl. von Walkenried, in allen Teichen der Blumenberg-Gegend daselbst; Ellrich im Graben des Klosterhofes und im Teich —> Sülzhain. Oberharz: in allen Teichen, Sphagneten und Gräben der Gegend von Clausthal-Zellerfeld; — in allen Bächen am Rehberg bei Andreasberg; Brockenfeld bei Oderbrück; am 3eckigen Pfahl; Brocken —> Königsberg; Brockenkuppe; Heinrichshöhe; Schierke —> Brocken; Bodetal Schluft —> Schierke; am Königsberg beim Eckerloch.

var. commutata Grun. im Harz[1]) beobachtet. — Solling: ×Teiche im Gutsgarten zu Hoppensen.

var. fallax Cleve im Harz und in den Mansfelder Seen[2]).

98. N. (Pinnularia) nobilis Ehrenb. In Gräben, Tümpeln, Seen etc. vereinzelt auftretend. — Im ×östlichen Weserberglande verbreitet, auch in Altwässern der Weser, im Hils etc. Göttingen: Tümpel auf dem Kl. Hagen. Erdfälle bei Moringen. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Südharz: Graben in Pöhlde; Erdfall Herzberg —> Pöhlde; Hundegrube bei Liebenrode; — Bach bei Sachsa; Tümpel am Sachsenstein; — in mehreren Teichen im Blumenberg bei Walkenried; Graben im Klosterhof Ellrich. Oberharz: Clausthal-Zellerfeld im unteren Spiegelthaler Teich, alter Bergwerksgraben beim Johanneser Kurhaus und in *vielen anderen Teichen daselbst.

99. N. (Pinnularia) cardinalis Ehrenb. = Stauroptera cardinalis Ehrenb. Nicht häufig. — Bei uns nur im °Moor am Priorteich bei Walkenried und in einem °Moorbächlein über Andreasberg.

100. N. (Frustulia) inaequalis Crouan. — Nur in ×Flachslöchern Salzhemmendorf 1.5 km —> Hemmendorf.

101. N. (Frustulia) vulgaris Thwaites. Bei uns nicht nur, wie gewöhnlich, in Flüssen, sondern auch in Gräben, Tümpeln und Mooren bis hoch ins Harzgebirge hinein. — Göttingen: Tümpel auf dem Hainberg; Tümpel am Westberg bei Harste. ×In der Weser bei Polle; ×in Fischteichen bei Osterwald; ×Solling: Nienover —> Winnefeld, Dassel. Südharz: Tümpel östl. Pöhlde in der Wiese. Oberharz: Siebertal; Sperrlutter bei Andreasberg; — Clausthal-Zellerfeld: zwischen Wegs- und Untermühle; Graben

1) v. Schönfeldt, l. c. S. 178.
2) „ „ S. 178.

neben dem Teich bei der Brockenaussicht Zellerfeld; unterer *Kellerhals-, unterer Spiegelthaler- und großer Jägersblecker Teich; — Brockenfeld bei Oderbrück; Weg beim 3eckigen Pfahl; Sphagnetum auf dem Königsberg; Brocken —> Königsberg; Brockenkuppe; Heinrichshöhe; Schierke —> Brocken oben.

102. N. (Frustulia) rhomboides Ehrenb. Kommt im Riesengebirge vor. — ×Östl. Weserbergland: in Flachslöchern bei Salzhemmendorf, Weenzen; in ×Teichen bei Völkerhausen, Giesenberg, Arholzen, Lobach. Solling: ×Teich bei Schießhaus. Oberharz: Bach am Rehberg.

var. saxonica Rabenh. = Navicula crassinervia Bréb.[1]). Utewalder Grund der Sächs. Schweiz, Hochseen des Riesengebirges. — Kauffunger Wald: auf dem °Heidemoor des Hühnerfeldes. °Meißner oben. Südharz: Sphagnetum in einem der °Ketterlöcher bei Tettenborn; Moor am °Priorteich bei Walkenried. Oberharz: Moorbach über Andreasberg ziemlich zahlreich.

var. viridula Breb. viel verbreiteter als die Hauptform, kommt bei uns in derselben Gegend vor. Göttingen: in der Lutter bei Hoffmannshof. Oberharz: in Bächen am Rehberg bei Andreasberg.

103. N. (Frustulia) neglecta Thwaites = Colletonema neglectum Thw. — °Hedemünden: in einem Kalkbach. Solling: in der Ahle bei Neuhaus. Rhumegebiet: Altwässer bei Catlenburg. Oberharz: im *Joh. Friedrich- und oberen Hahnebalzer Teich bei Clausthal-Zellerfeld; — am Königsberg beim Eckerloch.

16. **Amphipleura** Kütz.

104. Amphipleura pellucida Kütz. Sonst nicht selten in stehenden und langsam fließenden Gewässern, bildet braune Überzüge auf dem Boden derselben, an Steinen und Holzwerk. Bei uns nur in klaren kalkigen Quellbecken und nur einzeln beobachtet. Göttingen: im Auftrieb des °Quellteiches von Weendespring; °Rasequelle bei Rosdorf.

17. **Stauroneis** Ehrenb.

105. St. anceps Ehrenb. In Schlesien, Thüringen. — Im ×Weserberglande verbreitet. Göttingen: Bach bei der städtischen Brauerei; Graben am Maschmühlenweg; Tümpel auf dem Kleinen Hagen; bei Holtensen; Leinemühle bei Hillerse; Graben Gladebeck —> Hevensen. Moringen: im Ilepol. Northeim: Denkershäuser

1) Vergl. Pfitzer, Bacillar. S. 58 ff.

Teich. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg. Südharz: Erdfälle auf der Schützendrift beim Aukrug; Erdfall zwischen Herzberg und Pöhlde; Teich bei Nüxei; — Mühlgraben in Herzberg; Teiche im Blumenberg bei Walkenried; — °Nordhausen in einem Tümpel beim Kurhaus. Oberharz: in mehreren Teichen und Gräben bei Clausthal-Zellerfeld; — Andreasberg —> Sonnenberg; °Moorbach über Andreasberg; am Königsberg beim Eckerloch; Brockenkuppe.

var. dilatata Ehrenb. ×Weserbergland: Teich bei Völkerhausen, Bach bei Allersheim. Südharz: Hundegrube bei Liebenrode; Tümpel bei Sachsa; — Teich an den Blumenbergköpfen bei Walkenried.

var. linearis Ehrenb. = St. Smithii Grun. Holstein, Oberlausitz, Schlesien. — Cassel: Wilhelmshöhe. Dransfeld —> Hohe Hagen. ×Östl. Weserbergland: Teich bei Hoppensen, Fischteiche Nienover —> Winnefeld, Altwässer der Weser, Halle am Hils. *Winzenburg bei Freden: Fabrikteich. Northeim: Denkershäuser Teich. Göttingen: in der Lutter bei Hoffmannshof; Bach bei der städt. Brauerei; Teich bei der oberen Rodemühle. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Südharz: Teiche im Blumenberg bei Walkenried; °Tümpel an der Zorge beim Kurhaus bei Nordhausen. Oberharz: *Fortuner- und Polster-Teich bei Clausthal-Zellerfeld.

106. St. platystoma (Ehrenb.) Kütz. — ×Sümpfe am Holzberg bei Stadtoldendorf.

107. St. microstauron Kütz. — Solling: ×Bach der Sägemühle bei Schießhaus.

108. St. Phoenicenteron Ehrenb. Häufig. — Im ×Solling, Hils, Ith verbreitet. Göttingen: Weendespring; °Rosdorf; Tümpel auf dem Kl. Hagen und bei Holtensen; Graben auf den Ümmelwiesen bei Nörten; Flachslöcher bei Parensen. Ilepol bei Moringen. Northeim: Tümpel beim Bahnhof. Eichsfeld: °Wiesensumpf Waake —> Ebergötzen; Landolfshausen —> Seulingen. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg. Südharz: Erdfälle auf der Schützendrift beim Aukrug; zwischen Herzberg und Pöhlde; Hundegrube bei Liebenrode; Mühlgraben in Herzberg; — Bach bei Sachsa; Tümpel am Sachsenstein; — Teiche im Blumenberg bei Walkenried; Teich Ellrich —> Sülzhain; — °Nordhausen in einem Tümpel an der Stolberger Chaussee und im Zorgegebiet. Oberharz: in vielen Teichen und Gräben bei Clausthal-Zellerfeld; — Rehbach bei Andreasberg; am Königsberg beim Eckerloch; Bodetal zwischen Schluft und Schierke.

18. Gomphonema Agardh.

109. G. parvulum Kütz. Auf Algen nicht häufig (Thüringen, Sachsen). — Südharz: Teiche im Blumenberg bei Walkenried; Itelteich.

110. G. angustatum Kütz. Nicht selten auf Steinen etc., meist in fließendem Wasser. — Solling: in der Ahle bei Neuhaus. Northeim: Tümpel beim Bahnhof; Denkershäuser Teich. Göttingen: Gräben bei Hevensen und —> Gladebeck. Südharz: Altwässer der Oder bei Pöhlde; — Bach bei Sachsa; — Teich westlich von Walkenried.

111. G intricatum Kütz. Oft an überrieselten Felsen, in Wasserfällen verbreitet (Thüringen, Harz, Sächs. Schweiz); in unserm Gebiet aber auch in ruhigem Wasser, sogar im Sphagnetum. — Im ×Weserberglande (Solling, Hils, Stadtoldendorf, Osterwald, Salzhemmendorf etc.) häufig. *Teiche bei Winzenburg bei Freden. Göttingen: Graben am Hainholzweg; Weendespring; Tümpel bei Herberhausen; Teich bei der oberen Rodemühle. Dransfeld —> Hohe Hagen. Tümpel bei Bremke. Nörten: Flachlöcher bei Parensen; Graben auf den Ümmelwiesen. Moringen: Ilepol. Northeim: Graben bei Sülbeck. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg. Südharz: oberer und unterer Kranichteich bei Neuhof; — Bach bei Sachsa; Tümpel am Sachsenstein; in mehreren Teichen im Blumenberg bei Walkenried; Graben im Klosterhof Ellrich. Oberharz: in zahlreichen Gräben und Teichen bei Clausthal-Zellerfeld; — Heinrichshöhe.

Var. Vibrio Ehrenb. aus Preußen bekannt. — ×Weserbergland verbreitet: Solling, Hils etc. Göttingen: Teich beim Hainholzhof; Tümpel bei Bremke. Northeim: Tümpel beim Bahnhof; Leinemühle bei Hillerse. Südharz: Tümpel bei Liebenrode; — Itelteich bei Ellrich. Oberharz: bei Clausthal-Zellerfeld in den Teichen nordwestlich des Genesungsheims; im *unteren Nassewieser-, Joh. Friedrich- und oberen Hahnebalzer Teich.

112. G. gracile Ehrenb. Bildet an Wasserpflanzen schleimige Überzüge. — Göttingen: im Victoriahause des Botanischen Gartens.

var. dichotomum W. Sm. — ×Weserbergland: Teich in Völkerhausen, Tümpel in Fredelshagen.

113. G. lanceolatum Ehrenb. Nur in den Seen und Teichen des Riesengebirges. — Hier häufig und sehr charakteristisch an Juncustengeln im 'Quellbecken der Rase unweit Rosdorf bei Göttingen.

114. G. montanum Schum. im Harz und im Riesengebirge, auch in Bayern und in der Elbe bei Hamburg[1]. — Tümpel bei Bremke. Südharz: Tümpel nördl. vom Bahndamm bei Sachsa.

115. G. geminatum Ag. Im ×Weserbergland verbreitet: Eschershausen, Stadtoldendorf, Altwässer der Weser, Salzhemmendorf, Solling, Hils, Hoppensen.

116. G. acuminatum Ehrenb. Überall verbreitet. — ×Weserbergland: Eschershausen, Stadtoldendorf, Altwässer der Weser, Solling und Umgebung, überall häufig. Freden: *Teiche und Quelle bei Winzenburg. Moringen: Ilepol. Göttingen: Bach bei der städt. Brauerei; °Bach bei Rosdorf und Rasequelle; Weendespring; Teich bei der oberen Rodemühle; Leinemühle bei Hillerse. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Solling: Lennetal bei Kirchbrah. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg. Südharz: Erdfall mit schwimmender Insel und andere Erdfälle und Tümpel östl. Pöhlde; unterer Kranichteich bei Neuhof; Teich bei Nüxei; Tümpel und Hundegrube bei Liebenrode; — Schmelzteich, Bach und Tümpel am Bahndamm bei Sachsa; Tümpel am Sachsenstein; — Teich westl. von Walkenried; Blumenbergteiche; Itelteich; °Tanzteich bei Niedersachswerfen. Oberharz: in sehr vielen Teichen und Gräben bei Clausthal-Zellerfeld.

117. G. constrictum Ehrenb. Überall und häufig. — Cassel: Wilhelmshöhe. Freden: Quelle und Fabrikteich bei Winzenburg. ×Weserbergland häufig, auch im Solling: Lennetal bei Kirchbrah. Göttingen: Bach bei der städt. Brauerei; Graben neben dem Leinekanal; Teich im Ebertal; Teich bei der oberen Rodemühle. Northeim: Tümpel beim Bahnhof; Leinemühle bei Hillerse. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Rhumegebiet: Altwässer bei Catlenburg; Oder Wulften —> Catlenburg. Südharz: Erdfall mit der schwimmenden Insel und andere Erdfälle und Tümpel bei Pöhlde; oberer und unterer Kranichteich bei Neuhof; Teich bei Nüxei; Tümpel und Hundegrube bei Liebenrode; — Schmelzteich, Bach und Tümpel am Bahndamm bei Sachsa; Tümpel am Sachsenstein; — Teiche westl. von Walkenried; Blumenbergteiche daselbst; Itelteich; — bei °Nordhausen in einem Tümpel am Schurzfell auf Cladophora. Oberharz: in zahlreichen Teichen und Wasserläufen bei Clausthal-Zellerfeld.

var. capitatum Ehrenb. Im ×Solling und seiner Nachbarschaft, auch in den Altwässern der Weser; ferner im Lennetal bei Kirchbrah. Göttingen: Rasequelle bei Rosdorf; Tümpel bei

---

1) v. Schönfeldt, l. c. S. 188.

Holtensen und am Westberg bei Harste. Südharz: Erdfall mit schwimmender Insel und mehrere andere Erdfälle in der Gegend von Pöhlde — Scharzfeld; — Tümpel am Bahndamm bei Sachsa. Oberharz, Clausthal-Zellerfeld: Ablauf des Teiches bei der Untermühle; Teiche nordwestl. vom Genesungsheim; Graben neben dem Teich bei der Brockenaussicht; *untere Kellerhals-, Schröterbacher- und Lange Teich.

118. G. apicatum Ehrenb. Bisher nur im Norden und im Botan. Garten zu München beobachtet. — In der Rhume bei Catlenburg.

119. G. olivaceum Lyngb. — Göttingen: in der Rasequelle bei Rosdorf.

19. Rhoicosphenia Grun.

120. Rh. curvata (Kütz.) Grun. = Gomphonema curvatum Kütz. Verbreitet und häufig. — Im ×Weserberglande (Hils, Solling etc.) und dessen Umgebung an vielen Orten, auch in Altwässern der Weser. Göttingen: Leinekanal bei der Mühle und am Waageplatz; Graben neben dem Leinekanal; Bach bei der städt. Brauerei; Walkemühle. Northeim: Denkershäuser Teich. Eichsfeld: °Aue Waake —> Ebergötzen auf Cladophora; °Seeburger See massenhaft auf Schilfstengeln und Cladophora. Rhume bei Catlenburg. Südharz: Teich an den Blumenbergsköpfen bei Walkenried; im °Flußgebiet der Zorge häufig auf Cladophora. Oberharz: nur bei Clausthal im *Polsterteich.

20. Cymbella Ag.

121. C. pusilla Grun. Bei Halle, Wettin, Artern in Brackwasser. — ×Solling: in Fischteichen Dassel 10 km —> Uslar nördl. der Riepenangerstraße.

122. C. Ehrenbergii Kütz. Verbreitet in Teichen und Gräben. — Göttingen: im °oberen Feuerteich am Albanitor einzeln; Tümpel bei Holtensen. ×Weserbergland zerstreut. Harz: *Teich bei der Seesener Mühle; — Teiche im Blumenberg bei Walkenried; Graben im Klosterhof bei Ellrich.

123. C. naviculiformis Auersw. Verbreitet. — Cassel: Wilhelmshöhe. Göttingen: Teich bei der oberen Rodemühle; Tümpel am Westberg bei Harste. Northeim: Denkershäuser Teich. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg. Südharz: Erdfall in der Wiese östl. von Pöhlde; Mühlgraben in Herzberg; — Schmelzteich bei Sachsa; Tümpel am Sachsenstein; — in allen Teichen im Blumenberg bei Walkenried; Teich Ellrich —> Sülzhain. Oberharz: in sehr

zahlreichen Teichen und Gräben der Gegend von Clausthal-Zellerfeld; — Siebertal; — Bodetal Schluft —> Schierke.

124. C. cuspidata Kütz. Teiche, Tümpel, Gräben; auf der Lüneburger Heide auch fossil. — Cassel: Wilhelmshöhe. Solling: in der Ahle bei Neuhaus; auch sonst hier und im ×Weserberglande in Bächen, Flachslöchern etc. Südharz: Teich westl. Walkenried am Bahndamm und Teiche im Blumenberg; Itelteich; — °Graben bei Thürungen unweit Kelbra. Oberharz: in einigen *Teichen bei Clausthal-Zellerfeld.

125. C. affinis Kütz. In verschiedenen Gewässern verbreitet. — Solling: ×Lakenhaus. *Teiche bei Winzenburg. Göttingen: Teich und Victoriahaus im Botan. Garten; Gräben am Maschmühlenweg und am Hainholzweg; Leinekanal beim Waageplatz; Teich beim Kehr; Tümpel auf dem Kl. Hagen; Leinemühle bei Hillerse. Oberharz: bei *Clausthal-Zellerfeld in mehreren Teichen; — Tümpel Andreasberg —> Sonnenberg.

126. C. (Cocconema) parva W. Sm. Seltene Art; Harkenrode bei Aschersleben. — Solling: in der Ahle bei Neuhaus und sonst in ×Mooren und Teichen. Harz: Tümpel am Bahndamm bei Sachsa; Teich westl. Walkenried; Alte Harzburger Chaussee.

127. C. (Cocconema) cymbiformis Kütz. Bildet gestaltlose braungelbliche Massen auf stagnierendem Wasser. — ×Solling an mehreren Orten. Göttingen: am Kreuzbergweg; Graben auf den Ümmelwiesen bei Nörten.

128. C. (Cocconema) Cistula Hempr. Überzüge an Wasserpflanzen etc. oder im Auftrieb, nicht selten. — ×Östl. Weserbergland und Umgebung, im Solling etc., auch in den Altwässern der Weser. Göttingen: Graben neben dem Leinekanal; Tümpel bei Holtensen; °Teich östl. vom Bismarckturm mit Auxosporen Mitte März 1905; Leinemühle bei Hillerse. Kalkbach bei Hedemünden. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Rhumegebiet: Altwässer bei Catlenburg; Oder Wulften —> Catlenburg; Altwässer an der Oder bei Pöhlde. Südharz: oberer Kranichteich bei Neuhof; Tümpel und Hundegrube bei Liebenrode; — Tümpel am Bahndamm bei Sachsa; — Teiche westlich Walkenried und im Blumenberg. Oberharz: bei *Clausthal - Zellerfeld nur im unteren Flößteich; oberer Spiegelthaler-, Polster- und Schalker Teich.

var. maculata Kütz. im ×östl. Weserbergland in Gräben und Teichen und in den Altwässern der Weser. Südharz: °Moor am Priorteich im Blumenberg bei Walkenried.

129. C. (Cocconema) lanceolata Ehrenb. In Gewässern verschiedener Art. — ×Östl. Weserbergland in Teichen, Tümpeln,

Gräben, Fischteichen, Flachslöchern, Bächen häufig; ×Altwässer der Weser Rühle —> Bodenwerder; ×Sümpfe am Holzberg bei Stadtoldendorf. *Teiche bei Winzenburg. Göttingen: im Algenauftrieb des oberen °Feuerteiches am Albanitor; Reyershausen mit Auxosporen. Eichsfeld: °Wiesensumpf Waake —> Ebergötzen; Landolfshausen —> Seulingen; °Seeburger See. Bischhausen bei Witzenhausen. Allendorf: °Kalkquelle bei Altenstein zwischen Hypnum commutatum. Südharz: Schmelzteich bei Sachsa; °Moor am Priorteich im Blumenberg bei Walkenried; Itelteich. Oberharz: im *neuen Grumbacher Teich bei Clausthal.

130. C. (Cocconema) helvetica Kütz. Nicht selten bis ins Gebirge. — ×Weserbergland in Gräben, Teichen uud Mooren. *Fischteich bei Winzenburg. Göttingen: Teich im Ebertal. Südharz: Tümpel und Erdfälle bei Pöhlde und —> Herzberg; Mühlgraben in Herzberg; oberer und unterer Kranichteich bei Neuhof; — Tümpel am Bahndamm bei Sachsa; — in den Blumenbergteichen bei Walkenried; Itelteich; Graben im Klosterhof Ellrich. Oberharz: bei Clausthal-Zellerfeld im oberen Spiegelthaler Teich; im *oberen Pfauen-, kleinen Clausthaler-, Joh. Friedrich- und Sumpf-Teich; *Karpfenteich bei Hahnenklee.

131. C. (Cocconema) aspera Ehrenb. Überall nicht selten. — Solling: in der ×Lenne bei Lindenplan. *Fischteich bei Winzenburg. Göttingen: Tümpel auf dem Kl. Hagen; Tümpel auf dem Hainberg 180 μ lang. Northeim: Tümpel beim Bahnhof. Südharz: Teich bei Nüxei; unterer Kranichteich bei Neuhof; Hundegrube bei Liebenrode; — Schmelzteich, Bach und Tümpel am Bahndamm bei Sachsa; — in den Blumenbergteichen bei Walkenried; Graben im Klosterhof Ellrich. — Oberharz: *Eulenspiegler- und Schalker Teich bei Clausthal-Zellerfeld.

132. C. (Cocconema) tumida Breb. Solling: in ×Altwässern der Weser bei Würgassen.

133. C. (Encyonema) turgida (Greg.) Grun. im Riesengebirge beobachtet. — ×Solling: Fischteiche Milchhäuschen —> Winnefeld und Nienover —> Winnefeld.

134. C. (Encyonema) prostrata (Beck.) Ralfs = Encyonema paradoxa Kütz. Nicht selten zwischen Algen etc. — ×Um den Solling herum zerstreut. Göttingen: Bach bei der städt. Brauerei; °Teich im Ebertal; Tümpel auf dem Kl. Hagen; Tümpel am Westberg bei Harste. °Seeburger See an Schilfstengeln. Rhumegebiet: Altwässer bei Catlenburg und in der Rhume daselbst.

135. C. (Encyonema) ventricosa Kütz. = Encyonema caespitosa Kütz. Zwischen Algen, auf Steinen, Holzwerk, selbst in

schnellfließenden Gewässern, verbreitet. — Östl. Weserbergland: Teiche und Bäche bei ×Relliehausen; im Solling bei Kirchbrah im Lennetal und ×an mehreren anderen Orten; ×Altwässer der Weser. Göttingen: Tümpel am Westberg bei Harste; kleiner Bach bei Spanbeck. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg; Altwässer an der Oder bei Pöhlde. Südharz: Graben in Pöhlde; Erdfall Pöhlde —> Scharzfeld; Teich bei Nüxei; Mühlgraben in Herzberg; — Tümpel am Bahndamm bei Sachsa und am Sachsenstein; — Teich im Blumenberg bei Walkenried. Oberharz: Graben beim Kurhaus Untermühle und Teich westl. vom Genesungsheim; *mittlerer Pfauenteich bei Zellerfeld; — Bodetal Schluft —> Schierke; Kalte Bode bei Schluft; Chaussee Schierke —> Brocken; Brockenkuppe.

136. C. (Encyonema) gracilis Rabh. Gebirgsart (Bayern). — ×Östl. Weserbergland in Tümpeln, Fischteichen und Mooren.

21. Epithemia Bréb.

137. E. turgida (Ehrenb.) Kütz. Oft an Fadenalgen, verbreitet. Bei uns nirgends im eigentlichen Gebirge gefunden. — Im ×Weserberglande verbreitet. Northeim: Denkershäuser Teich; Leinemühle bei Hillerse. Göttingen: Teiche im Ebertal und auf dem Hainberg; °Teich vor der Brauerei Weendespring; Flachslöcher bei Parensen. Moringen: Ilepol. Rhumegebiet: Altwässer der Oder. Südharz: Erdfall mit schwimmender Insel bei Pöhlde; oberer und unterer Kranichteich bei Neuhof; Tümpel und Hundegrube bei Liebenrode; — Schmelzteich und Tümpel am Bahndamm bei Sachsa; — in allen Teichen im Blumenberg bei Walkenried (°hier auch an Riccia natans); Itelteich.

138. E. Sorex Kütz. Häufig an Fadenalgen. — Solling: ×Höxter —> Fürstenberg. Göttingen: Teich im Botan. Garten; Tümpel auf dem Hainberg. Northeim: Leinemühle bei Hillerse; Denkershäuser Teich. Südharz: Steinbruchteich im Blumenberg bei Walkenried; Badeteich bei Ellrich.

139. E. Argus Kütz. In Teichen und Tümpeln nicht sehr häufig, doch verbreitet. — Solling: ×Fischteiche bei Düsterntal; ×Schloßteich bei Erichsburg. Göttingen: im Victoriahause des Botan. Gartens; Tümpel bei Holtensen. Moringen: im Ilepol. Altwässer der Oder im Rhumegebiet. Südharz: oberer Kranichteich bei Neuhof; Beberteich bei Barbis; — Tümpel am Bahndamm bei Sachsa; — Graben im Klosterhof Ellrich.

var. alpestris Sm. Gebirgsform. — ×Sümpfe am Holzberge

bei Stadtoldendorf. Allendorf: °Kalkquell bei Altenstein zwischen Hypnum commutatum.

140. E. ocellata Kütz. Sonst in Torfgräben, Mergelgruben, Sumpfwiesen; — hier nur Göttingen: im Victoriahause des Botan. Gartens.

141. E. Zebra Kütz. wird überall in den verschiedensten Gewässern angegeben, scheint in unserm Gebiet selten zu sein; hier nur im ×Solling: Teiche zwischen Negenborn 2 km und Golmbach westlich, und südlich von Portenhagen. Northeim: Denkershäuser Teich.

var. proboscidea Grun. (bei Hamburg in der Elbe). — Sümpfe am ×Holzberg bei Stadtoldendorf; ×Fischteiche Dassel 0,5 km —> Eisenhütte im Solling.

142. E. rupestris Sm. — Solling: ×Bach bei Halle.

22. **Rhopalodia** O. Müll.

143. Rh. gibba O. Müll. Allgemein verbreitet bis ins Gebirge, in Gewässern aller Art bis ins Meer. — ×Sümpfe am Holzberg bei Stadtoldendorf. Northeim: Leinemühle bei Hillerse; °Moor am Denkershäuser Teich. Göttingen: Victoriahaus im Botan. Garten. Südharz: oberer und unterer Kranichteich bei Neuhof; — Schmelzteich bei Sachsa; — Teiche westl. Walkenried am Bahndamm, im Blumenberg; Itelteich; Pentelteich; Graben im Klosterhof Ellrich; — °Tanzteich bei Niedersachswerfen. Oberharz: bei *Clausthal-Zellerfeld nur im oberen und unteren Flößteich und im Kuttelbacher Teich.

var. ventricosa Grun. Weserbergland: ×Altwässer der Weser; ×Sümpfe am Holzberg bei Stadtoldendorf; ×Flachslöcher bei Esperode und Deitersen. Northeim: Denkershäuser Teich. Nörten: Flachslöcher bei Parensen.

144. Rh. gibberula O. Müll. — Dransfeld —> Hohe Hagen. Südharz: untere Kranichteich bei Neuhof.

23. **Amphora** Cleve.

145. A. ovalis Kütz. Sehr verbreitet in vielerlei Gewässer, eine polymorphe Art. — ×Weserbergland: im Hils, Solling und Umgebung an vielen Orten häufig. Solling: in der Ahle bei Neuhaus. Freden: Quelle unterhalb der Winzenburg; *Teiche daselbst. Cassel: Wilhelmshöhe. Northeim: Denkershäuser Teich; Graben bei Sülbeck. Nörten: Graben auf den Ümmelwiesen; Flachslöcher bei Parensen. Göttingen: Teich im Botan. Garten; °obere Feuerteich; Leinekanal bei der Mühle und am Waageplatz; am Kreuz-

bergweg; Maschmühlenweg; Walkemühle; Weendespring; °bei Rosdorf in einem Bach beim Bahnhof; °Rasequelle; Teich bei der oberen Rodemühle; Tümpel über Reyershausen. Eichsfeld: °Waake —> Ebergötzen im Wiesensumpf; Landolfshausen —> Seulingen; °Seeburger See. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg; Tümpel am Bahnhof Wulften. Südharz: Graben in Pöhlde; Teich bei Nüxei; Beberteich bei Barbis; obere Kranichteich bei Neuhof; — Tümpel am Bahndamm bei Sachsa und am Sachsenstein; — Teiche westl. Walkenried, im Blumenberggebiet; Itelteich; Graben im Klosterhof Ellrich; °Nordhausen im Zorgegebiet. Oberharz: Siebertal; — in zahlreichen Gräben und Teichen bei Clausthal-Zellerfeld.

var. gracilis Ehrenb. im Harz in Süßwassergräben, sonst in Salzwasser (Numburg bei Nordhausen, Artern)[1].

var. Pediculus Kütz. = A. minutissima W. Sm. = Cymbella Pediculus Kütz. — ×Solling: Teiche bei Düsterntal. Göttingen: im Teich des Botan. Gartens; im °oberen Feuerteich am Albanitor; beim °Bahnhof Rosdorf. Südharz: bei °Nordhausen auf Nitzschia sigmoidea in einem Tümpel am Ausgang des Dorfes Salza.

146. A. (Halamphora) Normanni Rabenh. bei Mägdesprung im Harz[2].

24. **Tryblionella** Grun.

147. T. Hantzschiana Grun. = T. gracilis Sm. = Nitzschia Tryblionella Hantzsch. In Gräben und Teichen. — ×Solling in Fischteichen, Tümpeln und Mooren. Göttingen: °Teich des Botan. Gartens einzeln; Bach bei der städtischen Brauerei; Tümpel am Westberg bei Harste. Northeim: Denkershäuser Teich. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg. Oberharz: °Schwarzenbacher- und Sumpfteich bei Clausthal-Zellerfeld.

148. T. angustata W. Sm. — Hils: ×Bach in Weenzen. Dransfeld —> Hohe Hagen.

25. **Nitzschia** (Hassall) Grunow.

149. N. (Hantzschia) amphioxys Kütz. Allgemein verbreitet. — Im ganzen Gebiet des ×östl. Weserberglandes häufig. Solling: in der Ahle bei Neuhaus. Göttingen: Bach bei der städt. Brauerei; Graben am Maschmühlenweg; Tümpel bei Holtensen; Weendespring; Oberbillingshausen. Nörten: Flachslöcher bei Parensen. Moringen: im °Ilepol. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Northeim:

1) v. Goldschmidt l. c. S. 209.

2) ebenda l. c. S. 210.

Tümpel beim Bahnhof. Rhumegebiet: Altwässer an der Oder bei Pöhlde; °Rhumequelle. Allendorf a/W.: °Kalkquelle bei Altenstein. Südharz: Tümpel am Sachsenstein; — Teich im Blumenberg bei Walkenried; — an der °Zorge bei Nordhausen häufig. Oberharz: in vielen *Teichen bei Clausthal-Zellerfeld; Sphagnetum oberhalb des oberen Spiegelthaler Teiches; — Kalte Bode bei Schluft oberhalb Schierke.

150. N. parvula W. Sm. Im Schlamm der Gewässer. — Im ganzen ×Weserberglande und seiner Umgebung: Hils, Solling, Stadtoldendorf, in der Weser etc. verbreitet. Solling auch in der Ahle bei Neuhaus. Dransfeld —> Hohe Hagen. Göttingen: Graben bei Hevensen; Oberbillingshausen. Northeim: Graben bei Sülbeck; Denkershäuser Teich. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg. Südharz: Erdfall auf der Schützendrift beim Aukrug; Beberteich bei Barbis; — Teich westl. Walkenried am Bahndamm. Oberharz: Siebertal; — Teich zwischen Wegs- und Untermühle bei Clausthal; — Brockenkuppe.

151. N. dubia W. Sm. — *Fabrikteich in Winzenburg. Göttingen: Tümpel bei Holtensen; °Graben östl. Rosdorf. Südharz, Nordhausen: in °Tümpeln an der Zorge nicht selten; am °Gänseanger in Steinbrücken zwischen Oscillarien.

152. N. dissipata (Kütz.) Grun. An Fadenalgen in Gräben und Teichen. — Im ×Weserberglande zerstreut: Weser, Osterwald, Salzhemmendorf, Hils, Ith, Solling, Stadtoldendorf. Göttingen: Teich im Botan. Garten; Weendespring. Südharz: Teich im Blumenberg bei Walkenried. Oberharz: bei Clausthal-Zellerfeld in *einigen Teichen; auch im Graben neben dem Teich bei der Brockenaussicht; — Rehbach bei Andreasberg.

153. N. sigmoidea W. Sm. Häufig. — Cassel: Wilhelmshöhe. Freden: Teiche bei *Winzenburg. Überall im ×Weserberglande und seiner Umgebung, besonders im Solling häufig. Northeim: Denkershäuser Teich. Göttingen: Teich und Victoriahaus im Botan. Garten; °obere Feuerteich am Albanitor; am °Maschmühlenweg; Teich im Ebertal; Leinekanal bei der Mühle und am Waageplatz; Graben neben dem Leinekanal; Bach bei der städt. Brauerei; beim °Bahnhof Rosdorf; Weendespring; Teich bei der oberen Rodemühle; Tümpel am Westberg bei Harste; über Reyershausen —> Ratsburg (Rahlfs). Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Rhumegebiet: Rhume bei Catlenburg; Oder Wulften —> Catlenburg; Tümpel am Bahnhof Wulften; Altwässer an der Oder bei Pöhlde; °Rhumequelle bei Rhumspringe. Südharz: Erdfall Scharzfeld —> Pöhlde; obere Kranichteich bei Neuhof; — Teich an den Blumenbergköpfen

bei Walkenried; — °Nordhausen in einem Tümpel an der Zorge beim Kurhaus, im Ententeich von Schate, beim Dorf Salza. Oberharz: bei Clausthal-Zellerfeld in den Teichen nordwestl. des Genesungsheim; *Eulenspiegler- und unterer Hausherzberger Teich.

154. N. linearis (Ag.) W. Sm. In Gräben und Sümpfen nicht selten. — ×Östl. Weserbergland und Umgebung. Allendorf a/W.: °Kalkquellen bei Altenstein. Göttingen: Teich im Botan. Garten und °Außenbecken des Victoriahauses; Leinekanal am Waageplatz; °oberer Feuerteich am Albanitor; Gräben am Maschmühlenweg und Hainholzweg; Weendespring; Tümpel bei Holtensen; Flachslöcher bei Parensen; Tümpel am Westberg bei Harste; beim °Bahnhof Rosdorf und °Rasequelle; Tümpel über Reyershausen (leg. Ralfs). Eichsfeld: °Wiesensumpf Waake —> Ebergötzen; bei °Seeburg und im Seeburger See. Rhumegebiet: Rhume bei Catlenburg; Oder Wulften-Catlenburg; Altwässer an der Oder bei Pöhlde; °Rhumequelle. Südharz: Teiche im Blumenberg bei Walkenried; Itelteich; — °Nordhausen: an der Zorge und im Ententeich bei Schate. Oberharz: Siebertal; — bei *Clausthal-Zellerfeld nur im Stadtweger-, oberen Pfauen- und Polster-Teich. Dransfeld: Drainageabfluß Mariengarten —> Jühnde massenhaft.

var. tenuis (W. Sm.) Grun. — ×Weserbergland: Hils, Ith, Solling, Stadtoldendorf. Freden: *Hörßum —> Everode im Chausseegraben und im Fabrikteich bei Winzenburg. Göttingen: Bach bei der städtischen Brauerei. Rhumegebiet: Altwässer bei Catlenburg; Rhume daselbst; Oder Wulften —> Catlenburg. Oberharz: Graben zwischen Wegs- und Untermühle bei Clausthal; — Moorbach über Andreasberg 48 μ lang.

155. N. subtilis Grun. Ziemlich selten. — Göttingen: Weendespring; Graben auf den Ümmelwiesen bei Nörten. Oberharz: *Bärenbrucher Teich bei Clausthal.

156. N. Palea Kütz. Sonst als sehr verbreitet und häufig angegeben, hier nur bei Freden: Fischteich und Fabrikteich bei *Winzenburg.

157. N. Kützingiana Hilse.

var. exilis Grun. Nordhausen (Kützing.).

158. N. communis Rabenh. Häufig, meist an fremden Gegenständen in einer Gallertmasse. — Göttingen: am °Maschmühlenweg zahlreich; beim °Bahnhof Rosdorf; neuer °Teich bei der Rasemühle. Moringen: im °Ilepol. Südharz: im °Flußgebiet der Zorge häufig, so in Tümpel beim Kurhaus; im °Ententeich bei Schate.

159. N. amphibia Grun. Zwischen anderen Algen und Gegenständen im Wasser. — Göttingen: Graben am Hainholzwege.

160. N. (Nitzschiella) acicularis Kütz. In schlammigen Gewässern mit anderen Diatomeen. — Göttingen: Teich des Botan. Gartens und °Außenbecken des Victoriahauses daselbst; Leinekanal bei der Universitäts-Badeanstalt; °Tümpel an der Leine oberhalb der Stadt und bei Rosdorf. Moringen: im °Ilepol. Südharz: in °Tümpeln an der Zorge bei Nordhausen; °bei Thürungen bei Kelbra in einem Graben.

26. Cymatopleura W. Sm.

161. C. Solea Bréb. Sehr häufig in mancherlei Gewässern. — Cassel: Wilhelmshöhe. Freden: Teiche bei Winzenburg. Im ganzen ×Gebiet des östlichen Weserberglandes, auch im Solling, Hils, an der Weser etc. häufig. Dransfeld —> Hohe Hagen. Göttingen: Teich im Botan. Garten; °obere Feuerteich beim Albanitor; Leinekanal bei der Mühle; Graben neben dem Leinekanal; Bach bei der städt. Brauerei; am Kreuzbergweg; Teich beim Hainholzhof; °Teich im oberen Ebertal; Tümpel auf dem Hainberg; bei °Rosdorf; °Rasequelle; °Quelle über Mackenrode am Göttinger Wald; Walkemühle; Weendespring; Tümpel am Westberg bei Harste. Eichsfeld: °Wiesensumpf Waake —> Ebergötzen; Landolfshausen —> Seulingen; °Seeburg in Gräben und Seeburger See. Rhumegebiet: Rhume bei Catlenburg; Tümpel nördl. am Bahnhof Wulften; Altwässer der Oder bei Pöhlde; °Rhumequelle. Südharz: Graben in Pöhlde; Erdfall Scharzfeld —> Pöhlde; Teich bei Nüxei; in den Teichen des Blumenberges bei Walkenried; Itelteich; °Nordhausen häufig im Zorgebett, bei Salza, Ententeich von Schate, in der Thyra bei Stempeda; °Graben bei Thürungen unweit Kelbra.

162. C. elliptica Bréb. In verschiedenen Gewässern. — ×Hils, Solling und Umgebung, in der Weser, zerstreut. Teiche bei *Winzenburg. Göttingen: Leinekanal bei der Mühle; Bach bei der städt. Brauerei; °am Bahnhof Rosdorf und in der Rasequelle; Walkemühle; Dransfeld —> Hohe Hagen. Witzenhausen: °Tümpel in Bischhausen. °Seeburger See. Northeim: Denkershäuser Teich. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg; Graben in Pöhlde.

27. Surirella Turpin.

163. S. biseriata Bréb. Meist in Wiesengräben, Teichen und Mooren, hier bis ins höchste Harzgebirge. — ×Solling in Teichen und Mooren; auch in der Ahle bei Neuhaus; ×Altwässer der Weser. °Moor auf dem Meißner. Kauffunger Wald: im Bach auf dem Hühnerfeld mit Fragilaria virescens. Göttingen: Weende-

spring. Südharz: Teich im Blumenberg bei Walkenried; Moorgraben bei Birkenmoor bei Ilfeld; östl. Teich der Wellenspringchaussee. Oberharz: in zahlreichen *Teichen bei Clausthal-Zellerfeld; — °Moorbach über Andreasberg; Brocken —> Königsberg; Brockenkuppe.

164. S. linearis W. Sm. Nicht selten, liebt hochgelegene Standorte. — Im ×Weserberglande und seiner Umgebung, besonders auch im Solling sehr verbreitet (hier auch in der Ahle bei Neuhaus). Cassel: Wilhelmshöhe. *Fabrikteich bei Winzenburg. Dransfeld —> Hohe Hagen. Göttingen: Teich beim Hainholzhof; Tümpel bei Bremke; am Westberg bei Harste. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg. Südharz: Graben in Pöhlde; Mühlgraben in Herzberg; — Teiche im Blumenberg bei Walkenried; Ellrich Teich —> Sülzhain. Oberharz: Clausthal-Zellerfeld in zahlreichen Teichen und Gräben; — Tümpel Andreasberg —> Sonnenberg; Eckerloch —> Schierke; am Königsberg beim Eckerloch; Schierke —> Brocken; alte Harzburger Chaussee.

var. tenella Kütz. in Gräben bei Nordhausen (Kützing.).

165. S. elegans Ehrenb. In Deutschland verbreitet (Artern, Nauheim, Hessen, Hildesheim; — hier im Harzgebirge in mehreren *Teichen bei Clausthal-Zellerfeld und im Innerstegebiet des Harz-Vorlandes.

166. S. robusta Ehrenb. = S. nobilis W. Sm. unter anderen Algen in Deutschland nicht selten; — im Gebiet nur beobachtet im Kauffunger Wald: auf dem Hühnerfeld.

var. splendida Kütz. Sonst in Salzwasser (Artern, Creuzburg a/Werra); — hier nur in süßen Gewässern gefunden. ×Weserbergland: Hils, Ith, Solling, in der Weser. *Winzenburg: Tümpel in der abgebrannten Fabrik. Göttingen: °Weendespring; °obere Feuerteich am Albanitor. Cassel: Wilhelmshöhe. Südharz: Graben in Pöhlde; Teich an den Blumenbergsköpfen bei Walkenried; °Nordhausen bei Salza, im Teich am Elsternest. Oberharz: bei *Clausthal-Zellerfeld in zahlreichen Teichen.

167. S. striatula Turpin. Süss- und Brackwasser, auch hier im Graben auf den Ümmelwiesen bei Nörten, der etwa 0,5 % Kochsalz enthält. Ferner in einem ×Tümpel der Saale bei Kapellenhagen. Bei °Nordhausen häufig im westlichen Salzbach an der Numburg.

168. S. ovalis Bréb. Sehr verbreitet, zwischen Algen und anderen Diatomeen, bis ins Gebirge. — Cassel: Wilhelmshöhe. *Apenteich bei Winzenburg. Altwässer der ×Weser Rühle —> Bodenwerder. Dransfeld —> Hohe Hagen. Northeim: Denkers-

häuser Teich. Göttingen: Tümpel bei Holtensen; bei Bremke. Eichsfeld: Landolfshausen —> Seulingen. Oberharz: bei Clausthal-Zellerfeld in mehreren Teichen und Wasserläufen.

var. ovata Kütz. hier sehr häufig. Im ×östl. Weserberglande sehr verbreitet, auch in der Weser, im Solling etc. (z. B. in der Ahle bei Neuhaus, Lennetal bei Kirchbrah). Wilhelmsquelle bei Gandersheim (leg. Dr. Besecke). Göttingen: Leinekanal bei der Mühle; am Maschmühlenweg; Walkemühle; Graben bei Hevensen und —> Gladebeck; Tümpel am Westberg bei Harste; Graben auf den Ümmelwiesen bei Nörten; Nörten —> Wollbrechtshausen; Oberbillingshausen. Northeim: Denkershäuser Teich; Graben bei Sülbeck. Rhumegebiet: Rhume bei Catlenburg; Oder Wulften —> Catlenburg; Altwässer der Oder bei Pöhlde. Eichsfeld: °Seeburg in Gräben und im See. Südharz: Mühlgraben in Herzberg; Siebertal; — Tümpel am Sachsenstein; — Teich bei den Blumenbergsköpfen bei Walkenried; — °Nordhausen im Zorgegebiet und Gänseanger in Steinbrücken zwischen Oscillarien. Oberharz: bei Clausthal-Zellerfeld im Ablauf der Teiche bei der Untermühle; im Graben neben dem Teich bei der Brockenaussicht.

var. minuta Bréb. im ×Weserbergland in Tümpeln, Flachslöchern, Bächen.

var. angusta Kütz. — Solling: in der Ahle bei Neuhaus. Tümpel bei Bremke. Göttingen: Graben bei Hevensen; Gladebeck —> Hevensen; Oberbillingshausen. Northeim: Denkershäuser Teich. Rhumegebiet: Oder Wulften —> Catlenburg; Tümpel am Bahnhof Wulften; Altwässer der Oder bei Pöhlde. Südharz: Tümpel am Sachsenstein. Oberharz: Teich zwischen Wegs- und Untermühle.

var. pinnata W. Sm. — ×Weserbergland in Tümpeln, Fischteichen, Flachslöchern und Bächen.

169. S. calcarata Pfitzer. Bisher nur in Altwässern des Rheins bei Mannheim und Heidelberg. — °Seeburger See auf schlammigem Grund lebend November 1905, tote Schalen im Plankton.

170. S. spiralis Kütz. = Campylodiscus spiralis W. Sm. Nicht selten, jedoch zerstreut. Hier nur ×Ithwiesen. ×Sümpfe am Holzberg bei Stadtoldendorf. Nörten: Flachslöcher bei Parensen.

171. S. (Stenopterobia) anceps Bréb. Bisher aus Europa nur in toten Schalen vom Riesengebirge bekannt, die mit denen von Cleve und Möller (Diat. Nr. 291 aus Cornwallis) genau übereinstimmen[1]). — Südharz: °Priorteich im Blumenberg bei Walkenried

1) Vergl. A. Schmidt, Atlas der Diatomaceenkunde Taf. 266 fig. 1, 2. O. Müller, Bacillariales aus den Hochseen des Riesengebirges in: Forschungsberichte d. Biolog. Station Plön VI, 1898.

in der moorigen Uferzone September 1905. Oberharz: °Moorbach über Andreasberg Juli 1905.

172. S. delicatissima Lewis (Proceed. Acad. Nat. Sc. Philadelphia 1863)[1]. — Mit der vorigen im °Moorbach über Andreasberg Juli 1905. — Bisher nur aus den White Mountains in Nordamerika bekannt, wo ebenfalls beide Arten gemeinsam vorkommen.

28. **Campylodiscus** Ehrenb.

173. C. hibernicus Ehrenb.

var. noricus Ehrenb. In verschiedenartigen Gewässern. — Cassel: Wilhelmshöhe. Weserbergland: ×Hils im Bach Delligsen —> Hohenbüchen; ×Graben Portenhagen —> Lüthorst; ×Sümpfe am Holzberg bei Stadtoldendorf. Freden: *Fischteich und Fabrikteich b. Winzenburg. Göttingen: Graben neben dem Leinekanal; am Kreuzbergweg; Weendespring; beim °Bahnhof Rosdorf. Eichsfeld: °Sumpf Waake —> Ebergötzen; °Seeburger See. Südharz: °Nordhausen im Bach am Gänseanger in Steinbrücken.

var. costatus (W. Sm.) Grun. — Göttingen: Weendespring.

1) A. Schmidt l. c. Taf. 266 fig. 3—5.

Beiträge zur Mathematischen Statistik I.

Zur Methodik der Bearbeitung von unvollkommenem Material.

Von

Felix Bernstein.

Vorgelegt von W. Lexis in der Sitzung vom 21. Dezember 1912.

1. Statistisches Material ist niemals vollkommen: das liegt in der Natur des statistischen Phaenomens, das stets mit einem mehr oder minder großen Fehler behaftet sein kann oder muß. Aber ein großer Unterschied ist es, ob man es mit Beobachtungen zu tun hat, die von vornherein zur Gewinnung der zu bestimmenden Größen nach bestimmtem Plane ausgeführt worden sind und die also nur noch unter der natürlichen Unvollkommenheit der Massenbeobachtung leiden, oder ob man genötigt ist, an ein zu ganz andern oder gar keinen determinierten Zwecken gewonnenes statistisches Material nachträglich gewisse Fragen zu richten. Im ersteren Falle gestatteten die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sich in weitem Maße von der noch bleibenden Unsicherheit zu befreien und Fehlergrenzen für die gesuchten Größen zu bestimmen. Im letzteren Falle, den man als den typischen Fall, unvollkommenen Materials bezeichnen kann, sieht man sich zuweilen vor erheblichen Schwierigkeiten, auch nur für die Grundgrößen selbst plausible Werte zu erlangen, von Fehlerbestimmungen ganz zu schweigen. Im großen und ganzen hat man sich in den bisher behandelten Fällen dieser Art mit einer den besonderen Bedingungen angepaßten Art der Interpolation oder Extrapolation zu helfen gesucht. Die von Knapp, Becker, Zeuner und Lexis systematisch behandelte Methodik der Bevölkerungsstatistik gibt instruktive Beispiele für derartige Methoden bei einem Material, das zugleich ein Beispiel dafür ist, daß man sich a priori d. h. bei Anlegung der Zählung in dem glücklichen erstern Falle befinden

Mitglieder besser situierten Ständen an, als der Durchschnitt der Ortskrankenkassenmitglieder, dementsprechend sind auch die Leistungsversprechen derselben anziehender, als die der ersteren. Diese Anziehungskraft, welche die freiwilligen Hilfskassen ganz besonders auf erkrankungsfähige und wohl auch erkrankungslustige Individuen ausüben, scheint es zu sein, welche den Einfluß der ärztlichen Auslese paralysiert. Für diese Auffassung spricht insbesondere die auffallend große Zahl der Erkrankungen mit Erwerbsunfähigkeit, die nach meinen Beobachtungen sich bei dem neuen Bestande schon im ersten Halbjahre der Kassenzugehörigkeit zeigt.

Freilich können noch andere Ursachen im Spiele sein, denn wie Bleicher zuerst in einer sehr wertvollen Untersuchung gezeigt hat, muß man auch bei den Ortskrankenkassen die Erkrankungswahrscheinlichkeit des neuhinzukommenden Bestandes als höher bewertet werden, als die des alten Bestandes, und bei diesem liegt doch gewiß ein solcher Einfluß nicht allgemein vor. Möglich allerdings, daß Frankfurt, das Bleicher untersucht hat, eine Ausnahme in diesem Sinn bildet. Sind doch die Einrichtungen für ärztliche Behandlung dort unzweifelhaft auf einem höheren Niveau, als das für den Durchschnitt der Herkunftsorte der Neueingetretenen gelten durfte und liegt doch darin überdies ein Anreiz auch für durchschnittlich morbide Mitglieder die Kasse möglichst bald in Anspruch zu nehmen. Überhaupt ist es recht auffallend, wie auch für Neue die Zahl der Erkrankungen, immer nahe der Mitgliederzahl liegt. Leider liegen Angaben darüber nicht vor, inwieweit die in erster Zeit zur Behandlung kommenden Krankheiten bereits vor der Aufnahme bestanden haben können.

Die festgestellte Tatsache, daß die Hilfskassen durch die Neueingetretenen stärker oder ebenso stark belastet werden, als durch den alten Bestand, scheint geeignet, die Anschauung zu widerlegen, daß die Hilfskassen den Ortskrankenkassen die besseren Risiken entziehen und dadurch auf die Morbidität der Zwangskrankenkassen einen schädigenden Einfluß üben. Zum mindestens kann dieses Argument, welches vielfach als ein Argument gegen die Berechtigung der Hilfskassen angeführt wird, nicht ohne neue statistische Begründung weiter ins Feld geführt werden[1]).

---

1) Die Berechtigung der Existenz der Hilfskassen beruht übrigens meiner Ansicht nach vor allem darauf, daß die Ansprüche der in diesen organisierten sozialen Schicht, (insbesondere der Handlungsgehülfen) an Krankheitsbehandlung andere sind, als die derjenigen Schicht, welche das Hauptkontingent in den Orts-

kann, daß man aber a posteriori infolge der Unvollkommenheit der menschlichen Voraussicht in den zweiten der geschilderten Fälle geraten kann. Übrigens wird man auch mit vollem Bewußtsein oft genötigt sein, ein unvollkommenes Material anzulegen, wenn nämlich die Anlage eines vollkommenen einen unverhältnismäßigen Arbeitsaufwand mit sich bringen würde.

Ein ganz ähnlicher Fall wie die genannten ist es nun auch, der die Veranlassung zu der folgenden Untersuchung gegeben hat. Die Lücke in der Uraufnahme war die gleiche, wie sie in der formalen Bevölkerungstheorie sich einstellt, es waren die Zeitintervalle der Beobachtung zu groß gewählt. Neben der rein interpolatorischen Ausfüllung derselben, ist es aber möglich gewesen hier zugleich die Fehlergrenzen zu bestimmen, was in den Problemen der formalen Bevölkerungstheorie bisher nicht gelungen ist. Der hierzu benutzte mathematische Satz ist eine Ungleichung für monoton wachsende[1]) Kurven, die übrigens mathematisch neu ist.

Die Veranlassung zu der Untersuchung gab ein für die Organisation und die Bilanzierung gewisser Krankenkassen bedeutsames Problem, das der Verfasser gelegentlich eines gerichtlichen Gutachtens als Nebenfrage erledigen mußte, nämlich die Frage:

> Bewirkt die sogenannte Selektion, d. h. die Zurückweisung der nach ärztlicher Untersuchung minder Gesunden von der Aufnahme in die Kasse wenigstens für die erste Zeit eine verminderte Erkrankungswahrscheinlichkeit?

Diese Frage ist bisher, ohne und auf Grund falscher statistischer Untersuchung, unbedenklich bejaht worden. Es ist das Hauptergebnis unserer Untersuchung, dass dieselbe sicher in dem von uns untersuchtem Falle, wahrscheinlich aber in den meisten anderen Fällen zu verneinen ist.

Die Bedeutung des Resultats erhellt aus folgendem:

Der gesetzlich vorgeschriebenen Versicherungspflicht kann einerseits genügt werden in den Ortskrankenkassen, welche niemand von der Aufnahme zurückweisen dürfen, andrerseits in gewissen Ersatzkassen, die größtenteils schon vor dem Erlaß des Gesetzes bestanden und unter dem Namen „Freie Hilfskassen“ besondere gesetzliche Regelungen teils empfangen haben, teils noch empfangen sollen. Das gemeinsame Kennzeichen derselben ist, daß sie freiwillige Gründungen sind, die daher auch in der Lage waren, ärztliche Auslese einzuführen. Durchweg gehören ihre

---

1) D. h. Kurven, wo die Ordinate mit wachsender Absisse, wächst oder konstant bleibt.

2. Indem wir uns jetzt der Beantwortung der gestellten Frage zuwenden, sei zunächst vorausgeschickt, daß bei den freiwilligen Hilfskassen im allgemeinen die Einrichtung getroffen ist, daß diejenigen Mitglieder, die der Kasse noch nicht sechs Monate angehören, geringeren (etwa den halben) Anspruch an die Leistung der Kasse haben. Wir wollen diese Mitglieder als die „Neuen" schlechtweg bezeichnen. Die statistische Aufgabe besteht in der Berechnung der Durchschnittszahl der „Neuen". Gegeben waren aber nur folgende Zahlen.

1) der Mitgliederbestand am Anfang (resp. Ende) jeden Jahres,

2) der durchschnittliche Mitgliederbestand während eines Jahres,

3) der Abgang der Mitglieder im Laufe eines Jahres.

Die durchschnittliche Mitgliederzahl ist theoretisch der Quotient der von den Mitgliedern durchlebten Tage durch die Zahl der Tage des Jahres. Approximativ wird diese Zahl zuweilen als Mittel der Mitgliederzahlen am Anfang der 12 Monate und am Ende des 12ten Monats bestimmt. Leider ist die Berechnungsart meist nicht angegeben. Die letztgenannte Art bestimmt das Mittel meist zu hoch.

Wenn wir in einen ebenem Diagramm die Abscissenaxe als Zeitaxe annehmen und die Anzahl der Kassenmitglieder in einem Zeitpunkt als Ordinate $y = f(x)$ annehmen, so entsteht ein streckenweis konstanter Linienzug, welcher die Frequenz der Kasse darstellt. Der Inhalt der durch die Kurve $y = f(x)$ und zwei Ordinaten $y_0 = f(x_0)$ und $y_1 = f(x_1)$ begrenzt ist, stellt die Zahl der Mitgliedertage von der Zeit x_0 bis x_1 dar. Zufolge der gemachten Annahmen sind also, wenn als Zeiteinheit das Jahr gewählt wird, die Werte $f(x)$ für alle ganzzahligen x bekannt und ferner die Integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ für ganzzahlige α und β.

Wir wollen zunächst annehmen, daß überhaupt keine Austritte erfolgen und werden die durch die Austritte bedingte Korrektur später hinzufügen. Dann behaupte ich, daß die Zahl der Mitgliedertage der Neuen im Zeitraum 1 bis 2 nichts anderes ist, als der Flächeninhalt, der begrenzt wird: von der Kurve $y = f(x)$ einerseits, von der aus dieser durch eine Rechts-

krankenkassen stellen. Ich zweifle daher auch nicht daran, daß viele Angehörige der Hilfskassen, wenn sie einer Ortskrankenkasse angehören würden, dieselbe im Erkrankungsfalle überhaupt nicht in Anspruch nehmen würden, wodurch sie im statistischen Sinne scheinbar als gute Risiken auftreten würden. Dieser Möglichkeit müßte bei etwaiger weiterer Bearbeitung der Frage Rechnung getragen werden.

verschiebung um $\frac{1}{2}$ entstehende Kurve $y = f(x-\frac{1}{2})$ andrerseits, und endlich von den beiden Ordinaten an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

In der Tat setzt sich dieses Flächenstück aus lauter Rechtecken zusammen, die einer Zerlegung des von beiden Treppenkurven begrenzten Flächenstückes in horizontale Streifen von der Länge $\frac{1}{2}$ entsprechen und die einzeln die von den jeweils Neueingetretenen als „Neue" durchlebte Zahl der Mitgliedertage repräsentieren.

Die gesuchte Größe hat aber den Ausdruck

$$N = \int_1^2 f(x)\,dx - \int_1^2 f(x-\tfrac{1}{2})\,dx$$

$$= \int_1^2 f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}} f(x)\,dx,$$

d. h.

1) $$N = \int_{1\frac{1}{2}}^2 f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx.$$

Gegeben sind die Werte

2) $$y_0 = f(0),\quad y_1 = f(1),\quad y_2 = f(2),\ \ldots$$

und

3) $$d_1 = \int_0^1 f(x)\,dx,\quad d_2 = \int_1^2 f(x)\,dx,\ \ldots$$

Ferner ist, da angenommen wird, daß Austritte nicht stattfinden, $f(x)$ monoton wachsend. Demzufolge ist $f(x)$ im Intervall $\frac{1}{2}$ bis 1 höchstens gleich y_1 und daher

4) $$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx \leqq \int_{\frac{1}{2}}^1 y_1\,dx = \frac{y_1}{2}.$$

Diese Grenze ist nutzlos, wenn

5) $$\frac{y_1}{2} \geqq d_1 - \frac{y_0}{2}$$

ist, denn dann ist die Ungleichung

6) $$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx \leqq d_1 - \mathrm{Min}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx\right) \leqq d\ - \frac{y_0}{2}$$

schärfer. Ebenso ist

7) $$\int_{1\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,dx \leqq \frac{y_2}{2} \text{ resp. } d_2 - \frac{y_1}{2}$$

Andrerseits ist der Wert des Integrals $\int_{1\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$ durch die Ungleichung

8) $$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx \geqq \frac{d_1}{2}$$

nach unten beschränkt. Denn gesetzt, es wäre

9) $$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx < \frac{d_1}{2},$$

so wäre jedenfalls für einen zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegenden Wert x' von x

10) $$f(x') < d_1$$

infolgedessen mit Rücksicht auf den vorausgesetzten monotenen Charakter von $f(x)$ wurde (10) auch für alle $x < x'$, also für $x < \frac{1}{2}$ gelten. Demzufolge wäre

11) $$\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx < \frac{d_1}{2}$$

Aus (9) und (11) folgt aber $\int_0^1 f(x)\,dx < d_1$ entgegen (3).

Entsprechend findet die Ungleichung

12) $$\int_{1\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,dx \geqq \frac{d_2}{2}$$

statt. Der Fall der Gleichheit in der Relation (8) würde erfordern, daß im ganzen Intervall $f(x) = d_1$ wäre, mit eventueller Ausnahme der Anfangsstelle und der Endstelle an denen plötzliche sprungweise Zuwüchse stattfinden könnten. Ebenso würde der Fall der Gleichheit in (4) dadurch realisiert werden, daß die Kurve in dem Halbintervall $\frac{1}{2}$ bis 1 konstant gleich y_1 wäre, was unter der Voraussetzung $\frac{y_1}{2} \leqq d_1 - \frac{y_0}{2}$ möglich ist Findet in der letzteren Relation die Gleichheit statt, so ist $f(x)$ von 0 bis $\frac{1}{2}$ gleich Null.

Unter Benutzung der abgeleiteten Ungleichungen (4), (7), (8), (11), erhalten wir aus 1) für das Maximum und Minimum von N

die Ausdrücke

13) a) $N_{max} = \frac{y_2}{2} - \frac{d_1}{2}$ für $\frac{y_2}{2} \leqq d_2 - \frac{y_1}{2}$,

und

b) $N_{max} = d_2 - \frac{d_1}{2} - \frac{y_1}{2}$ für $\frac{y_2}{2} \geqq d_2 - \frac{y_1}{2}$;

14) a) $N_{min} = \frac{d_2}{2} - \frac{y_1}{2}$ für $\frac{y_1}{2} < d_1 - \frac{y_0}{2}$,

b) $= \frac{d_2}{2} - d_1 + \frac{y_0}{2}$ für $\frac{y_1}{2} \geqq d_1 - \frac{y_0}{2}$.

Zugleich bemerkt man, daß jeder der Ausdrücke 13a) und 13b) und ebenso 14a) und 14b) als obere resp. untere Grenze von N gelten kann, gleichgiltig ob die Zusatzungleichungen erfüllt sind, oder nicht.

Nehmen wir ein numerisches Beispiel. Es war bei einer Krankenkasse (des Verbands der Deutschnationalen Handlungsgehilfen Hamburg) die Mitgliederzahl

Anfang 1903 $y_0 = 2719$,
" 1904 $y_1 = 9050$,
" 1905 $y_2 = 11501$.

Die Durchschnittszahlen waren

	unkorrigiert	korrigiert
1903—1904	$\bar{d}_1 = 3622$	$\frac{1}{12}(13\,\bar{d}_1 - y_1) = 3170 = d_1$
1904—1905	$\bar{d}_2 = 9902$	$\frac{1}{12}(13\,d_2 - y_2) = 9769 = d_2$

Hiernach ist

$$\frac{y_1}{2} = 4525 > 3170 - \frac{2719}{2} \text{ und } \frac{y_2}{2} = 575\bar{1} > 9769 - \frac{9050}{2}.$$

Infolgedessen ist 13b) und 14b) zu verwenden und wir erhalten für die Zahl der Neuen N des Jahres 1904

$$N_{max} = 3659 \quad \text{und} \quad N_{min} = 3074.$$

3. Diese Zahlen sind unter der Voraussetzung gebildet, daß keine Austritte stattgefunden haben. Nun finden also in Wirklichkeit stets solche statt und es pflegt die im Laufe eines Jahres ausgetretene Zahl der Mitglieder in den Geschäftsberichten angegeben zu werden. Die Austritte sind nur in ganz seltenen Fällen

so bedeutend, daß sie die Eintritte in einer Zeitspanne erheblich überschreiten. Die Kurve der Mitgliederzahl kann daher ohne Fehler als monoton wachsend auch unter Berücksichtigung der Austritte angesehen werden.

Übrigens wird durch stattgefundene Austritte die theoretische Zahl der Neuen nach oben geschoben, da ja die vorhinbestimmte Zahl der Neuen genau nur die Zahl des durchschnittlichen Zuwachses ist, der in jedem Moment gegen den vorhergehenden Moment stattfindet. D. h. in der vorigen Rechnung haben wir jedes austretende alte oder neue Mitglied durch ein im selben Augenblick eintretendes neues ersetzt und nur den verbleibenden Zuwachs als neu betrachtet. Es wirkt also die korrekte Betrachtung auf eine Vergrößerung der Zahl der Neuen. Daher ist das obige Minimum als untere Grenze stets brauchbar. Um nun eine brauchbare obere Grenze zu gewinnen können wir folgendermaßen verfahren.

Wir bezeichnen mit A die Zahl der im Laufe des Jahres ausgetretenen Mitglieder (mit A_1 und A_2 die auf das erste und zweite Jahr bezügliche Zahl). Die Austritte erfolgen in 4 Kategorien durch Tod, Austritt, Ausschluß und Abgang zum Militär. Die erste Zahl verteilt sich gleichmäßig über das Jahr, die zweite zeigte gegen das Jahresende regelmäßig ein starkes Ansteigen. Der Ausschluß bleibt innerhalb des Jahres selbst gleichmäßig, ist aber am Ende stärker, am Anfang geringer. Der Abgang zum Militär erfolgt bei Kassen, deren Mitglieder kaufmännische Angestellte sind, durchweg am 1. Okt. (mit geringen Ausnahmen). Im ganzen ist also der Abgang also eine im Laufe des Jahres ständig wachsende Größe. So betrug z. B. der Mitgliederabgang bei der Kasse des Verbandes Deutscher Handlungsgehilfen zu Leipzig nach Vierteljahren geordnet.

Tabelle I.

Vierteljahr	1904	1905	1906	1907	1908
I.	412	484	519	616	621
II.	525	630	653	702	854
III.	550	747	681	717	867
IV.	1260	1525	1533	1470	1657
Summe	2750	3386	3386	3505	3999

Wenn unter den Ausgeschiedenen selbst „Neue“ d. h. Mitglieder sind, die vor Ablauf der 6 Monate Mitgliedschaft wieder austreten, so ist der Zuwachs der Zahl der Neuen, da ein Verlust an Neuen stattfindet, geringer als die Zahl der Austritte. Indessen waren dies in den Jahren 1906 und 1908 nur 167 resp. 181 Personen, die sich überdies nahezu gleichmäßig über das ganze Jahr verteilten. Wir berücksichtigen diese Zahlen nicht für die Bestimmung, was nur einen kleinen Fehler verursacht, weil sie im allgemeinen nicht angegeben wird. Wenn sie berücksichtigt werden sollte, so ist die Hypothese, daß jede dieser Personen ein Vierteljahr der Kasse angehört habe, hinlänglich zutreffend. Es wären also 42 resp. 45 Personen von der Zahl der Neuen abzuziehen.

Leider geben die Kassen nicht an, wie lange die ausgetretenen Mitglieder noch durchschnittlich der Kasse im Laufe des Jahres angehört haben. Es wäre sehr erwünscht, daß dies künftig geschähe, oder was dasselbe wäre, daß der Durchschnitt der Neuzugangs angegeben würde. Dann könnte man sich leicht ein Bild davon machen, wie hoch die Zahl der Neuen zu bewerten wäre. Man hätte einfach, wenn B die genannte Zahl, ausgedrückt in Mitglied- und Jahreseinheit wäre, in der Differenz

$$D_A = A - B$$

zunächst die durchschnittliche Zahl des Zuwachses an Neuen, die die Kasse anstelle der alten Austretenden erhielt.

Man behandelt nun die Ausgetretenen resp. die ihnen entsprechenden Eingetretenen als eine monoton wachsende Gesamtheit, genau wie die Mitglieder der Gesamtheit selbst. Sie besitzt zu den Zeitpunkten 0, 1, 2, . . . die Werte

$$A_0, \quad A_0 + A_1, \quad A_0 + A_1 + A_2, \quad \ldots$$

und die durchschnittlichen mittleren Bestände

$$D_{A_0}, \quad A_0 + D_{A_1}, \quad A_0 + A_1 + D_{A_2}, \quad \ldots$$

Die Zahl der Neuen, welche diesem Bestande entsprechen, werden nach (13) und (14) in Grenzen eingeschlossen. Diese so gewonnenen Grenzen, müssen zu dem ohne Berücksichtigung der Austritte gewonnen zuaddiert werden. Wenn man statt der im vorstehenden gewählten Weise von vornherein den Zuwachs, d. h. die Summe von Frequenzsteigerung und Austritt behandelt und nach (13) und (14) in Grenzen einschließt, so entstehen weitere Grenzen. In der Tat wird im letzteren Falle nur von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß der Zuwachs monoton wächst, während

im ersteren Falle sowohl von der Frequenzkurve, als von der Austrittskurve der monotone Charakter vorausgesetzt wird.

Übrigens empfiehlt es sich die Formel (13) und (14) hier in folgender Form anzuwenden:

15)
$$N_{\max} = \frac{Y_1 + Y_2 - D_1}{2} - \left(\frac{Y_2}{2} - D_2\right)',$$
$$N_{\min} = \frac{D_2}{2} + \left(\frac{Y_1}{2} - D_1\right)',$$

wo der Akzent bedeuten soll, daß der Klammerausdruck nur dann von Null verschieden genommen werden soll, falls er positiv ist und wo

16)
$$y_0 = Y_0, \quad y_1 = Y_0 + Y_1, \quad y_2 = Y_0 + Y_1 + Y_2, \quad \ldots,$$
$$d_1 = Y_0 + D_1, \quad d_2 = Y_0 + Y_1 + D_2,$$

gesetzt ist.

Unter ganz besonderen Verhältnissen könnte Reaktivierung von Ausgetretenen stattfinden; dann wären andere Formeln anzuwenden, wir sehen von dieser Möglichkeit ab.

Die durchschnittliche Zahl der Ausgetretenen bei der Kasse des Verbandes Deutscher Handlungsgehülfen zu Leipzig, wird unter der Annahme, daß die im Laufe eines Monats Ausgetretenen durchschnittlich die Hälfte des Monats der Kasse angehört haben — eine Annahme, die nur für den Dezember zu Zweifeln Anlaß geben könnte — wird durch die folgende Tabelle für 5 Jahre gegeben.

	1904	1905	1906	1907	1908
D_A = Durchschnittsmittel des Abgangs	1036	1251	1286	1396	1571
A = Zahl d. Abgangs	2750	3386	3386	3505	3999
$\alpha = \frac{D_A}{A}$	0,37	0,37	0,38	0,398	0,39

Der Mittelwert von α ist 0,384 also annähernd $\frac{2}{5}$ und zeigt eine leidliche Konstanz. Indessen darf man den Wert nicht ohne weiteres auf andere Kassen übertragen. Er hängt von vielen Umständen z. B. von der Altersbesetzung der Klassen ab.

Hätte man keine weiteren Anhaltspunkte für den Wert

$$\alpha = \frac{D_A}{A}$$

so wird man versuchsweise Werte, wie $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ u. s. w. einsetzen, die zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ liegen. Als definitive Grenzen für die Zahl der Neuen erhält man

$$17)\qquad a)\quad N_{max} = \frac{Y_1 + Y_2 - D_1}{2} - \left(\frac{Y_1}{2} - D_2\right)' + \frac{A_1(1-\alpha) + A_2 . 2\alpha}{2}$$

$$b)\quad N_{min} = \frac{D_2}{2} + \left(\frac{Y_1}{2} - D_1\right)' + \frac{A_2\alpha + A_1(1-2\alpha)}{2}.$$

Der Mittelwert ist, wenn die gestrichenen Ausdrücke größer als Null sind

$$18)\qquad N_{mittel} = \frac{Y_1}{2} - \frac{3}{4}D_1 + \frac{3}{4}D_2 + A_1\frac{2-3\alpha}{4} + A_2\frac{3\alpha}{4}$$

Diesen Wert sowie die unter den 3 möglichen Modifikationen hervorgehenden habe ich schließlich als beste Hypothese für N benutzt. Ich bemerke noch, daß die rechte Seite von 17a), wenn $2A_2 > A_1$ ist, mit α wächst und daher für $\alpha = \frac{1}{2}$ mit Sicherheit eine obere Grenze bietet. Wenn überdies $2A_1 > A_2$ ist, so nimmt die rechte Seite von 17b) mit wachsenden α ab, sodaß $\alpha = \frac{1}{2}$ gesetzt die obigen Werte im genannten Falle nähere Grenzen bieten.

In dem unter 2 angeführten Beispiel habe ich $\alpha = \frac{1}{2}$ wegen Unkenntnis des wahren Wertes gesetzt und

$$N_{mittel} = 3819 \pm 745$$

erhalten, während der durch direkte Bestimmung gewonnene Wert

$$N = 3650$$

mit einer Unsicherheit von etwa ± 100 war. Die Unsicherheitsgrenze

$$\frac{N_{max} - N_{min}}{2} = 745$$

erscheint sehr bedeutend. In Wahrheit hat man dieselbe als geringer anzusehen. Denn es ist sehr unwahrscheinlich, daß der wahre Wert in der Nähe der äußersten Grenzen liegen wird. Freilich fehlt eine Methode hier Wahrscheinlichkeitsbestimmungen vorzunehmen, wenngleich sie sich dem Gefühl aufdrängen.

4. Man erhält ähnliche Resultate, wie die hier abgeleiteten, wenn man die Hypothese macht, daß die Frequenz der Kasse innerhalb eines Jahres in zwei Abschnitten gradlinig, erst bis zur Erreichung des Durchschnittes und von da bis zum Endstand ansteigt. Indessen gibt diese Berechnungsmethode keinen Anhalt für die Beurteilung des begangenen Fehlers. Auf diese letzere ist aber schon deswegen der größte Wert zu legen, weil es von großer Bedeutung sein kann zu wissen, in wieweit man mit Sicherheit den Einfluß oder Nichteinfluß der Zahl der Neuen auf irgend eine bestimmte bei der statistischen Gesamtheit konstatierte Erscheinung, z. B. die Vermögensansammlung der Kasse etc. konstatieren kann. Eine weitere Möglichkeit bestände, die angrenzenden Jahre zu benutzen, um eine parabolische Interpolation für die Frequenzkurve anzusetzen. Dieses Verfahren würde ich hier entschieden ablehnen, wenn es auch in andern Fällen von Nutzen sein könnte, und zwar deshalb, weil kein Anlaß vorliegt einen Zusammenhang benachbarter Werte anzunehmen, der im Sinne einer möglichst großen Annäherung an eine stetige Kurve wirkte. Es scheint ja eher das umgekehrte stattzufinden, nämlich daß auf große Zuwüchse, Stillstand oder Abnahme folgt. Der Hauptfehler dieser Formeln liegt aber darin, daß bei ihrer Anwendung der Zuwachs an Frequenz im Laufe des Jahres für das die Zahl der Neuen bestimmt werden soll auf den Wert der letzten Zahl einwirkt. Tatsächlich aber hat der regelmäßig am Schluß jedes Jahres sprungweise wiederkehrende Zuwachs an neuen Mitgliedern keinen Einfluß auf die Zahl der Neuen in diesem Jahr. Da die Formel aber in andern Fällen brauchbar sein könnte, so gebe ich sie hier an. Es wäre

$$N = (6D_2 - 2Y_2)\frac{1}{8} + (3Y_2 - 6D_2)\frac{1}{3.8}$$
$$- (6D_1 - 2Y_1)\frac{3}{8} + (3Y_1 - 6D_1)\frac{7}{3.8}$$

die Zahl der Neuen, wenn der Frequenzverlauf in jedem Jahr parabolisch interpoliert wird.

6. Die statistischen Ergebnisse der nach der beschriebenen Methode ausgeführten Untersuchung der Morbidität des Neuzugangs bei der Kasse des Verbandes Deutscher Handlungsgehilfen zu Leipzig sind in der folgenden Tabelle enthalten. Dieselbe gründet sich, wie die zur Berechnung der Zahl der Neuen dienenden Grundzahlen auf den „25jährigen Bericht der Kranken- und Begräbniskasse des Verbandes deutscher Handlungsgehülfen zu Leipzig“,

der unter dem Titel: Rückblick auf die Entwicklung des Hilfskassenwesens: 25 Jahre eingeschriebene Hilfskasse 1908 erschienen ist.

Morbidität während der ersten sechs Monate der Mitgliedschaft I.

Jahr	mittlere Zahl der Neuen nach Formel (18)	Krankenfälle				Krankentage mit Erwerbsunfähigkeit		Kassenleistungen	
		überhaupt		mit Erwerbsunfähigkeit					
		Anzahl	auf hundert Neue	Anzahl	auf hundert Neue	Anzahl	auf hundert Neue	Betrag	auf hundert Neue
96	1330	1146	86,5	350	26,3	5488	414	16423	1230
97	1417	1204	85,5	388	27,6	5535	391	17035	1212
98	1465	1239	84,5	379	25,8	5113	349	16267	1110
99	1515	1465	96,8	421	27,8	6118	465	18344	1210
00	1680	1578	93,8	540	32,1	7626	459	23036	1375
01	1418	1283	90	412	29	7346	516	21532	1520
02	1405	1097	78,2	325	23,2	5448	386	17621	1250
03	1695	1605	94,5	438	25,9	5552	327	22382	1320
04	5740	4964	86,5	1285	22,4	21553	375	72182	1260
05	3002	3165	105,5	853	28,4	15400	506	49763	1265
06	2976	2683	89,9	688	23,1	13783	462	44815	1510
07	3198	3082	94,2	806	25,3	14815	462	52628	1648
08	3079	3073	100	863	28	16521	538	54152	1800

Die weitaus wesentlichsten Angaben sind die über die Zahl der Krankenfälle mit Erwerbsunfähigkeit und die Kassenleistungen. Denn die Zahl der Krankentage ist durch den Umstand gefälscht, daß die Erkrankungen zum Teil erst in der Beobachtungszeit selbst beginnen können. Wollte man daher die Morbidität der Neuen mit der der alten Mitglieder vergleichen, so würde es richtiger sein, diesen Vergleich nur für die Krankenfälle zu führen und dabei insbesondere in Bezug auf die für die Kassenbelastung wesentlichsten, die mit Erwerbsunfähigkeit.

Es betrug nun die Zahl der Krankenfälle mit Erwerbsunfähigkeit in den Jahren 96—08 auf 100 Mitglieder der Kasse überhaupt

26,0 25,5 22,7 25,0 25,6 26,1 23,4 24,0 25,0 25,3 22,9 24,5 26,1.

Ein Vergleich dieser Zahlen mit denen der Tabelle wurde eine

höhere Morbidität der Neuen zeigen. Um nun über die Zuverlässigkeit des Vergleichs unter Benutzung der Fehlergrenzen urteilen zu können, wollen wir einerseits die Minimalzahl der genannten Krankenfälle die sich nach der Formel (17) ergibt, aufstellen, andrerseits wahrscheinliche Grenzen zu bestimmen, daß wir den dritten Teil des gesammten Fehlerintervalls für die Neuen abgrenzen und die entsprechenden Zahlen der Neuen als Grenzen nehmen, zwischen denen mit großer Wahrscheinlichkeit die wahre Zahl vermutet werden kann.

Wir erhalten folgende Tabelle

Morbidität im ersten Halbjahr der Mitgliedschaft II

Jahr	Maximale Zahl der Neuen	Minimale Zahl der Krankenfälle mit Erwerbsunfähigkeit auf 100 Neue	Wahrscheinliche ob. Grenze der Zahl der Neuen = mittlere Zahl + $\frac{1}{3}$ Fehler	Wahrscheinliche unt. Grenze d. Krankenfälle mit Erwerbsunfähigkeit a. 100 Neue	Wahrscheinliche unt. Grenze der Zahl der Neuen = mittlere Zahl — $\frac{1}{3}$ Fehler	Wahrscheinliche ob. Grenze d. Krankenfälle mit Erwerbsunfahigkeit a. 100 Neue	Zahl der Krankenfälle mit Erwerbsunfähigk. auf 100 Kassenmitglied. überhaupt
96	1864	18,8	1508	22,1	1152	30,5	26,0
97	1984	19,6	1606	24,5	1228	32,6	25,5
98	2029	18,7	1653	25,5	1277	29,6	22,7
99	2124	19,7	1759	24	1311	28,8	25,0
00	2305	23,4	1888	28,5	1472	27,6	25,6
01	1982	20,8	1606	25,7	1230	33,5	26,1
02	1883	17,6	1664	19,7	1246	26,1	23,4
03	2354	18,6	1912	23	1478	29,7	24,0
04	6814	18,8	6098	21,1	5382	24,9	25,0
05	4259	20	3421	25	2583	33,1	25,3
06	4245	16,2	3399	17,3	2553	26,8	22,9
07	4611	17,5	3671	22	2725	29,4	24,5
08	4385	19,7	3516	24,6	2642	32,8	26,1

Die Betrachtung der zweiten Kolonne zeigt beweisend, daß die bisherige Annahme, daß die Morbidität der Neuen wesentlich geringer, als die der Alten ist, sicher falsch ist. Die Betrachtung der wahrscheinlichen Grenzen zeigt, daß es die Annahme daß dieselbe ebenso groß oder größer, als die der Alten ist, eine große Wahrscheinlichkeit besitzt.

Ähnlicher ergibt sich auch für die Berechnung der Unkosten, wobei berücksichtigt werden muß, daß die Kassenmitglieder im

ersten Halbjahr geringere Anrechte haben. Man wird wohl annehmen dürfen, daß das zweite Halbjahr der Mitgliedschaft dieselbe Erkrankungsziffer für Erwerbsunfähig Erkrankte zeigt. Dann aber stellt sich schon im ersten Jahr der Mitgliedschaft auch nahezu die normale Zahl der Krankentage mit Erwerbsunfähigkeit ein. Es liegt doch an sich kein Grund vor anzunehmen, daß diese Krankheiten bei Neuen kürzere Zeit dauern, als bei Alten, was man annehmen müßte, wenn man die geringere Zahl der Krankentage nicht in der hier geschilderten Weise erklären wollte

Die Verwaltung der Kasse hat nun durch das Ergebnis meiner Feststellung angeregt eine genaue Untersuchung der Morbidität der Neuen anstellen lassen. Die recht mühsame Arbeit bestand darin jeden im Jahre 1906 Aufgenommenen ein Jahr lang zu verfolgen. Das Ergebnis der mir freundlichst zur Verfügung gestellten Ermittlungen war das folgende

	Im ersten Jahre der Mitgliedschaft auf 100 Mitglieder	Im Durchschnitt 1906/1907 auf 100 Mitglieder
Zahl der Krankmeldungen	106,5	99,9
Zahl der Krankmeldungen mit Erwerbsunf.	28,2	23,7
Krankentage mit Erwerbsunfähigkeit	562,7	557,9
Kassenleistungen	2119	2524,04.

Da die Berechnung für das ganze erste Jahr der Mitgliedschaft geführt ist, so ist ein unmittelbarer Vergleich mit meinen Zahlen nicht möglich. Aber im ganzen stimmt das Ergebnis überein, es scheint allerdings, als ob die Neuen besonders das zweite Halbjahr der Mitgliedschaft an Erkrankungen bevorzugen. Freilich ist die immer berechnete Zahl der Neuen keineswegs zuverlässig genug, um weitergehende Schlüsse zu ziehen. Man wird zufrieden sein dürfen, daß sie ausreicht, um die früher fälschlich gehegte Meinung von der geringeren Morbidität der Neuen zu zerstören und durch eine den Verhältnissen mehr entsprechende annähernd zu ersetzen.

Über das Zustandsdiagramm des Wassers.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. Dezember 1912.

Die Thermodynamik [1]) läßt eine Klassifikation der polymorphen Formen nach der gegenseitigen Lage ihrer Flächen des thermodynamischen Potentials, der ζ-Funktion, zu. Diejenigen Formen, deren ζ-Flächen sich nicht schneiden, gehören derselben Gruppe an. Diese Klassifikation setzt im Gegensatz zur älteren Theorie des Polymorphismus (Roozeboom) eine gewisse Verwandtschaft der ζ-Flächen der Formen einer Gruppe voraus, die sich darin äußert, daß sich diese ζ-Flächen untereinander nicht schneiden, während den Formen verschiedener Gruppen dieses Kennzeichen näherer Verwandtschaft fehlt.

Die Annahme einer solchen Verwandtschaft der ζ-Flächen der Formen einer Gruppe kann nur durch die Erfahrung erwiesen werden. Die Mittel, die uns hierzu geboten werden, sind folgende.

1. Der Nachweis, daß sich von zwei Formen einer Gruppe die eine instabilere im ganzen Zustandsfelde der stabileren Form in Berührung mit der stabileren in diese umwandelt. Damit wäre der Nachweis geliefert, daß die ζ-Fläche der instabileren Form über dem ganzen Zustandsfelde der stabileren oberhalb der ζ-Fläche dieser Form liegt, daß also ein Sichschneiden bei der ζ-Flächen nicht eintritt.

2. Würde die Tatsache, daß die Gleichgewichtskurven der instabileren Form mit stabilen Phasen, deren Zustandsfelder das Zustandsfeld der stabileren Form begrenzen, in das Zustandsfeld der stabileren Form fallen, beweisen, daß die instabilere Form wirklich im ganzen Zustandsfelde der stabileren instabiler ist als diese

1) Zur Thermodynamik der Gleichgewichte in Einstoffsystemen. Göttinger Nachrichten, 1911, S. 325.

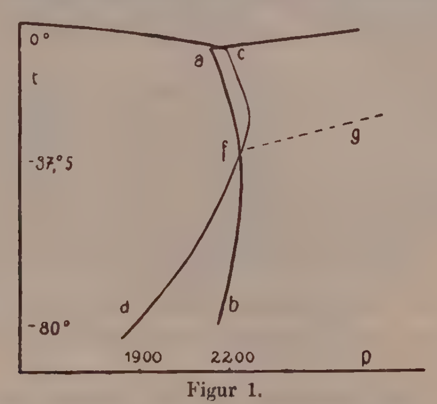
3. Da die Gleichgewichtskurven zweier instabiler Formen die Gleichgewichtskurve zweier stabilerer schneiden können, ohne daß der Schnittpunkt die Eigenschaften eines Tripelpunktes hat, so wäre, wenn man vor dieser Tatsache stände, der Schluß zu ziehen, daß an beiden Gleichgewichten sich je zwei verschiede Formen beteiligen, und daß zwei von diesen vier Formen stabiler und zwei instabiler sein müssen.

Es ist also das Sichschneiden zweier Gleichgewichtskurven ohne Bildung eines Tripelpunktes das Kriterium für die Existenz von vier Formen, für welche nach den Methoden 1 oder 2 die Frage nach der Stabilitätsbeziehung zu entscheiden wäre.

In dieser Weise könnte die Annahme einer näheren Verwandtschaft der ζ-Flächen verschiedener Formen experimentell geprüft worden.

Bei der Ausarbeitung des Zustandsdiagrammes des Wassers bin ich früher[1]) auf zwei Gleichgewichtskurven gestoßen, deren Schnittpunkt aber merkwürdiger Weise die Eigenschaften eines Tripelpunktes nicht zeigte.

Erhöht man den Druck auf gewöhnlichem Eise bei Temperaturen über -30^0 auf 2400—2800 kg, so tritt unter starker Volumenverkleinerung die Bildung einer dichteren Eisart ein. Wandelt man durch weitere Volumenverkleinerung die ganze Menge oder einen größeren Teil des gewöhnlichen Eises in das



Figur 1.

dichtere Eis um, so gelangt nach einer stärkeren Volumenvergrößerung der Druck auf die Gleichgewichtskurve *ab*, Fig. 1, und

1) Kristallisieren und Schmelzen, 1903, S. 330 u. Ann. d. Physik, Bd. 2, S. 1, 1900.

bewegt sich bei der Abkühlung oder Erwärmung auf der Curve *ab*. Da die Erwärmung besonders langsam und gleichmäßig ausgeführt werden kann, so wurden die Koordinaten dieser Gleichgewichtskurve während der Erwärmung des bei verschiedenen Versuchen aus recht verschiedenen Mengen der beiden Eisarten, deren Gesamtmenge 100 g betrug, bei fast konstantem Volumen vorgenommen. Bei vier verschiedenen Versuchen differierten die Drucke bei derselben Temperatur um nicht mehr als 10 kg.

Erhöht man aber den Druck auf gewöhnlichem Eise bei Temperaturen zwischen -70^0 bis -80^0 bis 2600—2800 kg, so fällt der Druck nicht auf die Gleichgewichtskurve, *ab*, sondern auf die Gleichgewichtskurve, *cd*, und bei der Erwärmung bewegt er sich auf der Gleichgewichtskurve, *cd*.

Die beiden Gleichgewichtskurven schneiden sich bei $-37^0.5$. Bei Temperaturen unter -40^0 ist die Differenz der Drucke bei derselben Temperatur recht erheblich, bei Temperaturen über -40^0 wird dieselbe allerdings recht klein, übersteigt aber meiner Ansicht nach die möglichen Fehler. (Tab. 1.)

Tabelle I.

Gleichgewichtsdrucke auf den Kurven *ab* und *cd*.

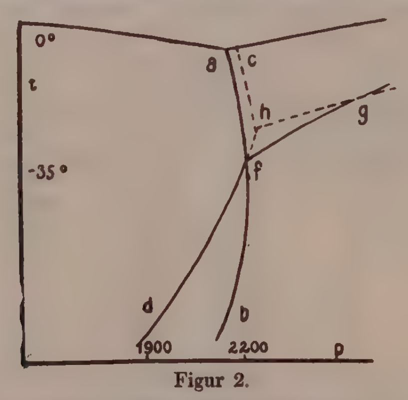
	ab	*cd*	$\varDelta$
-70^0	2220	2000	220
-50	2250	2125	125
-40	2255	2223	32
-37.5	2245	2245	0
-32.0	2231	2252	-21
-22.0	2200	2224	-24.

Den Schnittpunkt der beiden Kurven *ab* und *cd* hat Roozeboom[1]) als einen Tripelpunkt angesprochen und eine weitere Gleichgewichtskurve *fg* gefordert, die in den Schnittpunkt *f* von *ab* und *cd* treffen sollte. Roozeboom hat aber übersehen, daß wenn diese Auffassung zulässig wäre, bei der Erwärmung der beiden Systeme *p* und *t* zuerst das Kurvenstück *bf* und dann das Stück *fc* oder zuerst das Stück *df* und dann das Stück *fa* durchlaufen müßten, weil, wenn der Punkt *f* ein Tripelpunkt wäre, in diesem Punkt eine der Phasen sich umwandeln müßte. Außerdem müßte, wenn der Punkt *f* wirklich ein Tripelpunkt wäre, während der Erwärmung bei fast konstantem Volumen der Druck eine Zeit lang sich

1) Die heterogenen Gleichgewichte I, S. 200 u. 204, 1901.

konstant erhalten, nämlich während der Umwandlung, die in diesem Punkt unter Wärmeabsorption vor sich gehen sollte. Während dieser Wärmeabsorption eilt die gemessene Badtemperatur der Temperatur an der Umwandlungsgrenze voraus, in folge dessen müßte man auf der *pt*-Kurve ein Stück konstanten Druckes, welches dem Tripelpunkt entspricht, finden. Da auch dieses Kennzeichen dem Punkte *f* fehlt, so darf man wohl mit Sicherheit behaupten, daß *f* nicht die Eigenschaften eines Tripelpunktes besitzt.

Vor Kurzem ist J. W. Bridgman[1]) in einer ausgezeichneten Arbeit unter anderem auch auf diese Frage gekommen. Er hat eine Umwandlungskurve gefunden, welche nahezu den Verlauf von *fg* hat, und glaubt, daß diese in den Schnittpunkt *f* trifft. Indem er ferner die Existenz der Kurvenstücke *fc* Fig. 1 in Abrede stellt, und die Erfahrung betont, daß die Umwandlung auf seiner neuen Gleichgewichtskurve nur bei Temperaturerhöhung, nicht aber bei Temperaturerniedrigung eintritt, gelangt Bridgman zu einer möglichen Lösung des Rätsels. In Fig. 2 geben die voll ausgezogenen



Figur 2.

Kurven den betreffenden Teil des Diagramms in der Auffassung von Bridgman wieder.

Die Existenz der von Bridgman gefundenen neuen Gleichgewichtskurve kann ich bestätigen. Daß ich dieselbe früher nicht gefunden hatte, ist darauf zurückzuführen, daß ich bei konstanter Temperatur den Druck erhöht hatte, dabei auch die Umwandlungskurve bei steigendem und fallendem Druck überschritten hatte, die Umwandlung aber nicht eingetreten war, was auch Bridgmans Angaben bestätigen. Hätte ich damals das aus dem gewöhnlichen Eise bei -80^0 durch Druckerhöhung gebildete Eis bei fast konstantem Volumen unter

1) Zeitschrift f. anorganische Chemie, Bd. 77, S. 377, 1912.

dem Ausgangsdruck von mindestens 2300 kg erwärmt, so wäre die Existenz der von Bridgman gefundenen neuen Gleichgewichtskurve *fg* nicht verborgen geblieben. Das Auffinden der neuen Gleichgewichtskurve löst aber meiner Auffassung nach das Rätsel nicht, denn man darf die Erfahrungen auch etwas anders gruppieren, als es Bridgman getan hat.

1. Der Unterschied der von mir bei sehr langsamer Erwärmung (8 Stunden von -80^0 bis -20^0) bei fast konstantem Volumen von 100 g Wasser verfolgten Gleichgewichtskurven *ab* und *cd*, Fig. 1, stellte sich oberhalb ihres Schnittpunktes *f* immer wieder heraus. Wenn dieser Unterschied auch nur 20—30 kg beträgt, so hat man doch allen Grund, ihn als wirklich bestehend zu betrachten, da er ums zehnfache die Empfindlichkeit des Manometers übertrifft, und in drei Paaren abwechselnd ausgeführten Versuchen immer wieder auftrat. Ich kann also P. W. Bridgman, der diesen Unterschied für zu gering erklärt, als daß man denselben als sicher erwiesen betrachten darf, nicht zustimmen.

2. Die Umwandlungskurve *fg* Bridgmans, Fig. 2, krümmt sich nach Bridgmans Angaben auffallend stark, stärker als die Schmelzkurve, 0 III, was nicht zu erwarten ist. Man kann sich also der Annahme, daß die beiden Punkte Bridgmans der Kurve *fg* bei kleineren Drucken bei etwas zu tiefen Temperaturen liegen, kaum erwehren. Es wäre also sehr wohl möglich, daß die Kurve *fg* garnicht, wie Bridgman annimmt, in den Schnittpunkt, *f*, der beiden Kurven *ab* und *dc* trifft, sondern in einen etwas höher gelegenen Punkt *h*, Fig. 2. Verlegt man bei kleineren Drucken bis 2500 kg die beiden Punkte Bridgmans der neuen Umwandlungskurve *fg* zu etwas höheren Temperaturen, so trifft dieselbe nicht in den Punkt *f*, sondern in den Punkt *h*, Fig. 2. Auf der Kurve *dfhc* müßte dann bei *h* ein Knick entstehen, auf dessen Existenz auch meine früheren Messungen hinweisen.

Welche der beiden dargelegten Deutungen der Beobachtungen zutrifft, kann nur durch eine neue, auf diesen Punkt gerichtete Untersuchung entschieden werden.

Vergleich der Koordinaten der von Bridgman 1911 und der von mir 1900 bestimmten Gleichgewichtskurven.

In folgenden Tabellen sind für die von Bridgman angegebenen Gleichgewichtsdrucke die aus meinen früheren[1]) Bestimmungen interpolierten Gleichgewichtsdrucke angegeben.

1) l. c. Ann. der Physik II, S. 1, 1900.

Schmelzkurve des Eises I.

t^0	p in kg Bridgman	alte Bestimmung	Δ	neuere Bestimmung [1])
0.0	1	1	0	1
– 5.0	610	600	– 10	600
– 10.0	1130	1140	+ 10	1120
– 15.0	1590	1620	+ 30	1560
– 20.0	1970	2040	+ 70	1950
– 22.0	2115	2175	+ 60	—

Schmelzkurve des Eises III.

	Bridgman	alte Bestimmung	Δ
– 22.0	2115	2210	+ 95
– 20.0	2510	2600	+ 90
– 18.5	2910	3020	+ 110
– 17.0	3530	3420	– 110

Gleichgewichtskurve I—III.

	Bridgman	alte Bestimmung	Δ
– 30.0	2156	2220	+ 64
– 40.0	2178	2258	+ 80
– 50.0	2160	2250	+ 90
– 60.0	2117	2240	+ 123

Gleichgewichtskurve I—II.

	Bridgman	alte Bestimmung	Δ
– 35.0	2164	2260	+ 96
– 45.0	2072	2170	+ 98
– 55.0	1980	2100	+ 120
– 65.0	1886	2030	+ 144
– 75.0	1794	1940	+ 146

Da von drei Gleichgewichtskurven zwischen 2100 und 2200 Punkte beider Beobachter vorliegen, so läßt sich die Frage entscheiden, ob das Manometer Bridgmans und das Manometer 1900 in ihren Angaben sich unterscheiden. Man ersieht, daß die Differenzen der Angaben von Bridgman und meine alten Angaben auf den drei Gleichgewichtskurven in der Nähe des Tripelpunktes fast dieselben sind. Die Differenz beträgt nämlich auf der Schmelzkurve des Eises I 60 kg und auf der Gleichgewichtskurve I—III 64 kg, also im Mittel 62 kg. Auf der Schmelzkurve III ist diese Differenz, entsprechend dem großen Einfluß der Temperatur auf

1) Zeitschr. f. phys. Chemie 72, S. 609, 1911.

den Gleichgewichtsdruck etwas größer, nämlich 95 kg. Der Unterschied von 33 kg würde einer Temperaturdifferenz von 0.16° entsprechen. Die Bestimmungen sind also in der Nähe des Tripelpunktes von beiden Beobachtern mit sehr befriedigender Übereinstimmung ausgeführt worden, nur zeigte das Manometer 1900 einen um etwa 62 kg höheren Druck als das Manometer Bridgmans an.

Auf der Schmelzkurve des Eises I nehmen die Differenzen mit abnehmendem Druck, wie zu erwarten war, ab. Auf der Schmelzkurve des Eises III ist der Einfluß des Druckes auf die Gleichgewichtstemperatur besonders klein, die abnorme Abweichung der beiden Kurven bei 3500 kg könnte also hier zum Teil auch durch eine geringe Verschiedenheit in den Fehlern der Temperaturbestimmung beider Beobachter bedingt sein.

Bei tieferen Temperaturen werden die Differenzen zwischen den Angaben der Koordinaten der beiden Umwandlungskurven merklich größer. Hier kann natürlich der Grund der Abweichung nicht auf die Differenz in den Angaben beider Manometer zurückgeführt werden, derselbe ist folgender. Meine neuen Bestimmungen dieser Gleichgewichtsdrucke mit Mengen von 10 g Wasser lehrten, daß die Einstellungen des Gleichgewichtsdruckes nach Volumenänderungen bei konstanter Temperatur sehr viel größere Grenzen des Gleichgewichtsdruckes ergaben als meine früheren mit der zehnfachen Eismenge ausgeführten. Die Gleichgewichtsdrucke können also mit kleineren Eismengen bei tieferen Temperaturen viel weniger genau ausgeführt werden als mit größeren Eismengen. Diese Tatsache ist auch verständlich, wenn man bedenkt, daß mit abnehmender Menge die Berührungsfläche der beiden Eisarten bei gleicher Verteilung der Masse auf beide Phasen abnimmt. Da die Geschwindigkeit, mit welcher der Druck nach einer Volumenänderung dem Gleichgewichtsdruck zustrebt, der Berührungsfläche proportional ist, so wird mit abnehmender Masse auch die Geschwindigkeit der Gleichgewichtseinstellung abnehmen. Die Gleichgewichtseinstellung wird sich um so mehr verschlechtern, je größer die Volumenänderung bei der Umwandlung ist (größere Volumenänderung wirkt hinreichender Berührung der beiden Phasen entgegen), und je tiefer man in das Temperaturgebiet, in dem die Umwandlungsgeschwindigkeit mit der Temperatur abnimmt, gelangt. Aus diesen Gründen dürfte wohl meinen alten Bestimmungen gegenüber den von Bridgman bei tieferen Temperaturen der Vorzug zu geben sein, und die durch jene festgelegte Form der Kurven dürfte richtiger als die von Bridgman und die neu bestimmte Form

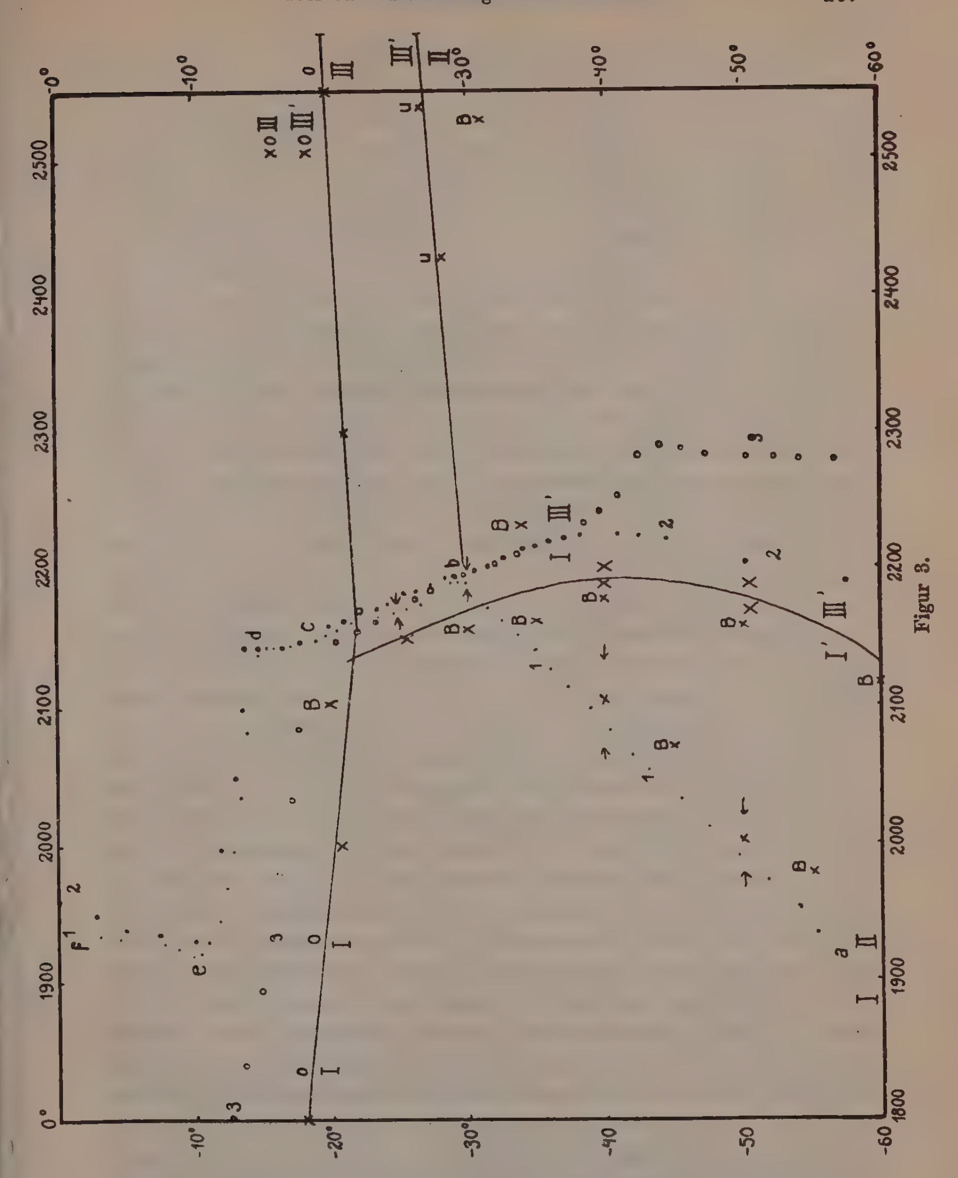
der Kurven sein. An den alten Bestimmungen müßte natürlich eine konstante, bisher aber nicht genügend bekannte Druckkorrektion angebracht werden.

Die Lage der Gleichgewichtskurven I—II und I—III'[1]).

1. Zur Herstellung von Eis II wurde auf 10 g gewöhnlichem Eise, das sich in einer Hülse aus dünnem Kupferblech befand, und von einer Mischung aus 55 Volumprozenten Toluol, 30 Volumprozenten Schwefelkohlenstoff und 15 Volumprozenten Pentan umgeben war, der Druck bei -62^0 auf 2500 kg erhöht. Bei diesem Druck begann die Umwandlung des gewöhnlichen Eises in das Eis II. Nach vollständiger Umwandlung des gewöhnlichen Eises durch Volumenverkleinerung und nachträglicher Drucksteigerung auf 3000 kg zur Umwandlung von eventuellen Resten des gewöhnlichen Eises wurde $^1/_3$ der Eismenge in das gewöhnliche Eis zurückverwandelt, und dann bei fast konstantem Volumen während langsamer Erwärmung die Badtemperatur und der Druck nach je drei Minuten beobachtet. Die betreffenden Punkte bilden die Linie 1, *abcdef*, Fig. 3. Auf der Linie *ab* sind die Eisarten I und II mit einander im Gleichgewicht, während der Temperatur- und Drucksteigerung nimmt die Menge des Eises I langsam ab. Im Punkte *b* erhält sich der Druck vier Minuten fast konstant, was als Zeichen betrachtet werden darf, daß hier ein Tripelpunkt durchschnitten wird. Dann beginnt der Druck bei steigender Temperatur an zu fallen, ein Zeichen, daß die Form II durch eine neue Form, das Eis III', ersetzt worden ist. Das System ist nun offenbar auf eine neue Gleichgewichtskurve gelangt. Zwischen *c* und *d* wird offenbar ein zweiter Tripelpunkt durchschritten, da hier der Druck sich fast 20 Minuten lang konstant erhält. Hier verschwindet das Eis III'. Dann beginnt auf *de* die Schmelzung von Eis I, welche in *e* beendigt ist, worauf schließlich bei weiterer Erwärmung der Druck langsam ansteigt, *ef*.

Daß die Linien *ab* und *bc*, Fig. 3, wirklich mit den Gleichgewichtskurven sehr nahe übereinstimmen, konnte in folgender Weise gezeigt werden. Es wurde zum zweiten Mal das Eis II bei -60^0 aus dem Eis I dargestellt, wobei nur die halbe Menge des Eises I, 5 g, in das Eis II umgewandelt wurde, und darauf wurden bei folgenden konstant erhaltenen Temperaturen die Grenzen,

1) Im folgenden wird die früher von mir als III bezeichnete Form als III' bezeichnet werden, weil sich herausgestellt hat, daß noch eine stabilere Form der Gruppe III als die alte Form III existiert.



Figur 3.

zwischen denen der Gleichgewichtsdruck liegen muß, festgestellt, indem die Enddrucke, welche sich fünf Minuten nach einer Volumenverkleinerung resp. Volumenvergrößerung von 0.3 cbcm eingestellt hatten, beobachtet wurden.

Tabelle 1.

Temperatur	Enddrucke nach Vol.vergrößerung	Enddrucke nach Vol.verkleinerung	Gleichgewichtsdruck
– 50°.1	1980	2024	2002 (44)
– 40.0	2070	2135	2112 (65)
– 30.1	2200	2190	2195 (10)
– 25.0	2165	2172	2168 (5)

Die Differenzen der Enddrucke sind etwas größer als bei den alten Versuchen von 1900, bei denen die Eismenge 100 g betrug. In Fig. 3 entsprechen die Spitzen der Pfeile den Enddrucken, die zwischen ihnen liegenden Kreuze den Gleichgewichtsdrucken. Man ersieht, daß das Stück der *pt*-Linie *ab* um 1°.2 höher liegt als der entsprechende Gleichgewichtsdruck, weil um diesen Betrag die Badtemperatur der im Innern des Eises voraneilt.

2. Man kann die Verlängerung von *cb* zu tieferen Temperaturen hin verfolgen.

Es lassen sich nämlich Systeme, bestehend aus I und III′ auch im Zustandsfelde von II herstellen, denn I verträgt bei Abwesenheit von II bedeutend höhere Drucke als sie der Gleichgewichtskurve I—II entsprechen, und III′ ist auch bei Temperaturen unterhalb der Gleichgewichtslinie II—III′ recht beständig.

Kühlt man auf 3000 kg komprimiertes Wasser bis – 30° oder – 35° ab, so kristallisiert in der Regel das Eis III′, welches sich in der Regel bis auf – 70° abkühlen läßt ohne in das unter diesen Bedingungen stabilere Eis II überzugehen. Erniedrigt man darauf bei – 70° den Druck, so tritt von 2000 kg Ansteigen desselben ein. Nachdem der Druck ziemlich schnell auf 2190 gestiegen war, wurde bei fast konstantem Volumen das System, welches wie wir sehen werden, aus I und III′ besteht, langsam erwärmt. Die von drei zu drei Minuten beobachteten Temperaturen und Drucke sind in Fig. 3 durch starke Punkte, Kurve 2, bezeichnet. Man ersieht, daß die Kurve 2 mit dem Stück *bc* der Linie 1 von – 30° bis – 20° bis auf 10—5 kg zusammenfällt, und daß der Druck auf dem Stück *de*, welches dem Tripelpunkt entspricht, 2145 kg beträgt, sich also vom entsprechenden Druck auf der Kurve 1 nicht unterscheidet. Eine Unveränderlichkeit des Druckes im Punkte *b*, wie sie auf der Linie 1 auftritt, ist in diesem Fall nicht zu erwarten, da bei Durchschreitung des Tripelpunktes in diesem Falle, weil das System schon aus I—III′ besteht, eine Umwandlung von II in III′ nicht eintreten kann. Man ersieht auch, daß die Punkte

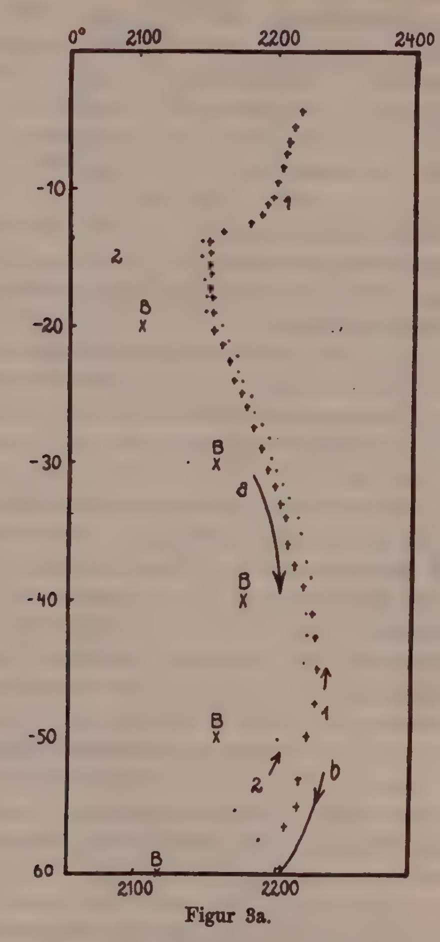
der Kurve 2 ohne jede Unregelmäßigkeit durch den Punkt *b* gehn.

3. Auf die Verlängerung von *cb* gelangte das System auch bei einem zweiten Versuch, bei dem die Hülse gesprengt war, und infolgedessen das Eis I nicht allseitig von einer Flüssigkeit, sondern von den starren Stahlwänden des druckfesten Gefäßes umgeben war. Bei -28^0 wurde das Eis I vollständig in das dichtere Eis umgewandelt und dasselbe auf -70^0 abgekühlt. Darauf wurde das dichtere Eis zum größten Teil in das Eis I umgewandelt. Nach dieser Umwandlung konnte der vom Manometer angegebene Druck über den Gleichgewichtsdruck I—III gesteigert werden, weil sich in der Eismasse ein Druckgefälle hergestellt hatte. Als nun bei der Erwärmung das Eis III′, welches das Eis I nach der druckübertragenden Flüssigkeit hin bedeckte, weicher wurde, glich sich das Druckgefälle im Eise III′ aus, so daß der hydrostatische Druck mit dem Gleichgewichtsdruck übereinstimmte. Die Punkte der Linie 3 (Fig. 3 Kreise) beginnen von -44^0 zur Kurve 2 zu gehen und fallen von -38^0 auf die Kurve 2. Auch in diesem Falle wird der Druck im Tripelpunkt *b* natürlich nicht unveränderlich. Das Sinken des Druckes infolge des Schmelzens beginnt bei diesem Versuch bei einer tieferen Temperatur und ist viel bedeutender als bei den Versuchen 1 und 2, weil bei diesem Versuch das Mengenverhältnis I : III′ sehr viel größer war als bei jenen.

Der Umstand, daß die Linie 3 in die Linie 2 Fig. 3 läuft und beide in den Tripelpunkt *b* treffen, macht es sehr wahrscheinlich, daß die Linie 2 der instabile Teil der Gleichgewichtskurve I—III′ ist. Um das zu beweisen, mußte man von dem Gleichgewicht I—III′ ausgehen, und zeigen, daß bei relativ langsamer Kühlung *p* und *t* sich in der Weise ändern, wie es die Kurve 2 angibt, und daß schließlich beim Erwärmen des Systems eine Gleichgewichtskurve durchlaufen wird, die mit der Kurve 2 Fig. 3 identisch ist.

Zu diesem Zweck wurde bei -25^0 ein kleiner Teil des Eises I in III′ durch Druckerhöhung auf 2400 kg umgewandelt und dann langsam abgekühlt, hierbei stieg der Druck auf der Linie *a* Fig. 3a. Bei Temperaturen unter -50^0 fiel dann der Druck auf der Linie 2 Fig. 3a. Die Druckänderungen entsprechen also ihrem Vorzeichen nach der Kurve 2 Fig. 3. Nachdem bis -60^0 abgekühlt war, wurde wieder langsam erwärmt. Hierbei bewegten sich *p* und *t* auf der durch liegende Kreuze, die den Ablesungen nach je drei Minuten entsprechen, bezeichneten Linie 1. Zum Vergleich sind in Fig. 3a die Punkte der Linie 2 Fig. 3, Kurve 2 Fig. 3a, eingetragen. Die geringen Abweichungen sind darauf zurückzuführen, daß bei Ver-

such, Linie 2, das Bad kleiner war als beim Versuch, Linie 1, infolge dessen stieg auch beim Versuch, Linie 2, die Badtemperatur bei



Figur 3a.

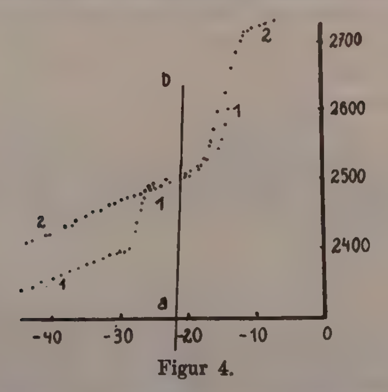
tieferen Temperaturen viel schneller an als beim Versuch, Linie 1, und die Badtemperatur war bei diesem Versuch der Temperatur im Eise weniger vorausgeeilt als beim Versuch 1. Die Folge hiervon ist ein Sichschneiden beider Linien in der Nähe des maximalen Gleichgewichtsdruckes. In beiden Fällen stellt sich fast derselbe unveränderliche Druck beim Durchschreiten des Tripelpunktes: Wasser I—III′ her, obwohl beim Versuch: Linie 2, die Menge des Eises I recht groß und beim Versuch: Linie 1, sehr klein war, infolgedessen fällt beim Schmelzen auf der Linie 2 der Druck,

während derselbe auf der Linie 1 steigt. Da die Volumenabnahme beim Schmelzen von Eis I viel größer ist als die Volumenzunahme beim Schmelzen von Eis III', die Schmelzwärmen der beiden Eisarten sich aber wenig unterscheiden, so liegen im Schmelzgebiet die alle drei Minuten beobachteten Punkte auf der Linie 1 viel dichter als auf der Linie 2.

Aus den dargelegten Gründen handelte es sich also auf den Kurven 2 Fig. 3 und 1 Fig. 3a um das Gleichgewicht I—III'. Die Kurve 1 Fig. 3a ist von der wahren Gleichgewichtskurve I—III' weniger verschieden als die Kurve 2 Fig. 3 und 3a. Die in Fig. 3a mit *B* bezeichneten Punkte sind von Bridgman bestimmt. Wahrscheinlich beziehen sich dieselben auf ein anderes Gleichgewicht, das Gleichgewicht I'—III'.

Die Formen der Gruppe III.

Bei der Abkühlung des Wassers unter Drucken zwischen 2800—3200 kg bildete sich in der Regel Eis, welches dichter als Wasser bei demselben Druck ist, nur selten entsteht zuerst das gewöhnliche Eis unter Volumenvergrößerung, welches aber bald unter Volumenverkleinerung in das dichtere Eis übergeht. Das dichtere Eis kristallisiert aber aus Wasser nicht nur in einer sondern in zwei Formen. Dagegen bildete sich bei der Erwärmung des Eises II immer wieder dieselbe, nämlich die instabilere der beiden Formen. Für die beiden Eisarten der Gruppe III finden sich im folgenden die Hauptdaten aus den bei gleichmäßiger Erwärmung beobachten *pt*-Linien bei fast konstantem Volumen. Die Form dieser Kurven ist aus Fig. 4 ersichtlich. Zur Bestimmung



Figur 4.

des Druckes und der Temperatur des Beginns der Schmelzung wurde in folgender Weise verfahren. Da das Schmelzen in der

Regel wegen Anwesenheit geringer Beimengungen nicht ganz scharf durch einen Knick auf den pt-Linien zu erkennen ist, so wurde der Teil der pt-Linie, auf dem die Schmelzung mit konstantem $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ verläuft, verlängert und ebenso der Teil der pt-Linien vor Beginn des Schmelzens mit ebenfalls konstantem $\frac{\Delta p}{\Delta t}$-Werten. Der Punkt, in dem sich diese beiden Geraden schneiden, gibt den Druck und die Temperatur des Gleichgewichtes, befreit vom Einfluß geringer Beimengungen. Ferner ist noch zu berücksichtigen, daß bei der konstanten Erwärmungsgeschwindigkeit, 1° in vier Minuten bei $-18°$, mit der die folgenden Versuche ausgeführt wurden, die Badtemperatur um 1.5° der Temperatur im Eise vorauseilt.

Aus den betreffenden pt-Kurven konnte ferner die Drucksteigerung, Δp, während des Schmelzens für die Temperatur des Endes der Schmelzung entnommen werden.

Tabelle 2.

Herstellung des Eises	Menge	Beginn des Schmelzens p kg	t	Δp	Umwandlung oder keine vor dem Schmelzen	
aus Wasser bei 2900 kg und – 35° entstanden	9.92 g	2520	– 15.8	200	–	Eis III
" "	"	2515	– 14.5 [1])	–	+	p corr.
" "	"	2500	– 16.0	203	–	2512 – 15.9 – 17.
s Eis I bei – 70°	9.93 g	2500	– 18.5	180	–	
II hergestellt		2510	– 18.2	183	–	
n erwärmt		2640	– 17.0 u. – 18.0 [2])	178	+	Eis III′
den Versuchen, die ohne Umwandlung beim Erwärmen verefen, war nach der Umwandung II → III′ nochmals abgeühlt worden		2530	– 18.5	–	–	p corr. 2513 – 18.4 – 19.

Man ersieht, daß der Form III, deren Schmelztemperatur höher liegt, auch die größere Drucksteigerung beim Schmelzen zukommt, Die stabilere Form III hat also, wie zu erwarten war, das kleinere Volumen.

1) Wegen Wärmeabsorption bei der Umwandlung von Eis II in Eis III bei 2380 und – 25° ist hier die Temperatur um etwa 1.5° gegenüber der Badtemperatur zurückgeblieben. Diese Korrektion ist bei der Mittelbildung berücksichtigt.

2) Diese Bestimmungen sind, weil bei ihnen ein etwas höherer Druck herrschte und weil bei ihnen dem Schmelzen die Umwandlung vorausging, von der Mittelbildung ausgeschlossen worden.

Wie erwähnt, bildete sich aus dem Eise II bei allen Versuchen immer das Eis III′, aus Wasser kristallisierten aber die beide Formen III und III′, und zwar zwischen 2800—3200 kg viel häufiger die Form III′ als die Form III.

Die Umwandlung von Eis II in das Eis III′ und ihre Reversibilität.

Stellt man aus Eis I durch Volumenverkleinerung bei -70^0 das Eis II her und erwärmt dann, so tritt in Übereinstimmung mit den Angaben von Bridgman regelmäßig die Umwandlung in das Eis III′ ein. Kühlt man aber das gebildete Eis III′ wieder bis -70^0 ab, nachdem die Umwandlung sich vollzogen hat, besonders nachdem ein großer Teil des Eis III′ geschmolzen ist, so kann die Umwandlung von Eis III′ in II auch ausbleiben, wie aus dem *pt*-Linien zu entnehmen ist. Die Umwandlung von Eis III′ in II kann aber auch eine partielle sein. Kühlt man, während die Umwandlung II $\rightarrow$ III′ sich noch vollzieht, so tritt mit Sicherheit die entgegengesetzte Umwandlung bei der Abkühlung ein, wovon man sich durch Bestimmung einer *pt*-Kurve bei der Erwärmung überzeugen kann. Damit ist bewiesen, daß die von Bridgman gefundene schnelle Druckänderung bei der Erwärmung wirklich die von Bridgman angenommene Bedeutung einer reversibeln Umwandlung und nicht die des Überganges einer instabileren in eine stabilere Form hat.

Fig. 4 gibt die *pt*-Linie, 1, bei der Erwärmung des Eises II wieder; bei -28^0 und 2400 kg tritt die Umwandlung von Eis II in Eis III′ ein, bei 2510 kg und -18.2^0 beginnt dann das Schmelzen von Eis III′. Nachdem etwa die halbe Menge Eis III′ geschmolzen war, der Druck bis 2600 kg gestiegen war, wurde wieder auf -60^0 gekühlt; die *pt*-Linie, 2, bei der zweiten Erwärmung zeigt nun keine Spur einer durch die Umwandlung II $\rightarrow$ III′ bedingten Druckänderung. Läßt man aber den Druck nur so lange steigen bis die Umwandlung noch nicht zu Ende verlaufen ist und kühlt dann wieder ab, so erhält man eine *pt*-Linie, die mit der Linie 1 identisch ist. Die Linie *ab* Fig. 4 gibt den Verlauf der von mir und Brigdman in Übereinstimmung bestimmten Verlauf der Schmelzkurve der Form III′.

Aus den *pt*-Linien ergeben sich folgende Punkte für den Beginn der Umwandlung von II in III′ nebst den durch die Umwandlung II $\rightarrow$ III′ bewirkten Druckänderungen Δp.

Tabelle 3.

Gleichgewichtskoordinaten von II und III'.

p kg	Temperatur	Δp	Mittel p kg	Mittel Temperatur	Temp. korr.
2400	$-28^0.0$	80	2415	-28.2	-29.7
2430	-28.5	80			
2540	-26.5	85	2540	-26.7	-28.2
2540	-27.0	85			
2890	-27.0	50	2890	-27.0	-28.5

Da die Badtemperaturen der Temperatur im Eise um etwa $1^0.5$ vorauseilt, ist von den beobachteten Temperaturen des Beginns der Umwandlung noch $1^0.5$ abzuziehn. Die so korrigierten Temperaturen liegen um 4^0 bis 3^0 höher als die von Bridgman bestimmten Punkte der Umwandlungskurve bei den entsprechenden Drucken.

Die von Bridgman [1]) bestimmten Koordinaten dieser Umwandlungskurve ergeben eine auffallend starke Krümmung derselben, und die betreffenden Δv-Werte eine ungewöhnlich starke Abnahme mit wachsendem Druck. Bei $-34^0.0$ und 2230 fand Bridgman $\Delta v = 0.0206$ cbcm/g und bei $-25^0.0$ und 3370, $\Delta v = 0.0148$ cbcm/g, also eine Abnahme um 28 %. Da die von Bridgman bestimmten Δ-Werte bei 2500 für seine Gewichtskurven III—Wasser und II—III im Verhältnis von $\frac{\Delta v_{\text{II}-\text{III}}}{\Delta v_{\text{III}-0}} = 0.48$ und die entsprechenden jetzt bestimmten Δp-Werte im Verhältnisse $\frac{\Delta p_{\text{II}-\text{III}'}}{\Delta p_{\text{III}'-0}} = 0,47$ stehn, (Bridgman fand

bei 2510 und $-20^0.0$ $\Delta v_{\text{III}-0} = 0.0371$ cbcm/g
„ 2530 „ -31.0 $\Delta v_{\text{II}-\text{III}} = 0.0179$ „

jetzt wurden gefunden

bei 2520 und -19.9 $\Delta v_{\text{III}'-0} = 180$ kg
„ 2540 „ -28.2 $\Delta v_{\text{II}-\text{III}'} = 85$ „)

also untereinander gut übereinstimmen, so ist wohl anzunehmen, daß wegen Unvollständigkeit der Umwandlung die Δv-Werte Bridgmans bei 2910 und 3370 zu klein ausgefallen sind. Dasselbe gilt offenbar auch für den jetzt von mir bei 2890 bestimmten Δp-Wert, Tab. 3, welcher größer als 85 kg sein sollte. Da aber mehrmals beobachtet wurde, daß wenn auch bei der Abkühlung von III'

1) l. c.

die Umwandlung in II eintrat, dieselbe nur zum Teil sich vollzog, so darf man wohl annehmen, daß auch in diesem Fall die Umwandlung bei der Abkühlung von Eis III' nur etwa zur Hälfte vor sich gegangen ist. Durch die neu bestimmten Punkte der Umwandlungskurve II—III' Fig. 3, Punkte *u*[1]), kann man zwanglos eine Gerade legen, welche in den Tripelpunkt *b* Fig. 3 trifft. Es harmonieren also die neuen Bestimmungen der Umwandlungskurven I—II, I—III' und II—III' mit einander in befriedigender Weise. Während die beiden Punkte Bridgmans *B* Fig. 3 bei $-34^0.0$ und 2230 kg sowie bei $-31^0.0$ und 2530 kg dieser Forderung nicht genügen.

Die Gleichgewichtskurve I'—III'.

Kühlt man Wasser unter 2800 kg möglichst langsam ab, so kristallisiert in der Regel die Form III'[2]). Wandelt man diese Form durch Volumenvergrößerung oberhalb -30^0 zum Teil in das weniger dichte Eis um, so gelangt das System nicht auf die Gleichgewichtskurve, auf die ein aus Eis I und II bestehendes System bei seiner Erwärmung nach der Umwandlung von II in III' gelangt, sondern auf eine neue Gleichgewichtskurve, welche von der Gleichgewichtskurve I—III' verschieden ist. Es muß sich also aus dem Eis III' eine andere Eisform als das gewöhnliche Eis, die ihr aber nahe verwandt ist, das Eis I', gebildet haben.

Beim ersten Versuch wurde $^1/_8$ des Eises III' in das Eis I' umgewandelt und dann bei konstanter Temperatur nach Volumenvergrößerung oder -verkleinerung, bei denen sich etwa $^1/_4$ des Systems umgewandelt hatte, die in 5—7 Minuten nach den Volumenänderungen erreichten Enddrucke bestimmt.

Tabelle 4.

Temp.	Enddrucke nach Vol.vergrößerung	Enddrucke nach Vol.verkleinerung	Gleichgewichtsdruck
— 25.2	2150	2162	2156 (12)
— 25.2	2135	2160	2147 (25)

1) In Fig. 3 sind die nicht korrigierten Temperaturen eingetragen, da die Temperaturen der Linien *ab* und *bc* und alle neu beobachteten Punkte ebenfalls nicht korrigiert sind.

2) Die Abkühlung kann nicht regelmäßig und langsam genug ausgeführt werden, um den Druckabfall bei der Kristallisation so genau zu bestimmen, daß man auf Grund der *pt*-Linie bei der Abkühlung die Kristallisation der Eisarten III und III' von einander unterscheiden könnte. Aber der Vergleich der hier in Frage kommenden Gleichgewichtskurven lehrt, daß sich bei den folgenden Versuchen nur die Form III' gebildet haben kann.

Beim zweiten Versuch wurde ¼ des Eises III′ in das Eis I′ verwandelt und nun die Koordinaten der Gleichgewichtskurve in derselben Weise wie beim ersten Versuch für eine Reihe von Temperaturen bestimmt.

Tabelle 5.

Temp.	Enddrucke nach Vol.vergrößerung	Enddrucke nach Vol.verkleinerung	Gleichgewichtsdruck
– 25,4	2140	2161	2150 (21)
– 40.0	2190	2218	2204 (28)
– 40.0	2172	2206	2189 (32)
– 50.6	2090	2250	2170 (160)
– 50.6	2000	2190	2095 (190)
– 60.0	1990	2143	2066 (153)
– 62.5	2040	2085	2062 (45)

Die Einstellung des Gleichgewichtes geht unter -50^0 auffallend langsam vor sich. Die Gleichgewichtseinstellung auf I′—III′ vollzieht sich überhaupt langsamer als auf I—III′, infolgedessen erhielt man bei langsamer Erwärmung von I—III′ *pt*-Linien welche unter einander und mit der Gleichgewichtskurve nicht befriedigend übereinstimmten. Man ersieht in Fig. 3, daß die Kurve I′—III′, welche durch jene Punkte geht, mit der Gleichgewichtskurve I—III′ nicht zusammenfällt, sondern bei 20—30 kg kleineren Drucken als diese verläuft. Die Kurve I′—III′ schneidet die Gleichgewichtskurve I—II bei $-31^0.5$ und 2175 kg, Punkt *G* Fig. 3.

Vergleich der von Bridgman und der neu bestimmten Umwandlungskurven.

Vergleicht man meine älteren und neueren Bestimmungen der Gleichgewichtskurven der Eisformen der Gruppen I, III und II bei Temperaturen über -40^0, bei denen das Gleichgewicht sich schnell einstellt, so sieht man, daß nach der gegenseitigen Lage der mit demselben Manometer ausgeführten Bestimmungen die früher als I—III bezeichnete Gleichgewichtskurve offenbar mit der neu bestimmten und als I′—III′ erkannten Gleichgewichtskurve identisch ist. Ebenso ist offenbar das obere Stück der früher als I—II angesprochenen Kurve von -22 bis 30^0 mit der neu bestimmten Kurve I—III′ identisch. Denn die Differenzen der Drucke dieser Kurven sind bei derselben Temperatur konstant und unter sich fast gleich. Sie sind also nur durch Differenzen in den Angaben der Manometer von 1900 und 1912 bedingt.

Temperatur	alte I—III	neue I'—III'	Δ
– 22°.0	2200	2140	60
– 25.0	2210	2150	60
– 30.0	2225	2170	55
– 35.0	2240	2185	55
– 40.0	2255	2195	60
	alte I—II	neue I—III'	
– 22.0	2220	2150	70
– 25.0	2235	2170	65
– 30.0	2240	2180	60

Diese Übereinstimmung lehrt auch, auf welche Formen sich die Versuche von 1900 bezogen haben. Die Formen III und III' sind dieselben gewesen. Der Unterschied in ihrer Bezeichnung kommt nur daher, daß die neuen Versuche die Existenz einer stabileren Form III dargetan haben. Infolgedessen mußte die frühere Bezeichnung der Form III in III' geändert werden.

Bei den älteren Versuchen war bei einem Teil derselben jedenfalls die Form I neben der Form I' vorhanden und doch wurden die Gleichgewichtsdrucke I'—III' gemessen, weil aus III' bei Volumenvergrößerung I' entsteht, so umhüllt I' die Form III', es gelangt also das vorhandene Eis I mit dem Eise III' garnicht in Berührung, und es kann daher nur der Gleichgewichtsdruck derjenigen Form der Gruppe I gemessen werden, die sich aus III' bei Volumenvergrößerung bildet, dieses aber ist die Form I'.

Durch Auffinden der Gleichgewichtskurve III'—II hat sich herausgestellt, daß auf der alten Kurve I—II ein Tripelpunkt bei – 30° liegen muß, an einer Stelle, an welcher die alte Kurve I—II auch eine Umbiegung zeigte. Das Stück der alten Kurve I—II über – 30° entspricht daher dem Gleichgewicht I—III'.

Dagegen ist die Übereinstimmung für die alte und neue Gleichgewichtskurve I—II, die sich bestimmt auf ein und dasselbe Gleichgewicht beziehen, weniger gut. Die Differenzen ihrer Drucke betragen nicht, wie zu erwarten war, etwa 60 kg, sondern sind, wie man aus folgender Zusammenstellung ersieht, größer und wachsen mit abnehmender Temperatur. Da bei diesen Temperaturen die Einstellung des Gleichgewichtes schon recht langsam vor sich geht, so sind wohl die größeren Differenzen, die mit sinkender Temperatur zunehmen, hier auf mangelhafte Einstellung des Gleichgewichtes zurückzuführen.

Temperatur	alte I—II	neue I—II	Δ
— 36.0	2252	2145	107
— 40.0	2223	2105	118
— 50.0	2125	2002	123
— 60.0	2055	1915	140

Die Kurve I—II von Bridgman und die neue Kurve I—II stimmen mit einander gut überein, auch müssen sich beide Kurven auf dasselbe Gleichgewicht beziehen. Bei der Kurve I—III Bridgmans können aber Zweifel entstehen, ob dieselbe mit der neuen Kurve I—III′ oder I′—III′ identisch ist.

Temperatur	I—III Bridgman	I—III′ neu	Δ	I′—III′ neu	Δ
— 30.0	2156	2195	39	2170	14
— 40.0	2178	2225	47	2195	17
— 50.0	2160	2200	40	2180	20
— 60.0	2117	2175	58	2135	18
	I—II Bridgman	I—II neu	Δ		
— 35.0	2164	2155	— 9		
— 45.0	2072	2055	— 17		
— 55.0	1980	1955	— 25		

Dafür daß die Kurve I—III Bridgman nicht mit der Kurve I—III′ sondern mit der Kurve I′—III′ identisch ist, sprechen folgende Umstände:

1. Die Differenzen (I′—III′) — (I—III Bridgman) sind unter einander fast gleich, jedenfalls weniger von einander unterschieden als die Differenzen (I—III′) — (I—III Bridgman), außerdem sind sie von den Differenzen (I—II neu) — (I—II Bridgman) weniger unterschieden als die Differenzen (I—III′) — (I—III Bridgman).

2. Hat Bridgman, wenn auch die Form I zugegen war, doch aller Wahrscheinlichkeit nach nicht die Gleichgewichtsdrucke I—III′ sondern die Drucke I′—III′ gemessen, da wegen Umhüllung von III′ mit der Form I′, die sich aus ihr bildet, auch in Gegenwart von I die Drucke I′—III′ gemessen werden, was durch die Identität der alten Kurve I—III und der neuen I′—III′, wie wir sahen, bestätigt wird.

3. Wenn die Kurve (I—III Bridgman) wirklich die Kurve I′—III′ ist, so erklärt sich auch der fehlerhafte Verlauf der Kurve (II—III Bridgman), welche Bridgman in den Schnittpunkt der Kurven I—II und I′—III′ bei — 35° zu führen suchte, während dieselbe in den Schnittpunkt der Kurven I—II und I—III′ bei — 31°.5, wie wir sehn, eintrifft.

Der Irrtum Bridgmans liegt meiner Auffassung nach darin, daß er den Schnittpunkt zweier Gleichgewichtskurven, deren Gleichgewichten keine Phase gemeinsam ist, als Tripelpunkt angesehn hat und diesen Punkt zum Tripelpunkt machen wollte, indem er in ihm die Kurve II—III′ eintreffen ließ. Ein wirklicher Tripelpunkt, der Punkt *b* Fig. 3, liegt in der Nähe des Schnittpunktes der beiden Gleichgewichtslinien I′—III′ und I—II, ist aber mit dem Tripelpunkt *b*: I—II—III′ nicht identisch. Darnach wäre also Bridgman die Existenz der Gleichgewichtskurve I—III′ entgangen.

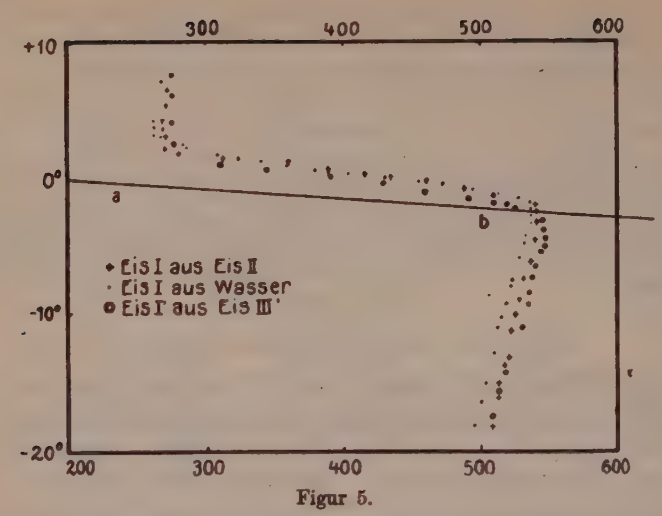
Die Schmelzkurve der Form I′.

Da die Gleichgewichtskurve I′—III′ bei 20—30 kg kleineren Drucken als die Gleichgewichtskurve I—III′ verläuft, so schneidet sie die Schmelzkurve des Eises III′ bei etwas tieferen Temperaturen als die Kurve I—III′. Wenn auch die Differenzen der Schmelzpunkte von Eis I und I′ bei Drucken von 2000 kg zu gering sind, um sie direkt durch Vergleich zweier *pt*-Linien für Eis I und I′ bestimmen zu können, so kann man diese Differenz doch recht genau angeben. Der Schmelzpunkt von III′ wird durch die Drucksteigerung von 200 kg um 1^0 erhöht, und die Differenz der Schnittpunkte der Schmelzkurve III′ mit den Schmelzkurven von I und I′ beträgt 20—30 kg, infolgedessen muß der Schmelzpunkt von I′ um $0^0.10$ bis $0^0.15$ bei 2130 kg tiefer liegen als der des gewöhnlichen Eises.

Der Unterschied in den Schmelzpunkten der beiden Eisarten der Gruppe I kann bei abnehmendem Druck wachsen, aber auch abnehmen. Aus folgender Bestimmung ergibt sich, daß diese Differenz mit abnehmendem Druck wahrscheinlich etwas zunimmt.

Die 3 *pt*-Linien 1 Fig. 5 wurden bei derselben Erwärmungsgeschwindigkeit, die mit wachsender Temperatur in derselben Weise abnahm, bestimmt. Sie betrug bei -15^0 1^0 in 3 Min., bei -5^0 1^0 in 5 Min. und bei 0^0 1^0 in 8 Min.

Die beiden *pt*-Linien für Eis I, hergestellt aus Wasser und Eis II, fallen im Schmelzgebiet, in dem sich Druck und Temperatur automatisch den Gleichgewichtsbedingungen p, t entsprechend einstellen, zusammen. Die Gerade *ab* gibt die Lage der Gleichgewichtskurve von I mit Wasser an. Weil die gemessene Badtemperatur der Temperatur im Eise etwas voraneilt, liegt der Schmelzbereich der *pt*-Linien etwas oberhalb der Gleichgewichtskurve.



Figur 5.

Bei der Erwärmung des aus Eis III' hergestellten Eis I' beginnt der Abfall des Druckes bei tieferen Temperaturen als bei den beiden anderen Eispräparaten und während des Schmelzens ist bei demselben Druck die Badtemperatur des Eises I' um etwa 0.5° tiefer als bei den beiden anderen, aus Eis I bestehenden, Eispräparaten.

Die Schmelzkurve des Eises I' verläuft also dicht unter der des gewöhnliches Eises. Die Abstände beider Kurven bei demselben Druck nehmen mit wachsendem Druck von 0.5° bei $p = 500$ bis 0.15° bei $p = 2100$ kg der sicher bestimmten Schmelzpunktsdifferenz ab. Die Abstände der beiden Kurven bei demselben Druck scheinen ebenfalls von 60 kg bei $p = 500$ bis 30 kg bei $p =$ 2100 kg abzunehmen.

Der Druckabfall Δp beim Schmelzen der drei Eispräparate betrug:

	Δp
für Eis I aus Eis II	272 kg
für Eis I aus Wasser	276 „
für Eis I' aus Eis III'	275 „

Bei einem zweiten später noch zu erwähnenden Versuch ergaben sich für eine etwas kleinere Menge:

	Δp
für Eis I aus Wasser	264 kg
für Eis I' aus Eis III'	263 „

Die Volumenunterschiede von Eis I und I' fallen also innerhalb des Fehlers von Δp, der etwa 2—3 % beträgt.

Früher[1]) konnte dieser Unterschied bei der spontanen Umwandlung von Eis I′ in I zu etwa + 0.0023 cbm/g, also zu etwa 2 % der Volumenänderung beim Schmelzen von Eis I bei 500 kg Δv = 0.100 cbc/g bestimmt werden. Wenn also jetzt ein Unterschied in den Δp-Werten nicht gefunden wurde, so stimmt das mit den früheren Angaben über die Volumendifferenz von Eis I und Eis I′ überein.

Die Überführung von Eis I′ aus dem druckfesten Gefäß in unterkühltes Wasser zur Bestimmung seines Schmelzpunktes bei p = 1 kg stößt auf große Schwierigkeiten, weil sich auf dem kalten Eise I′ Wasserdampf in Form von Eis I kondensiert, erhält man beim Impfen des unterkühlten Wassers mit dem betreffenden Eis I′ natürlich den Schmelzpunkt von Eis I.

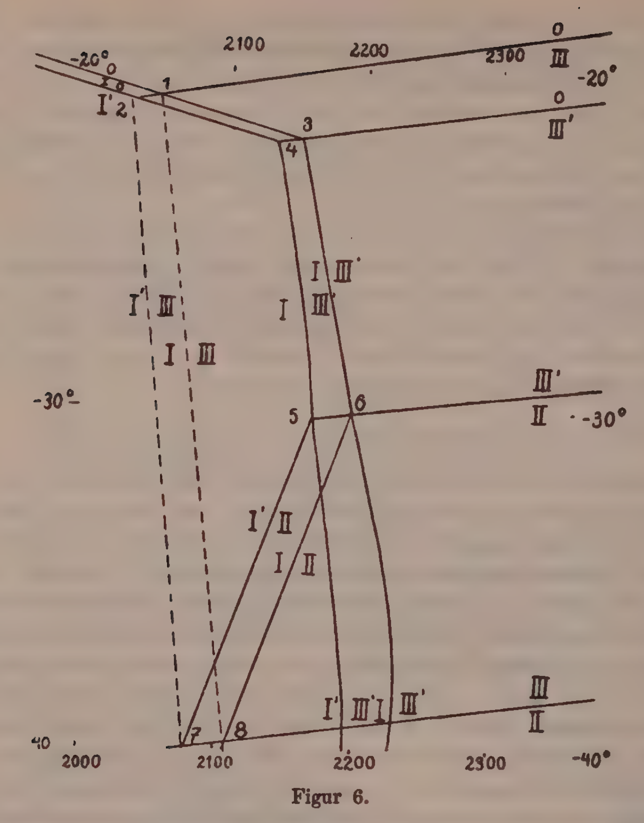
Die Gleichsgewichtskurven I—III und I′—III.

Aus den Schmelzpunktsbestimmungen Tab. 2 folgte, daß es außer dem bisher bekannten Eise III′ noch eine stabilere Form III gibt. Die Schmelzkurve des Eises III, Fig. 6, 0—III, wird, da sie bei höherer Temperatur als die des Eises III′, 0—III′, verläuft, die Schmelzkurven 0I und 0I′ bei kleineren Drucken schneiden als die Schmelzkurve, 0—III′. Die beiden Schnittpunkte von 0III mit 0I und 0I′ sind Tripelpunkte, in die je eine Umwandlungskurve: I—III und I′—III, eintreffen muß. Diese beiden Gleichgewichtskurven werden aller Wahrscheinlichkeit nach ziemlich parallel den Gleichgewichtskurven I—III′ und I′III′ verlaufen.

Zur Herstellung des Systems I—III könnte man vom Eise III ausgehen, und dann durch Volumenvergrößerung aus demselben entweder I oder I′ entstehen lassen. Da aber das Eis III bei Drucken bis 3200 kg sehr selten ohne Beimengung von Eis III′ entsteht, so hätte man viele Versuche zur Herstellung von III anzustellen. Nun lehrte folgender Versuch, daß nicht selten neben dem Eise III′ auch das Eis III aus Wasser zwischen 2700—3200 sich bildet. Nachdem für eine unter Kontraktion von 3000—2800 gebildete Kristallmasse die Temperatur des Schmelzbeginns bei 2500 kg zu − 18°.6 bestimmt worden war, die Gegenwart von III′ also festgestellt worden war, wurde wieder auf − 25° abgekühlt und das Volumen stufenweise um je 0.03 cbm bei einer Eismenge von 10 g vergrößert. Dabei ergab sich, daß der Druck nach den ersten beiden Volumenvergrößerungen auf 2150 kg, also den Gleichgewichtsdruck I′—III (Fig. 6) zurückstieg, bei den nun folgenden

---

1) Zeitschr. f. phys. Chem. 72, S. 629, 1910.



Figur 6.

4 Volumenvergrößerungen stieg aber im Verlauf von 2—3 Minuten der Druck nur auf 2060, 2060, 2050 und 2040 kg zurück. Diese Drucke liegen, wie aus Fig. 6 ersichtlich, zwischen den beiden Gleichgewichtskurven I'—III und I—III. Man darf also behaupten, daß sich bei jener Kristallisation des Wassers etwa $^1/_3$ Eis III' und $^2/_3$ Eis III gebildet haben. Außerdem lehrt der Versuch, daß die praktische Umwandlungsgeschwindigkeit der Eisart III' in III, vielleicht infolge mangelhafter Berührung, sehr gering ist.

Verkleinert man nun das Volumen, so gelangt der Druck nach der ersten Volumenverkleinerung um 0.03 cbm wieder auf den Wert 2150, den Gleichgewichtsdruck I'—III' bei -25^0. Bestimmt man darauf bei konstanter Temperatur die Enddrucke nach einer Volumenverkleinerung und einer Volumenvergrößerung, so erhält man die Gleichgewichtsdrucke 2153 (37), 2145 (30). Man ist also vom

stabileren Gleichgewicht III—I oder III—I′ zum instabileren gelangt. Die merkwürdige Tatsache wird verständlich, wenn man sich erinnert, daß bei -25^0 in I und I′ bei Volumenverkleinerung III′ regelmäßig, also wohl in vielen Zentren entsteht. Wenn aber das der Fall ist, so werden III′ und III sich nicht berühren, sondern durch Schichten von I oder I′ von einander getrennt sein, und nach der Volumenverkleinerung stellt sich der höhere Gleichgewichtsdruck, der dem weniger stabilen System eigentümlich ist, ein. Es ist aus diesem Grunde nicht möglich, durch Bestimmung von Enddrucken nach Volumenänderungen die Koordinaten der Gleichgewichtskurve III—I′ oder III—I zu ermitteln. Auch bei Temperaturänderungen folgte der Druck dieser Systeme nicht gut der Gleichgewichtskurve. Man kann aber zeigen, daß die Gleichgewichtskurve III—I in den Tripelpunkt 1, Fig. 6, der aus der Existenz von III mit Notwendigkeit folgt, trifft. Um das zu zeigen, braucht man das System I—III nur zu erwärmen, der Druck sinkt dann langsam und wird im Tripelpunkt während des Schmelzens von III und I konstant.

Zur Ausführung dieses Versuches empfiehlt es sich, das Gemenge von Eis III und III′ bei möglichst hohem Druck herzustellen, damit bei der Abkühlung des Wassers nicht die Verlängerung der Gleichgewichtskurve 0I überschritten wird, bevor die Kristallisation unter Kontraktion beginnt, denn sonst bildet sich leicht das Eis I, welches sofort in III′ übergeht. Nach Bildung von Eis I konnte in keinem Falle die Gegenwart von III nach dem Verfahren stufenweiser Volumenvergrößerung konstatiert werden.

Nachdem wieder ein Gemenge von III und III′ bei 3300 kg hergestellt war, wurde bei -25^0 das Volumen um je 0.03 cbm sukzessive vergrößert und nach den ersten beiden Volumenvergrößerungen die Enddrucke 2165 und 2165, darauf bei der 3ten der Enddruck 2080 und bei der 4ten und 5ten Volumenvergrößerung die Enddrucke 2060 und 2050 beobachtet, darauf wurde bei fast konstantem Volumen erwärmt und alle 3 Minuten der Druck und die Badtemperatur beobachtet. Während der Schmelzung ergaben sich für folgende Temperaturen die Drucke:

Zeit	Druck	Temperatur
0	2039	– 20.8
3	2040	– 19.8
6	2041	– 18.8
9	2040	– 17.8
12	2040	– 16.8

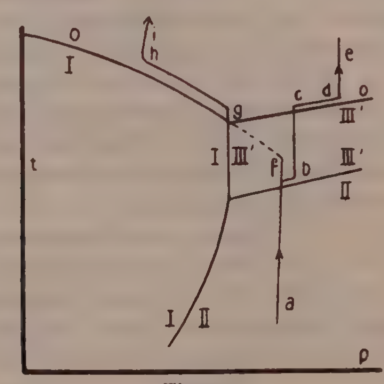
Zeit	Druck	Temperatur
15	1987	– 15.8
18	1944	– 15.0
21	1889	– 14.7

Der Druck ist wirklich während 15 Minuten unveränderlich geblieben, und deshalb als Druck eines Tripelpunktes zu betrachten. Dieser unveränderliche Druck stimmt mit dem Druck 2050 des Schnittpunktes der Schmerzkurven 0III und 0I, wie aus Fig. 6 ersichtlich, überein. Damit ist auch für die Schmelzkurve 0III, die wir durch den einen bestimmten Punkt parallel der Schmelzkurve III' legen, ein zweiter Punkt ermittelt, der bei – 20.8 und 2040 kg, dem Tripelpunkt 0—I—III, liegt.

Abnorme *pt*-Linien bei einem Druckgefälle in der Eismasse.

Es wurde schon mehrfach darauf hingewiesen, daß die Herstellung eines allseitigen, gleichmäßigen Drucks auf der zu untersuchenden Eismasse eine Bedingung ist, welche die Deutung der Vorgänge im druckfesten Gefäß, wenn man bei derselben auf die Messung von t und p angewiesen ist, sehr erleichtert.

Entsteht im Eise ein Druckgefälle, so kann dadurch, wie folgendes Beispiel zeigen soll, die *pt*-Linie sehr wesentlich verändert werden. Wenn die Bohrung des druckfesten Zylinder verhältnismäßig eng ist, 14 mm Durchmesser bei 85 mm Länge, so werden in der Regel zwei ganz verschiedene *pt*-Linien beobachtet, wenn das Eis direkt an der Wand des druckfesten Zylinders liegt oder in einer Hülse steckt, die von der druckübertragenden Flüssigkeit umgeben ist.



Figur 7.

In Fig. 7 ist die Linie *abcd* die *pt*-Linie bei der Erwärmung des allseitig und gleichmäßig gepreßten Eises II, das aus Eis I bei -80^0 durch Volumenverkleinerung hergestellt war. Die Deutung dieser Linie ist einfach.

Liegt das Eis I aber direkt an der starren Wand des druckfesten Gefäßes, so tritt bei der Drucksteigerung auf dem Eis I bei -80^0, auch wenn der Druck über 3000 kg gesteigert wird, nur eine sehr geringe Volumenverkleinerung ein, weil sich nur die oberen Schichten des Eis I, die in Berührung mit der druckübertragenden Flüssigkeit sind, in das Eis II umwandeln. Der Druck nimmt dann mit der Tiefe schnell ab, in einer Schicht, deren Lage vom Druck und der Dicke des Eiszylinders abhängt, entspricht er dem Gleichgewichtsdruck II—I, und nimmt dann mit wachsender Tiefe ab. Wird nun der Eiszylinder erwärmt, so tritt beim Überschreiten der Verlängerung der Schmelzkurve 0I ein langsam vor sich gehender Druckabfall ein. Das gebildete Wasser begünstigt den Druckausgleich und nun setzt, wenn sich eine hinreichende Menge Wasser gebildet hat, die Umwandlung von I in III momentan in der Eismasse I fort, und der Manometerzeiger stürzt auf den Druck *g* des Tripelpunktes 0 I III′, im Mittel auf 2148 kg, um sich bei diesem Druck je nach der Verteilung der vorhandenen Masse in die drei Phasen kürzere oder längere Zeit unverändert zu erhalten. Schließlich, nachdem das Eis III′ abgeschmolzen ist, sinkt der Druck längs *gh*, während das Eis I schmilzt.

Der momentane Druckabfall von *f* bis *g* hängt vom Druck zu Beginn der Erwärmung ab. Bei einem Versuch trat bei 3218 kg und -35^0 Badtemperatur der momentane Druckabfall auf 2160 kg ein.

Eine aus Eis I bei -25 sich selten bildende Form.

In zwei Fällen wurde bei der Volumenverkleinerung von Eis I bei -25 das Entstehen einer Form beobachtet, die sich von dem in der Regel entstehenden Eise III′ dadurch unterscheidet, daß sie sich viel langsamer aus dem Eise I als die Form III′ bildet und daß sie sehr unbeständig ist.

Bei der Volumenverkleinerung von Eis I über -30^0 beginnt der Druck in der Regel bei 2300—2400 zu fallen und fällt dann sehr schnell auf den Gleichgewichtsdruck I—III′ 2200—2150 kg zwischen -30 und -22^0. Eine Drucksteigerung über 2170 kg bei -25^0 ist, nachdem die Bildung von III′ eingetreten ist, auch bei einer mit großer Geschwindigkeit ausgeführten Volumenverkleinerung nicht mehr ausführbar, da das Gleichgewicht sich fast momentan einstellt.

Beim folgenden Versuch konnte aber der Druck, nachdem er bei -25^0 schon zu fallen begonnen hatte, bis 2640 kg gesteigert werden, ohne daß der schnelle Abfall eintrat. Der Druck fiel dann bei konstantem Volumen, während von -25^0 auf 40^0 abgekühlt wurde, langsam, in 30 Minuten von 2640 auf 2310, anfangs um 100 kg in der Minute, dann eine Zeitlang um 20 kg pro Minute und schließlich noch langsamer. Darauf trat bei -40^0 und immer konstantem Volumen ein langsames Steigen, welches sich bald stark beschleunigte, ein. In 8 Minuten wurde der Druck 2740 erreicht, darauf fiel der Druck in 0.5 Minuten schnell aber sanft auf 2260 und wurde bei der Erwärmung während des Schmelzens zwischen -19 und -14^0 unveränderlich 2152 während 18 Minuten. Es hatte sich also zum Schluß das System I—III′ (siehe Fig. 6) gebildet.

Zur Deutung dieser Erscheinungen würde die Annahme der Bildung einer instabileren Form der Gruppe III, die instabiler als III′ ist, nicht hinreichen, denn durch diese Annahme wäre wohl die abnorm langsame Druckabnahme, nicht aber die ihr folgende Druckzunahme verständlich, da das Volumen einer Form, die stabiler als III′ ist, aller Wahrscheinlichkeit größer wäre als das Volumen von III′. Auch die Annahme der Bildung einer instabilen Form der Gruppe II würde nicht weiter führen. Die Annahme der Bildung der Form V oder einer instabilen Form dieser Gruppe wird aber den Beobachtungen gerecht, indem dadurch nicht nur die Veränderung der Bildungsgeschwindigkeit sondern auch die Druckzunahme verständlich wird. Nachdem sich V in I gebildet hat, sinkt der Druck langsam, V ist aber bei 2310 kg instabiler als III′. Tritt nun in V, welches dichter als III′ ist, die Bildung von III′ ein, so wird der Druck steigen und zwar zuerst langsam und um so schneller, je größer die Berührungsfläche von V und III′ wird. Wie nun III′ in Berührung mit I kommt, fällt der Druck auf den Gleichgewichtsdruck I—III′, indem sich hierbei oder etwas später die Reste von V in III′ umwandeln. Der Druck hätte bei der Umwandlung von V in III′ bis auf 3495 kg, dem von Bridgman bestimmten Gleichgewichtsdruck von V und III′ bei -30^0, steigen können. Sollte man in Zukunft wirklich einmal den Druck bis zu dieser Grenze steigen sehn, so wäre damit bewiesen, daß in der Tat aus I V sich gebildet hat. Bei einem zweiten Versuch wurden ganz analoge Erscheinungen beobachtet. Anfangs wurde aber der Druck nur auf 2470 kg erhöht und entsprechend der geringeren Menge des aus I entstandenen V traten die Folgeerscheinungen auch in verkleinertem Maßstabe auf. Der Druck

fiel bei -30^0 in 7 Minuten auf 2315 und stieg dann langsamer in 9 Minuten auf 2477, um schließlich in 0.5 Minuten auf 2190, den Gleichgewichtsdruck I—III', zu fallen.

Das Zustandsdiagramm zwischen 2000—2500 kg.

Die Gesamtheit aller Versuche führt zum Zustandsdiagramm Fig. 6, in dem die 5 Formen I, II, III sowie I' und III' auftreten. Die drei ersten sind, soweit bisher die Erfahrung reicht, als absolut stabil, die beiden letzten als instabil aber als recht beständig, so lange sie nicht mit den entsprechenden stabileren Formen I und III in Berührung kommen, zu betrachten. Für 6 Phasen, Wasser und 5 Formen, wären $\frac{n\,.\,(n-1)}{1\,.\,2} = 15$ Gleichgewichtskurven möglich. Durch die Lage der Zustandsfelder und die Instabilität von I' in bezug auf I und von III' in bezug auf III wird aber die Zahl der Gleichgewichtskurven beschränkt. Da das Eis II-Feld vom Wasser-Felde durch das Eis III-Feld getrennt ist, so müßte das Eis II in bezug auf III überhitzt werden, um mit Wasser ins Gleichgewicht kommen zu können, was möglich aber nicht ausführbar ist. Da ferner die Formen I' und III' in den Feldern von I und III instabil sind, so können auch keine Gleichgewichte I'—I und III'—III existieren. Es bleiben also von 15 möglichen Gleichgewichtskurven 12 realisierbare übrig.

Von diesen sind folgende 6 Gleichgewichtskurven, die Kurven 0—I, 0—III', I—III', II—III', I—II und I'—III' festgelegt. Ferner sind für die Gleichgewichtskurve 0—III und die Gleichgewichtskurve I—III oder I'—III, 0—I' und I—III je zwei Punkte bestimmt worden. Von 3 Gleichgewichtskurven, den Kurven I'—III, I'—II und II—III sind keine Punkte bestimmt worden. Die Drucke der beiden Gleichgewichtskurven I'—III und I'—II müssen um etwa 25 kg kleiner sein als die der Gleichgewichtskurven I—III und I—II, ihre Messung bot also kein besonderes Interesse.

Die Herstellung des Systems I'—III hängt ganz vom Zufall ab, bei 3 Versuchen entstand aus III die Form I, es wäre möglich, daß bei einer Häufung von Versuchen auch einmal aus III I' entsteht. Bei der Erwärmung müßte dann während des Schmelzens der Druck bei einem Werte, der 25 kg unter dem entsprechenden Druck des Systemes III—I liegt, unveränderlich werden. Diese Bestimmung wäre wohl nach den Erfahrungen von S. 124 die ausschlaggebende, aus der auf das Gleichgewicht III—I' zu schließen ist.

Das System I′—II könnte wahrscheinlich ohne erhebliche Schwierigkeiten hergestellt werden. Es müßte zuerst bei -25^0 III′ vollständig in I′ umgewandelt werden, dann auf -70^0 abgekühlt werden und darauf durch Volumenverkleinerung II erzeugt werden. Bei der Erwärmung würde man dann eine *pt*-Linie erhalten, deren Drucke zwischen -30 und -40 um 25 kg kleiner sind als die Drucke von I—II.

Am erwünschtesten wäre die Bestimmung der Lage von II—III, aber gerade zur Herstellung dieses Systems ist fürs erste kein Weg. der mit Sicherheit zu demselben führen würde, vorauszusehn.

Zwei Forderungen müssen das Diagramm erfüllen. Ein Tripelpunkt entsteht nur dann im Schnittpunkt zweier Gleichgewichtskurven, wenn den betreffenden Gleichgewichten eine Form gemeinsam ist, und eine instabilere Form kann mit einer stabileren nur außerhalb des Feldes der stabileren Form ins Gleichgewicht kommen.

Das Diagramm oder die Gesamtheit der Erfahrungen lehrt, daß die von der Thermodynamik zugelassene Verwandtschaft der Flächen des thermodynamischen Potentials (ζ-Flächen), die darin besteht, daß sich ein Teil dieser Flächen untereinander nicht schneiden, für gewisse Formengruppen besteht. Hierauf weist vor allem der fast parallele Verlauf der beiden Gleichgewichtskurven I—III′ und I′—III′, dann der Umstand, daß sich die Schmelzkurven 0I und 0I′ nicht schneiden. Auch die Nichtexistenz eines Tripelpunktes 0—III—III′ kann in Ermangelung genauer Kenntnis der Schmelzkurve 0—III hier angeführt werden. Würde für die Formen I und I′ sowie III und III′ die Verwandtschaft der ζ-Flächen nicht zu treffen, so wäre eine größere Anzahl von Tripelpunkten als bei dieser Verwandtschaft gefunden worden.

Die Zahl der möglichen Gleichgewichtskurven, berechnet aus der Zahl der Phasen ohne Rücksichtnahme auf eine Verwandtschaft der Formen, ist, wenn die Zahl der Phasen n ist, gleich $\frac{n \,.\, n-1}{1 \,.\, 2}$. Durch die Verwandtschaft der Formen wird diese Zahl verkleinert und zwar, wenn zur ersten Gruppe a, zur zweiten Gruppe b Formen u. s. w. gehören, um $\frac{a\,(a-1)}{1\,.\,2} + \frac{b\,(b-1)}{1\,.\,2} + \cdots$ Gleichgewichtskurven, also für 2 Formen einer Gruppe um eine, für 3 Formen einer Gruppe um 3 Gleichgewichtskurven u. s. w.

Die mögliche Zahl der Tripelpunkte ohne Berücksichtigung der Verwandtschaft der Formen ist bei den hier in Betracht kommenden

6 Phasen (5 Formen und Wasser) $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = 20$. Davon sind 4 Tripelpunkte, in denen Wasser neben der Form II vorkommen würde, als sehr schwer realisierbar auszuschließen. Von den nachbleibenden Tripelpunkten sind dann noch 8, weil in ihnen 2 Formen verschiedener Stabilität derselben Gruppe auftreten würden, unmöglich. Die Zahl der Tripelpunkte reduziert sich also von 20 auf 8, 4 Tripelpunkte, in denen das Wasser auftritt und 4 andere Tripelpunkte, in denen nur Kristallphasen auftreten. Diese 8 Tripelpunkte sind in Fig. 6 mit fortlaufenden Nummern bezeichnet. Die übrigen Schnittpunkte der Gleichgewichtskurven haben nicht die Eigenschaften von Tripelpunkten, weil über ihnen sich nicht 3 ζ-Flächen in einem Punkte schneiden, sondern nur je 2 ζ-Flächen in 2 Linien, deren Projektionen wohl auf der pT-Ebene, nicht aber im Raume sich schneiden.

Das spontane Umwandlungsvermögen entscheidet über die Wege, welche zum Gleichgewicht führen.

Man gelangt ohne Schwierigkeiten zu dem Gleichgewicht zweier Formen, wenn jede derselben in der anderen leicht entsteht, und um so sicherer wird immer wieder dasselbe Gleichgewicht erreicht, je größer die Zahl von Umwandlungszentren beider Formen in einander ist, und je kleiner die Zahl von Umwandlungszentren anderer noch möglicher Formen in den beiden Ausgangsformen ist. Daher gelangt man bei -70^0 regelmäßig zum Gleichgewicht I—II, gleichgültig ob man das Volumen von I verkleinert oder das von II vergrößert, denn die Zahl der Zentren von I in II überwiegt offenbar die der Zentren anderer Formen der Gruppe I, und die Zahl der Zentren von II in I die der Zentren anderer Formen der Gruppe II.

Wenn andererseits die Zahl der Zentren von I in III′ sehr viel kleiner ist als die von I′ in III′, während in I und I′ die Zahl der Zentren von III′ die von III sehr übertrifft, so gelangt man bei Volumenverkleinerung von I und I′ zu den beiden verschiedenen Gleichgewichten I—III′ und I′—III′ und bei Volumenvergrößerung von III und III′ zu den Gleichgewichten I′—III und I′—III′. Man kann also dann 3 Gleichgewichte erhalten, und könnte 4 Gleichgewichte herstellen, wenn nicht die Zahl der Zentren von III′ in I und I′ sehr viel kleiner wäre als die von III in I und I′.

Wenn ferner die Berührungsfläche von I und III′ der Ort ist, an dem sich in größerer Menge bei Volumenvergrößerung die Zentren von I′ in III′ bilden, so wird das Eis III′ von I′ umhüllt

werden und die Gegenwart von I kann sich nicht mehr geltend machen.

Solche Umhüllungserscheinungen sind nicht selten zu beobachten. Häufig bildet sich um den Sphärolithen einer stabileren Form in einer stark unterkühlten Schmelze ein Saum bestehend aus einer instabileren Form.

Man ersieht, daß, wenn jene Voraussetzungen über die Zahl und den Ort der bevorzugten Bildung von Umwandlungszentren zutreffen, von den 4 möglichen Gleichgewichten: I—III', I—III, I'—III, I'—III', nur das eine Gleichgewicht I'—III' ohne Schwierigkeiten bei Volumänderungen in entgegengesetzter Richtung sich einstellen wird. Würde man aus I III' durch Volumenverkleinerung und aus III' I' durch Voiumenvergrößerung herstellen, so müßten sich die beiden Enddrucke um 20—30 kg unterscheiden. Das trifft auch in der Tat zu. Bei den nun folgenden Volumenänderungen in entgegengesetzter Richtung würde aber dieser Unterschied verschwinden, was wiederum der Erfahrung entspricht. Das Gleichgewicht I—III' kann nur auf folgendem Wege mit Sicherheit hergestellt werden. Man benutzt hierzu die Tatsachen, daß I in II und II in I sich regelmäßig bei -70° bildet, und daß aus II bei der Erwärmung III' entsteht. Erwärmt man also das System I—II, so wird bei $-31^{\circ}.5$ II durch Umwandlung in III' verschwinden, das System gelangt auf die Gleichgewichtskurve I—III', Fig. 3 *bc*, und bleibt auf dieser Gleichgewichtskurve weil bei der Erwärmung beständig ein Teil von I in III' sich umwandelt. Bei der Abkühlung aber könnte das System I—III' auf die Gleichgewichtslinie I'—III' gelangen. Wenn man das Volumen von I—III' bei konstanter Temperatur nur in geringen Grenzen ändert, so gelingt es noch, bevor die Umhüllung von III' durch I' perfekt wird, auch nach dieser Methode den Gleichgewichtsdruck I—III' zu bestimmen.

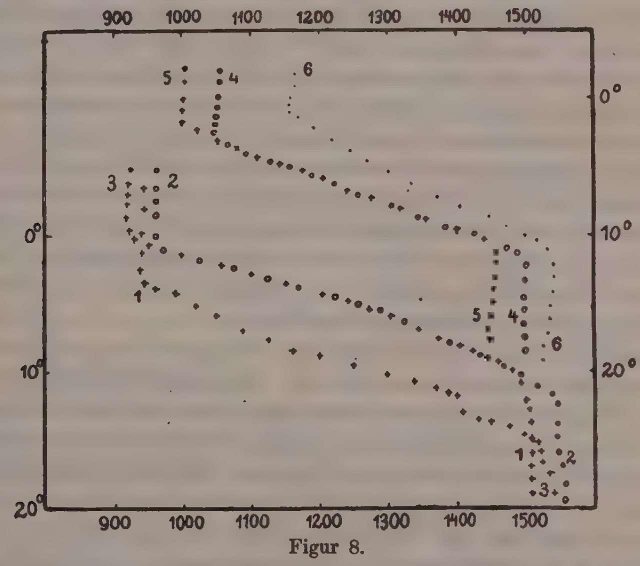
Seltene Eisformen.

1. Instabile Formen der Gruppe I.

Die Form I', deren Existenz mit Notwendigkeit aus der Existenz der beiden Gleichgewichtskurven I—III' und I'—III' folgt, ist nicht die einzige instabile Form der Gruppe I. Es wurden noch 2 instabilere Formen dieser Gruppe aufgefunden.

In Fig. 8 findet man die Resultate folgender Versuche. In einer Hülse aus Pergamentpapier befanden sich etwa 13 gr Wasser, umgeben von Pentan. Aus diesem Wasser wurde zuerst das Eis I

hergestellt und bei −70° vollständig in das Eis II verwandelt, darauf wurde durch Volumenvergrößerung das Eis II bei −50° zurück in das Eis I verwandelt und der Druck bei −40° auf 1520 kg erniedrigt, schließlich wurde bei fast konstantem Volumen die *pt*-Linie Fig. 8, Kurve 1, $_\times$, bestimmt. Bei der zweiten *pt*-Linie, Fig. 8, Kurve 2, $_\circ$, war das Wasser unter dem Anfangsdruck von 1000 kg bei +15 bis auf −60° abgekühlt worden. Diese beiden *pt*-Linien stimmen in dem Schmelzgebiet, in dem sich der Gleichgewichtsdruck entsprechend der Temperatur in dem Eis-Wasser-Gemenge sofort einstellt, vollständig überein, obwohl außerhalb dieses Gebietes die Drucke bis 50 kg verschieden sind[1]).



Figur 8.

Die Tatsache, daß die beiden *pt*-Linien 1 und 2 Fig. 8 im Schmelzgebiet zusammenfallen, stimmt andererseits mit der Tatsache, daß man zu derselben Gleichgewichtskurve I—II gelangt, gleichgültig ob man bei −70° I aus II oder II aus I erzeugt. Erst bei höheren Temperaturen über −60° machen sich in dieser Be-

1) Der Druck auf den *pt*-Linien fällt hier schon etwa von −25°, bei tieferen Temperaturen steigt er entsprechend der Temperatursteigerung. Dieses Fallen kommt daher, daß sich Pentan im Wasser löst, wodurch die Temperatur des Beginns der Schmelzung erniedrigt wird. Wenn als Drucküberträger die Mischung Toluol-Schwefelkohlenstoff-Pentan gebraucht wird, so tritt diese Erscheinung nicht ein, der Druck beginnt dann erst nach Überschreitung der Schmelzkurve zu fallen, er steigt bis zur Schmelzkurve, wird dann eine zeitlang unveränderlich und fällt schließlich.

ziehung Unterschiede geltend, bei -50° konnte man ausgehend von I einmal zum Gleichgewicht I—III' das andere Mal zum Gleichgewicht I—II gelangen, aber auch bei dieser Temperatur gelangte man von II ausgehend wieder zum Gleichgewicht I—II.

Als nun ein anderes Mal das auf 1000 kg komprimierte Wasser wieder abgekühlt wurde, ergab sich eine *pt*-Linie Fig. 8, Kurve 3, $_{+}$, welche von den beiden ersten Linien sehr erheblich abweicht. Die Linie 3 liegt sehr erheblich unter den Linien 1 und 2 und besitzt ferner zwei deutlich unterschiedene Schmelzintervalle. Nachdem etwa $^{1}/_{6}$ abgeschmolzen war, stieg die Temperatur schneller, etwa um 1°, an. Diese Erscheinung kann entweder dahin gedeutet werden, daß eine instabilere Eisform I‴ zuerst abschmilzt und dann das stabilere Eis I″ zu schmelzen beginnt, oder dahin, daß die ganze Masse des Wassers sich anfangs in der instabilsten Form I‴ befand und diese dann, nachdem etwa $^{1}/_{6}$ derselben geschmolzen war, in die etwas stabilere Form I″ überging.

Die Form I″ schmilzt zwischen 1400 bis 1100 kg um rund 4°.2 tiefer als die Form I, und die Form I‴ um etwa 5°.2 tiefer als die Form I. Die Änderungen des Drucks beim Schmelzen betragen bei der Kurve 1, 590, bei der Kurve 2, 595 und bei der Kurve 3, 595 kg. Dem Volumen nach unterscheidet sich also die Form I‴ nur wenig vom gewöhnlichen Eise I.

Man hat also allen Grund die Existenz von mindestens 4 Formen der Gruppe I anzunehmen. Das gewöhnliche Eis I, das Eis I′, dessen Schmelzpunktsdifferenz gegen das gewöhnliche Eis bei 2200 kg etwa 0.15° beträgt, und die noch weniger stabilen Eisformen I″ und I‴ mit erheblich viel tieferen Schmelzpunkten. Ob die Form I′ mit dem Eise IV[1]), welches ebenfalls zur Gruppe I gehört identisch ist, läßt sich nicht behaupten, wahrscheinlich ist es aber nicht, da eine spontane Umwandlung des Eises I′ nie auch während des Schmelzens beobachtet wurde, während für das sogenannte Eis IV, dessen Bezeichnung natürlich einmal zu ändern ist, gerade die spontane Umwandlungsfähigkeit eigentümlich ist. Dazu kommen noch die von E. Nordenskiöld[2]) und Barendrecht[3]) beobachteten und kristallographisch untersuchten offenbar instabilen Formen der Gruppe I. Es wäre also möglich, daß zur Gruppe I nicht weniger als 7 Formen, die instabiler als das gewöhnliche Eis sind, gehören.

---

1) Zeitschr. f. phys. Chem. 62, 630 (1910).
2) Pogg. Ann. 114, 115 (1861).
3) Zeitschr. f. phys. Chem. 20, 240 (1896).

Gibt es eine Form der Gruppe I, die stabiler ist als das gewöhnliche Eis?

Die Entscheidung dieser Frage wäre von Bedeutung, da vom Schmelzpunkt des Eises klimatische Verhältnisse abhängen, und mit diesen Siedlungsbedingungen und Verkehrsfragen zusammenhängen.

Eine Eisform, die stabiler als das gewöhnliche Eis wäre, hätte einen höheren Schmelzpunkt als das gewöhnliche Eis, infolgedessen würde die spontane Bildung desselben oder das Impfen eines Flusses, dessen Wasser in Bezug auf das stabilste Eis unterkühlt ist, das Klima verschlechtern, eine unvermittelt eintretende und dauernde Eiszeit verursachen. In welchem Grade diese Folgeerscheinungen auftreten, würde von der Differenz der Schmelzpunkte des stabileren und des gewöhnlichen Eises abhängen.

Die Wahrscheinlichkeit der Bildung einer stabileren Eisart aus dem gewöhnlichen Eise würde unter der Annahme, daß alles Eis auf der Erdoberfläche gewöhnliches Eis ist, sich in folgender Weise berechnen. Wählt man als Einheiten die Minute und das Gramm, so würde der reziproke Wert des Produktes aus der gesamten Eismenge in gr und der Existenzdauer dieser Eismasse in Minuten die obere Grenze der Wahrscheinlichkeit für die Bildung einer stabileren Eisform aus der existierenden Eismasse angeben. Diese Wahrscheinlichkeit ist allerdings ganz außerordentlich gering, wenn die Voraussetzung, daß altes arktisches Eis mit unserem gewöhnlichen Eise identisch ist, zutrifft.

Aber gerade hierüber scheinen unsere Kenntnisse noch nicht genügend sichere zu sein, denn vergleichende Schmelzpunktsbestimmungen an altem arktischen Eise mit dem bei Impfung seines Schmelzwassers durch gewöhnliches Eis erhaltenem Eise scheinen nicht vorzuliegen.

Es wäre nicht unmöglich, daß sehr altes arktisches Eis stabiler ist als das gewöhnliche Eis, welches seinen Kristallisationsursprung wohl hauptsächlich in der Atmosphäre hat. Wenn ferner die lineare Umwandlungsgeschwindigkeit des stabileren Eises im gewöhnlichem Eise klein wäre, so ist es denkbar, daß unter einer sich beständig erneuernden Schicht gewöhnlichen Eises eine stabilere Eisart läge, und daß ihre Existenz sich unserer Kenntnis nur deshalb entzieht, weil die Wahrscheinlichkeit der Bildung eines Kristallisationszentrums des stabileren Eises in der Atmosphäre sehr viel kleiner ist als die der Bildung eines solchen Zentrums im gewöhnlichen Eise. Diese Fragen könnten, wenn sich die Auf-

merksamkeit der Polarforscher auch diesen Fragen zuwenden würde, beantwortet werden.

Das spontane Umwandlungsvermögen, die Zahl der Bildungszentren einer neuen Phase in einer schon vorhandenen, hängt, wie die Erfahrung gelehrt hat, bei demselben Stoffe in hohem Maße von der Natur der Phase, in der die spontane Bildung stattfindet, ab, es wäre daher möglich, daß, wenn auch die Wahrscheinlichkeit der Bildung einer stabileren Form im gewöhnlichen Eise sehr gering sein sollte, die Wahrscheinlichkeit für die anderen Eisarten der Gruppen II, III, V und VI sehr viel größer ist.

Bei den Gruppen II und III, deren Zustandsfelder an das der Gruppe I grenzen, genügt zur Herstellung der Formen der Gruppe I eine Volumenvergrößerung bei konstanter Temperatur. Bei den Gruppen V und VI, deren Zustandsfelder denen der Gruppe I nicht benachbart sind, müßte zuerst das Eis V resp. VI soweit abgekühlt werden, daß man ihr Volumen vergrößern kann, ohne daß bei Überschreitung ihrer Feldgrenzen eine Umwandlung eintritt, bis der Druck in das Feld I gelangt. Bei der hierauf folgenden Erwärmung muß sich direkt oder indirekt aus den Eisarten der Gruppen V resp. VI eine Form der Gruppe I bilden.

Versuche, aus dem Eise II durch Volumenvergrößerung bei -70° Formen der Gruppe I zu erzeugen, ergaben immer das Eis I, aber aus dem Eise III′, aus dem sich in der Regel das Eis I′ bildet, wurde bei einem Versuch eine Eisform erhalten, welche ihrer *pt*-Linie nach zu urteilen, stabiler als das Eis I war.

In Fig. 8 beziehn sich die *pt*-Linien auf in folgender Weise hergestellte Eispräparate: Die Linie 4, Kreise, auf Eis, das aus Wasser bei 200 kg zu krystallisieren begann, die Linie 5, liegende Kreuze, auf Eis, das aus Wasser bei 1000 kg sich zu bilden anfing, und die Linie 6, Punkte, auf Eis, das aus dem unter Kontraktion bei 3000 krystallisierenden Eise, welches wahrscheinlich ein Gemenge von III und III′ war, durch Volumenvergrößerung bei -30° hergestellt war. Die *pt*-Linie dieses Präparates liegt im Schmelzgebiet um etwa 1° höher als die der beiden anderen Eispräparate Die Druckänderungen beim Schmelzen betragen bei der Linie 4 für 9.99 gr 455, bei der Linie 5 für 9.99 gr 455 und bei der Linie 6 für 8.42 gr 385 kg. Auf je 10 gr bezogen, betragen die Druckabnahmen beim Schmelzen 455, 455 und 457 kg. Die Druckänderungen sind innerhalb der Fehlergrenzen einander gleich, das Volumen der Eisart mit den um etwa 1° höheren Schmelztemperaturen unterscheidet sich also nur innerhalb der Fehlergrenzen von 1—2 % vom Volumen des gewöhnlichen Eises. Das

Entstehen der stabileren Eisarten tritt aber selten ein; bei 10 Versuchen wurde sie nur einmal beobachtet.

Die mit den beiden Hauptsätzen verträgliche, von der Atomistik aus einfach zu deutende Klassifizierung der Formen eines Stoffes in Gruppen ist durch die Erfahrung wesentlich gestützt worden. Es hat sich das Klassifikations-Prinzip, das eine Verwandtschaft der ζ-Flächen der Formen einer Gruppe, die sich darin äußert, daß sich die ζ-Flächen der Formen einer Gruppe nicht untereinander schneiden, bewährt. Der Grund hierfür ist in einer Verwandtschaft der Zustandsgleichungen der Formen einer Gruppe, welche den der Formen verschiedener Gruppen fehlt, zu suchen.

Auf Grund der Tatsache, daß zur Gruppe I mindestens 4, zur Gruppe III mindestens 2 Formen gehören, darf man mit großer Wahrscheinlichkeit behaupten, daß die Zahl der Formen in den 4 bekannten Gruppen noch erheblich vermehrt werden wird [1]. Mit der Zahl der Wege, die zur Erzeugung einer Form eingeschlagen werden können, wächst auch die Wahrscheinlichkeit, ihre Zahl zu vermehren. Für die Gruppe II ist offenbar nur deshalb eine Form bekannt, weil dieselbe bisher nur aus I hergestellt wurde, da die Unterkühlungsfähigkeit von III oder III′ bisher die Herstellung

1) Bridgman (Zeitschr. f. anorg. Chem. 77 S. 433 u. 440, 1912) fand, daß 5 Punkte der Schmelzkurve von VI im Zustandsfelde von V um 0.5—1°.0 höher lagen als bei der Wiederholung der Bestimmung mit neu hergestelltem Eise VI. Die Volumenänderungen beim Schmelzen, welche diesen abnorm hohen Punkten entsprechen, waren um 8—10% kleiner als die den tieferliegenden Schmelzpunkten von VI entsprechenden Volumenänderungen.

Nach der Lage jener fünf Punkte bei Temperaturen oberhalb der normalen Schmelzkurve von VI hätte man diese Punkte als die Schmelzpunkte einer stabileren Eisform VI anzusprechen. Dann aber hätten die ihnen entsprechenden Volumenänderungen größer sein sollen als die der tieferliegenden Punkte. Es besteht also hier noch eine Unsicherheit, die eine Aufklärung erfordert, bevor man mit Sicherheit behaupten könnte, daß auch zur Gruppe VI mehr als eine Form gehört.

Auf der Schmelzkurve von VI nehmen nach Bridgman die Volumenänderungen beim Schmelzen mit steigender Temperatur zuerst langsam, dann schneller und schließlich wieder langsamer ab. Bridgman glaubt, daß sich die Volumenänderungen mit steigender Temperatur asymptotisch dem Nullwert nähern werden, ein trifftiger Grund hierfür existiert wohl nicht. Die weitere Vermutung Bridgmans, daß, wenn jene willkürliche Annahme über die Temperaturabhängigkeit der Volumenänderungen zutrifft, die Schmelzkurve von VI zu unbegrenzten Drucken und Temperaturen ansteigen sollte, kann mit der ersten Annahme nicht in Einklang gebracht werden.

von II aus diesen beiden Formen behinderte. Aus dem Zustandsdiagramm ergeben sich zur Herstellung von II aber noch andere Wege, auf denen man wahrscheinlich zu neuen Formen der Gruppe II gelangen wird. Je mehr die Zahl der Formen vermehrt werden wird, umsomehr wird die Notwendigkeit und Nützlichkeit der Einteilung der Formen in Gruppen zu Tage treten, umsomehr wird die Möglichkeit, daß jeder Form ein stabiles Zustandsfeld entsprechen könnte, welche vor Einführung der Hypothese, auf der die Einteilung in Gruppen beruht, bestand, ausgeschlossen.

Die Einführung dieser Hypothese vereinfacht die Zustandsdiagramme, indem sie die Zahl der sonst möglichen Gleichgewichtslinien und Tripelpunkte verringert, sie vereinigt die Formen mit gleichen Molekülen zu einer Gruppe und trennt die Formen mit verschiedenen Molekülen.

Vorbericht für den von der Kommission der Wolfskehlstiftung veranstalteten Zyklus von Vorträgen über die kinetische Theorie der Materie.

Die gegenwärtige Bedeutung der Quantenhypothese für die kinetische Gastheorie.

Von M. Planck in Berlin.

I. Erläuterung und Begrenzung des Themas.

Daß die Quantenhypothese auch für die Wechselwirkungen ponderabler Moleküle Bedeutung besitzt, ist zu schließen aus der Tatsache, daß die spezifische Wärme kondensierter Körper mit abnehmender Temperatur unbegrenzt abnimmt, in Verbindung mit der anderen Tatsache, daß die Kompressibilität kondensierter Körper bei abnehmender Temperatur einen endlichen Wert behält. Eine besonders scharfe Prüfung für die Zulässigkeit der Quantenhypothese wird in dem Gebiet anzustellen sein, auf welchem die klassische Molekulartheorie ihre größten Erfolge erzielt hat: dem der kinetischen Gastheorie, und zwar speziell der Theorie idealer einatomiger Gase. Für die Entropie eines solchen Gases liefert die Quantenhypothese den Ausdruck

$$S = kN\left\{\frac{5}{2}\,lnT - lnp + ln\left[(2\pi em)^{\frac{3}{2}}\frac{k^{\frac{5}{2}}}{g}\right]\right\} \tag{1}$$

wobei g das „Elementargebiet der Wahrscheinlichkeit" vorstellt, während in der klassischen Theorie das letzte additive Glied unbestimmt bleibt. Die Größe dieser Konstanten besitzt keine physikalische Bedeutung, so lange das Gas im idealen Zustand verbleibt; sie kommt aber zur Geltung bei jeder Umwandlung des Gases, z. B. bei der Kondensation. Damit jedoch das Gas auch im Sättigungszustand sich wie ein ideales verhält, muß die Temperatur hinreichend tief genommen werden. Auf diesen Fall beschränken

sich daher die folgenden Betrachtungen. Dann folgt aus der Differenz der Entropien des gasförmigen und des kondensierten Zustandes

$$S_g - S_c = \frac{Q}{T} \qquad (Q \text{ Verdampfungswärme})$$

die Gleichung für die Spannung des gesättigten Dampfes:

$$(2) \qquad lnp = -\frac{r_0}{kT} + \frac{5}{2} lnT + ln\left[(2\pi m)^{\frac{3}{2}} \frac{k^{\frac{5}{2}}}{eg}\right].$$

(r_0 die molekulare Verdampfungswärme beim Temperaturnullpunkt.)
Das letzte additive Glied ist die Nernstsche „chemische Konstante". Nach O. Sackur und H. Tetrode ist $g = h^3$, wenn h das aus der Wärmestrahlung abgeleitete elementare Wirkungsquantum bezeichnet.

II. Emissionsgesetz der Verdampfung.

Um aus der statistischen Bedeutung des Wirkungsquantums g, beziehungsweise h, die dynamische abzuleiten, kann man folgenden Weg einschlagen. Ein ideales einatomiges Gas befinde sich, bei hinreichend tiefer Temperatur, im thermodynamischen Gleichgewicht mit einer kondensierten Phase. Dann läßt sich aus dem Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz die Anzahl der Atome bestimmen, welche in einer bestimmten Zeit die Oberfläche des kondensierten Körpers in einer bestimmten Richtung mit einer bestimmten Geschwindigkeit treffen. Dieselbe ist wegen des Sättigungszustandes durch die Temperatur allein bestimmt. Nimmt man nun an, daß von diesen Atomen keines direkt reflektiert, sondern alle in der kondensierten Phase aufgefangen werden, so folgt, daß im thermodynamischen Gleichgewicht von dem kondensierten Körper durch die Oberfläche genau die nämliche Anzahl von Atomen mit der nämlichen Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung nach außen emittiert wird. Da aber die Emission unabhängig sein wird von der gleichzeitigen Absorption, so ergibt sich als Emissionsgesetz der Verdampfung die absolute Zahl der durch ein Oberflächen-Element $d\sigma$ eines kondensierten Körpers emittierten Atome für das Zeit-Element dt und das Geschwindigkeitsintervall zwischen q und $q + dq$ in der Richtung des Elementarkegels $d\Omega$, der den Winkel ϑ mit der Normalen von $d\sigma$ bildet:

$$(3) \qquad \frac{m^3 q^3}{g} \cdot e^{-\frac{mq^2}{2kT} - \frac{r_0}{kT} - 1} . \cos\vartheta . d\sigma . d\Omega . dq . dt.$$

Dieser Ausdruck beansprucht Gültigkeit nur für tiefe Temperaturen, aber für beliebig kleine und große Werte der Geschwindigkeit q.

III. Zur kinetischen Theorie kondensierter einatomiger Körper.

Die dynamische Begründung des vorstehenden Emissionsgesetzes erfordert ein Eingehen auf die Schwingungsvorgänge in einem kondensierten Körper. Die Anzahl der Schwingungen zwischen den Schwingungszahlen ν und $\nu + d\nu$ ist nach den Untersuchungen von P. Debye, sowie von M. Born und Th. von Kármán für das Volumen V bei tiefer Temperatur:

$$12\pi \frac{V}{c_m^3} \nu^2 d\nu, \tag{4}$$

(c_m ein Mittelwert für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit)

und die Anzahl derjenigen dieser Schwingungen, deren Energie zwischen $(n-1)h\nu$ und $nh\nu$ liegt, ist nach der Hypothese der Quantenemission:

$$\frac{12\pi V \nu^2 d\nu}{c_m^3}\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right) e^{-\frac{nh\nu}{kT}}. \tag{5}$$

Nun liegt es weiter nahe anzunehmen, daß Emission eines Atoms nur dann eintritt, wenn die Schwingungsenergie ein ganzes Vielfaches von $h\nu$ geworden ist, und daß dabei die ganze Schwingungsenergie sich in kinetische Energie des emittierten Atoms verwandelt:

$$nh\nu = \frac{1}{2} mq^2. \tag{6}$$

Die Zeit, welche vergeht, bis die Energie einer Schwingung durch Absorption von Wärmestrahlung um den Betrag $h\nu$ gewachsen ist, ist proportional

$$\frac{1}{\nu^3}\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right). \tag{7}$$

Aus diesen Daten läßt sich noch nicht das Emissionsgesetz durch die Oberfläche des Körpers ableiten, schon weil hierfür noch in Betracht kommt, daß die emittierten Atome zum größten Teil im Innern wieder aufgefangen werden. Immerhin wird bei einer Überschlagsrechnung die Emission durch die Oberfläche, für ein bestimmtes ν und ein bestimmtes n, proportional zu setzen sein dem Ausdruck (5) und umgekehrt proportional dem Ausdruck (7),

also, für $V = \lambda^3 = \frac{c_m^3}{\nu^3}$, proportional dem Ausdruck:

$$e^{-\frac{nh\nu}{kT}} . \nu . d\nu. \tag{8}$$

Einer bestimmten Geschwindigkeit der emittierten Atome entsprechen bestimmte diskrete Werte von ν, die sich aus (6) ergeben, wenn man darin für n die Zahlen 1, 2, 3, ... setzt. Dann wird die Anzahl der mit einer zwischen q und $q + dq$ liegenden Geschwindigkeit emittierten Atome nach (8) proportional:

$$\sum_1^\infty e^{-\frac{mq^2}{2kT}} \cdot \frac{1}{2} \frac{mq^2}{nh} \cdot \frac{mqdq}{nh} = \frac{1}{2} \frac{m^3 q^3 dq}{h^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{mq^2}{kT}} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right), \tag{9}$$

ein Ausdruck, der in seiner Abhängigkeit von T und q ganz dem oben gefundenen Emissionsgesetz (3) entspricht.

Zustandsgleichung und Quantenhypothese.

Von P. Debye in Utrecht.

Der Hauptzweck der kinetischen Theorie der Materie ist die Berechnung der sogenannten Zustandsgleichung, d. h. im einfachsten Falle der Beziehungen zwischen Druck, Volumen, Temperatur, Energie aus den als bekannt vorausgesetzten Eigenschaften der Atome und der Atombindungen. Die statistische Mechanik hatte diese Aufgabe in umfassender und dazu sehr einfacher Weise gelöst. Im Anschluß an die Thermodynamik kann zunächst vorangestellt werden, daß die uns interessierenden Beziehungen dann vollständig bekannt sind, wenn eines der vielen thermodynamischen Potentiale bekannt ist. Wählen wir dafür die freie Energie F von Helmholtz, so ist bekanntlich

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} \qquad S = -\frac{\partial F}{\partial T} \qquad U = F - T\frac{\partial F}{\partial T}$$

(p = Druck, V = Volumen, S = Entropie, T = Temperatur, U = Energie).

Das Resultat der statistischen Mechanik kann nun mit Bezug auf F folgendermaßen formuliert werden:

Ist der Bewegungszustand des Körpers definiert durch die Lagenkoordinaten $q_1, q_2, \ldots$ und die Impulskoordinaten $_1$, $_2$ .. und kennen wir die Gesamtenergie ε als Funktion dieser Koordinaten, dann ist

$$F = -kT \log \int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} dq_1, dq_2, \ldots, dp_1, dp_2, \ldots$$

(k = Boltzmannsche Konstante = $1{,}35 \cdot 10^{-16}$ erg).

Alle thermodynamischen Eigenschaften des Körpers sind also bekannt nach Berechnung eines einzigen Integrals, das wir das „Zustandsintegral"

$$Z = Z(V,T) = \int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} dq_1 \ldots dp_1 \ldots$$

nennen können.

Nun ist die statistische Mechanik nur richtig im Grenzfalle für hohe Temperaturen und es entsteht die Frage ob dann, wenn wir zur Planckschen Quantentheorie übergehen, vielleicht doch immer noch eine ähnliche Berechnungsweise Gültigkeit haben mag. Ich möchte an Hand des heutzutage ja sowieso besonders interessanten Falles des starren Körpers ein Beispiel für die Richtigkeit unsrer Vermutung liefern.

Beim einatomigen festen Körper nimmt man durchweg an, daß das Hookesche Gesetz erfüllt ist, d. h., daß ε eine quadratische Funktion der Verschiebungen $q_1, q_2, \ldots$ und der Impulse $p_1, p_2, \ldots$ der einzelnen Atome ist. Wollen wir ausgehend von dieser Annahme das Zustandsintegral Z berechnen, dann empfiehlt sich die Einführung neuer Variabelen $Q_1, Q_2, \ldots$ und $P_1, P_2, \ldots$ so gewählt, daß ε einer Summe von Quadraten gleich wird. Haben wir die „Eigenfunktionen" $Q_1, Q_2, \ldots$ eingeführt, dann können wir den Körper vollständig charakterisieren durch seine Eigenschwingungszahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ und wir wissen, daß sich ε dann schreiben läßt

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_n (P_n^2 + 4\pi^2 \nu_n^2 Q_n^2),$$

wenn wir die Verschiebungen rechnen in Bezug auf den ursprünglich ungedehnten Zustand des Körpers.

Dehnen wir den Körper durch äußere Kräfte, sodaß sein Volumen von dem Werte V_0 (beim absoluten Nullpunkt gemessen) übergeht in $V_0 + \Delta$, dann können wir schreiben

$$\varepsilon = \frac{1}{2\varkappa} \frac{\Delta^2}{V_0} + \frac{1}{2} \sum_n (P_n^2 + 4\pi^2 \nu_n^2 Q_n^2),$$

wobei $\varkappa$ die Kompressibilität bedeutet.

Die Berechnung von Z liefert

$$Z = e^{-\frac{1}{kT} \frac{\Delta^2}{2\varkappa V_0}} \prod_n \left(\frac{kT}{h\nu_n}\right),$$

wenn wir, um den Anschluß an die späteren Ausführungen zu erhalten, noch den hier sonst belanglosen Faktor h von der Dimension Energie mal Zeit hinzufügen. Die freie Energie wird

$$F = \frac{\varDelta^2}{2\varkappa V_0} - kT\sum_n \log\left(\frac{kT}{h\nu_n}\right)$$

und damit wäre die Aufgabe gelöst.

Ein Körper, für den dieser Wert von F Gültigkeit haben würde, kann indessen durchaus nicht mit den bekannten festen Körpern identifiziert werden. Berechnet man den Druck, so findet man

$$p = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\varDelta}{V_0},$$

m. a. W., wenn $p = 0$ ist, dann ist auch $\varDelta = 0$ für alle Temperaturen, d. h. der Körper dehnt sich nicht aus durch Wärmezufuhr. Für die Energie würde man den Dulong-Petitschen Wert finden, d. h. das für die statistische Mechanik charakteristische Resultat.

Versuchen wir zunächst dem letzteren Übelstand abzuhelfen. Nachdem wir die Q und P an Stelle der q und p eingeführt haben, ist unser Zustandsintegral zerfallen in ein Produkt einzelner Integrale, von denen jedes sich nur auf eine Eigenschwingung bezieht und genau so gebaut ist, wie das entsprechende Integral für einen einzelnen Resonator. Nach einer Bemerkung von Einstein wissen wir nun, daß die Planck sche Quantenhypothese in diesem Falle so interpretiert werden kann, als hätte man in der Koordinaten-Impulsebene nicht alle Punkte mit dem gleichen Gewicht zu zählen. Teilt man die Ebene ein durch Kurven Energie = constant mit Flächeninhalten, welche ganze Vielfache Z des Planck schen Wirkungsquantums h sind, dann ist die Gesamtheit der Punkte jeder solchen Kurve (Ellipse) mit dem Gewichte 1 und alle anderen Punkte der Ebene mit dem Gewicht 0 zu belegen. Überträgt man diese Auffassung auch auf unsren allgemeineren Fall, dann bedeutet das:

An Stelle des Zustandsintegrals tritt ein Produkt von Zustandssummen, von denen jede den Wert hat

$$Se^{-\frac{P_n^2 + 4\pi^2\nu_n^2 Q_n}{2kT}} = Se^{-\frac{zh\nu_n}{kT}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu_n}{kT}}}$$

(h = Plancksches Wirkungsquantum = $6{,}41 \cdot 10^{-27}$ erg. sec.).

So erhält man dann

$$Z = e^{-\frac{1}{kT}\frac{\Delta^2}{2\varkappa V_0}} \prod_n \left(\frac{1}{1-e^{-\frac{h\nu_n}{kT}}} \right)$$

und

$$F = \frac{\Delta^2}{2\varkappa V_0} + kT \sum_n \log \left(1 - e^{-\frac{h\nu_n}{kT}} \right).$$

Überträgt man die Überlegungen über das Spektrum der festen Körper, welche ich neulich entwickelt habe, auf diesen Fall, un setzt also die Anzahl Spektrallinien pro $d\gamma$ gleich

$$qN \frac{\gamma^2 \, d\gamma}{\gamma_{max}^3},$$

(N = Anzahl Atome im Körper)

dann kann man auch schreiben:

$$F = \frac{\Delta^2}{2\varkappa V_0} + \frac{gNkT}{x^3} \int_0^x \xi^2 \log \left(1 - e^{-\xi} \right) d\xi.$$

Die Abkürzung x bedeutet $x = \frac{h\nu_{max}}{kT} = \frac{\Theta}{T}$, also die für den Körper charakteristische Temperatur dividiert durch die absolute Temperatur.

Tatsächlich erhält man aus dieser Formel für F den von mir schon früher angegebenen Ausdruck für die Energie, welcher den Nernstschen Messungen gerecht wird. Aber ebensowenig wie vorher hat unser theoretischer Körper einen Ausdehnungskoëffizienten. Wir müssen also schließen, daß die Konstitution des Körpers anders ist, als wir vorher annahmen und zwar werden wir schließen auf die Unrichtigkeit unsrer im Hookeschen Gesetz zusammengefaßten Grundannahme, m. a. W. die elastischen Gleichungen sind in Wirklichkeit nicht linear. Haben wir in diesem letzteren Falle einen Körper gedehnt, dann werden die Atome um ihre neue Gleichgewichtslage nicht mehr mit derselben Schwingungszahl schwingen können, wie um die ursprüngliche, ähnlich wie die Elektronen, welche Voigt zur Erklärung der elektrischen Doppelbrechung herangezogen hat. Im übrigen bedeutet natürlich die Einführung einer von der Dehnung abhängigen Schwingungszahl nur eine erste Näherung. Bleiben wir dabei stehen, dann kommen wir also für F wieder zur eben genannten Formel.

Nur ist jetzt v_{max} und damit Θ nicht mehr von der Dilatation Δ unabhängig. Entwickeln wir Θ in der Form:

$$\Theta = \Theta_0\left(1 - a\frac{\Delta}{V_0}\right),$$

dann mißt die Konstante a die Abweichung von der Linearität. Unsre Behauptung geht nun dahin, daß der zuletzt für F abgeleitete Ausdruck tatsächlich die freie Energie eines wirklichen festen Körpers darstellt, wenn wir setzen:

$$x = \frac{\Theta}{T} = \frac{\Theta_0}{T}\left(1 - a\frac{\Delta}{V_0}\right)$$

und für $\varkappa$ die Kompressibilität beim absoluten Nullpunkt $\varkappa_0$ substituieren.

Aus dem Ausdruck für F folgt

$$-p = \frac{\Delta}{\varkappa_0 V_0} - \frac{a}{V_0}\frac{gNkT}{x^3}\int_0^x \frac{\xi^3 d\xi}{e^{\xi} - 1} \cong \frac{\Delta}{\varkappa_0 V_0} - \frac{aU_0}{V_0}.$$

Für $p = 0$ wird also für tiefe Temperaturen

$$\Delta = a\varkappa_0 U_0,$$

d. h. proportional der Konstante a, der Kompressibilität und der Energie U, oder näherungsweise gerechnet U_0, d. h. unter Benutzung des Grenzwertes Θ_0 von Θ. Damit haben wir den Grüneisenschen Satz erhalten, wonach Ausdehnungskoëffizient und spezifische Wärme mit einander proportional sind. Nach unsrer Theorie muß deshalb der Ausdehnungskoëffizient bei tiefen Temperaturen proportional T^3 werden. Ebenso findet man, daß mit zunehmender Temperatur die Kompressibilität zunimmt und zwar im Gebiete der tiefen Temperaturen proportional T^4. Überhaupt können auf Grund des einmal für F erhaltenen Ausdrucks alle Fragen über die Zustandsgrößen des festen Körpers beantwortet werden.

Man kann nun aber weitere mit irreversibelen Prozessen in Verbindung stehende Eigenschaften in den Kreis der Betrachtungen ziehen und z. B. nach Wärmeleitfähigkeit, innere Reibung, usw. fragen. Eine Bemerkung in Bezug auf die erstere möge hier noch Platz finden. Kehrt man wieder zum Hookeschen Gesetz zurück und denkt in Übereinstimmung mit unsren Grundannahmen die Wärmebewegung als hin- und herlaufende elastische Wellen, dann ist leicht einzusehen, daß ein Zustand möglich ist bei dem z. B. in einem Stab von links nach rechts mehr „Wärme“ fließt‘

als von rechts nach links, ohne daß Energieunterschiede längs des Stabes sich bemerkbar machen. In diesem Sinne hat also der „ideale“ feste Körper eine unendlich große Leitfähigkeit. Bedenkt man nun, daß die wirklichen Körper um so eher mit einem idealen, dem Hookeschen Gesetz genügenden Körper identifiziert werden können, je tiefer die Temperatur ist, und hält daneben den Befund von Eucken, wonach die Wärmeleitfähigkeit kristallinischer Körper umgekehrt proportional T wächst, dann ist die Ähnlichkeit beider Resultate nicht zu verkennen. Wir erwarten dann auch von einer mit Rücksicht auf die Nicht-Linearität der Bewegungsgleichungen vervollständigten Theorie eine Erklärung jener frappanten Messungen. Kehren wir wieder zur Zustandsgleichung zurück und überblicken das Ergebnis nach Einführung der Quantentheorie, dann können wir die Aufgabe derselben erblicken in der Angabe der richtigen Berechnungsweise für das Zustandsintegral und vermuten, daß alles andere unverändert bestehen bleiben kann, wie sich das hier in einem speziellen Falle bewährt hat.

Utrecht, 10. Februar 1913.

Zur Theorie des festen Aggregatzustandes.

Von W. Nernst in Berlin.

Die kinetische Theorie des festen Aggregatzustandes hat man bisher lediglich auf anziehende und abstoßende Kräfte zwischen den Molekülen basiert. Zweifellos sind damit gewisse Erfolge erzielt worden, wie vor allem die neueren Arbeiten Grüneisens zeigen. Es scheint aber sicher, daß diese Auffassung nur provisorischer Natur ist; für die Erklärung der Quantentheorie (vergl. weiter unten) versagt sie bisher.

Wahrscheinlich sind die Kräfte, welche in Kristallen die einzelnen Atome oder Molekühle an ihre Ruhelage festhalten, im wesentlichen identisch mit den chemischen Kräften, die man bekanntlich als gerichtete Kräfte ansieht und für welche die Kraftgesetze nicht nur nicht bekannt, sondern wahrscheinlich von den bisherigen ganz verschiedener Natur sind.

Als wichtigste Eigenschaft der festen Körper ist ihr Energieinhalt zu bezeichnen, der durch die Messung der spezifischen Wärme bis zu möglichst tiefen Temperaturen hinab ermittelt werden kann. Die hierfür ausgearbeiteten Methoden sollen daher kurz beschrieben werden.

Ganz neues Licht hat die Quantentheorie auf viele Eigenschaften der festen Stoffe geworfen. In erster Linie läßt sich in gewissen einfachen Fällen die spezifische Wärme, wie insbesondere die neueren Arbeiten von Debye einerseits, von Born und v. Kármán andererseits zeigen, sowohl in ihrem absoluten Betrage, wie auch in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur berechnen. Ferner lassen sich von ähnlichen Gesichtspunkten aus die elastischen Eigenschaften, der Schmelzpunkt und die elektrische Leitfähigkeit der Metalle behandeln. Aus der Quantentheorie läßt sich der Satz ableiten, daß die Eigenschaften fester Stoffe bei tiefen Temperaturen von der Temperatur unabhängig werden; dieses Resultat fällt übrigens im wesentlichen zusammen mit dem vom Referenten bereits früher aufgestellten Wärmesatze.

Das wichtigste Problem für die Theorie des festen und speziell des kristallisierten Zustandes dürfte darin bestehen, den Schwingungszustand der Atome im Molekülkomplex, und ferner denjenigen des Schwerpunktes des letzteren möglichst sicher festzustellen. Die Theorie der Schwingungen der Atome im Molekül fester Körper scheint nach den gleichen Prinzipien zu behandeln zu sein, wie diejenige der Atome im Gasmoleküle; die Theorie läßt sich wohl jetzt schon in gewissen einfachen Fällen so weit führen, daß die Molekulargröße vieler Elemente und auch einfacherer Verbindungen, wie $NaCl$, H_2O, $HgCl$ aus einer genauen Bestimmung der spezifischen Wärme in möglichst weiten Temperaturintervallen abgeleitet werden kann.

Gültigkeitsgrenzen des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie.

Von M. v. Smolukowski.

Wird der zweite Hauptsatz in einer der üblichen Formen ausgesprochen, wie z. B.: „Wärme kann nicht von selbst aus einem

kälteren in einen wärmeren Körper übergehen", oder: „Ein Kreisprozeß, bei welchem Arbeit auf Kosten der Wärme niedrigster Temperatur erzeugt würde, ist unmöglich", oder: „Die Entropie eines abgeschlossenen Systems kann im Laufe der Zeit nur zunehmen", so besteht sicher ein Widerspruch mit der atomistisch kinetischen Theorie, welche eine prinzipielle Umkehrbarkeit aller Prozesse verlangt. Doch suchte Boltzmann bekanntlich nachzuweisen, daß auch der kinetischen Theorie zufolge die Vorgänge im Allgemeinen mit der Thermodynamik übereinstimmen müßten, und daß die theoretisch zu erwartenden Ausnahmefälle wegen ihrer großen Unwahrscheinlichkeit im Allgemeinen nicht bemerkbar seien, während andererseits die Phänomenologen im Vertrauen auf die absolute Richtigkeit der obigen Sätze die kinetische Theorie überhaupt verwarfen.

Nun ist heute nachgewiesen, daß tatsächlich eine Reihe von experimentell bequem zugänglichen Mikro-Phänomenen existiert (z. B. Brownsche Molekularbewegung, Opaleszenzerscheinungen, automatische Konzentrations-Schwankungen in Emulsionen), welche eben darauf beruhen, daß der wirkliche Zustand vom thermodynamisch zu erwartenden „normalen Gleichgewicht" merklich abweicht. Die exakte Giltigkeit jener Sätze ist also durch die Erfahrung widerlegt, und der Standpunkt der dogmatischen Thermodynamik ist unhaltbar geworden. Ob und inwieweit dieselben jedoch als angenähert giltig zu betrachten sind, kann man heute nur vom Standpunkt der Maxwell-Boltzmann-Gibbsschen statistischen Mechanik beurteilen, welche in den obigen Erscheinungen eine greifbare Bestätigung und teilweise auch Weiterbildung erfahren hat.

Bezeichnen wir als „Mikrozustand" eines molekularen Gebildes den Inbegriff der Koordinaten und Momente seiner sämtlichen Moleküle. Dann ist für die Anwendbarkeit der statistischen Mechanik die Bedingung wesentlich, daß das betrachtete System jedem (kinematisch möglichen und mit dem Energiesatz verträglichen) Mikrozustand im Laufe der Zeit beliebig nahekommt. Es folgt aus derselben ohne weiteres: 1) der Satz von Poincaré, daß der Mikrozustand in gewissem Sinne quasi periodisch ist, indem immer eine endliche Zeitdauer existiert, nach deren Ablauf der Zustand innerhalb beliebig enger Grenzen dem Anfangswerte wieder nahekommt. Die Länge dieses Poincaré-Zermelo-Zyklus ist natürlich nur insoweit definiert, als die Größe des Coinzidens-Gebietes vereinbart ist; Boltzmanns, allerdings nicht ganz strenge Berechnung zeigt jedenfalls, daß es sich dabei schon für einen Cubik-

zentimeter Gas um ganz kolossale Zeiträume handelt. Die Fälle, wo es eine exakte Coinzidenz gibt, wo also die Bewegung genau periodisch ist, bilden singuläre Ausnahmefälle, welche ein von den Gesetzen der statistischen Mechanik abweichendes Verhalten aufweisen, da die oben erwähnte Bedingung nicht erfüllt ist.

Es folgt 2) mit Benützung des Liouvilleschen Satzes bekanntlich, daß alle Mikrozustände in sehr langen Zeiträumen gleich wahrscheinlich sind.

Dagegen gilt von den experimentell beobachtbaren Makrozuständen etwas ganz anderes. Dem Makrobeobachter erscheinen zwei Zustände gleich, falls in beiden Fällen gleichviel Moleküle sich in den kleinsten physikalisch unterscheidbaren Zustandsgebieten befinden, ganz ohne Rücksicht auf die Individualität der Moleküle. Während eines solchen Poincaré-Zyklus werden sich also die beobachtbaren Makrozustände im Allgemeinen eine große Anzahl von Malen angenähert wiederholen, aber mit ungleicher Häufigkeit, und zwar sind die weitaus häufigsten nahe gleich dem der größten Anzahl günstiger Permutationen (d. i. dem idealen Maximum der Entropie) entsprechenden thermodynamischen „Normalzustande". Die mittlere Abweichung einer den Zustand bestimmenden Koordinate von jenem Normalzustand läßt sich mittels einfacher Formeln berechnen; die ihr entsprechende Arbeitsleistung ist (im gewöhnlichen Fall einer stabilen Normallage) gleich der Hälfte der mittleren kinetischen Energie eines Moleküls.

Es kommen aber im Laufe der Zeit auch größere, ja sogar beliebig große Zustands-Abweichungen vor, welchen abnorm kleine Werte der Entropie entsprechen, und zwar wird im Verlaufe eines Poincaré-Zyklus ein jeder solcher Zustand ebenso häufig im Stadium wachsender, wie im Stadium abnehmender Entropie durchschritten; das heißt: alle diese Vorgänge sind reversibel, oder besser gesagt, revertierend, wiederkehrend.

In kleinem Maßstabe kann man das direkt experimentell beobachten, am einfachsten beispielsweise, indem man zusieht wie sich die Anzahl der in einem gegebenen Volum einer Emulsion befindliche Anzahl von suspendierten Teilchen automatisch verändert. Man kann beispielsweise Svedbergs derartige Versuche geradezu als eine Demonstration der Umkehrbarkeit der Diffusionsvorgänge auffassen. Daß man für gewöhnlich bei den Prozessen der Diffusion, Reibung, Wärmeleitung nur ein irreversibles Verhalten bemerkt, rührt nur davon her, daß man in der makroskopischen Praxis in der Regel von Anfangszuständen ausgeht, welche weit über den Betrag der mittleren Schwankungen vom Normalzustand

abweichen, also im Sinne der Atomistik außerordentlich unwahrscheinlich sind, somit meist erst nach einer ungemein langen, praktisch gar nicht realisierbaren Zeit wiederkehren würden.

Durch jeden solchen „abnormalen" Zustand gehen Zustandskurven aller möglichen Richtungen, aber die Dichte der Kurvenscharen nimmt mit wachsender Abweichung sehr stark ab, so daß schon nach sehr kurzer, positiver oder negativer, Zeitdauer mit ungemein großer Wahrscheinlichkeit eine Zunahme der Entropie zu erwarten ist. Dieses mittlere wahrscheinliche Verhalten wird durch die Differentialgleichungen der phänomenologischen Diffusions-, Reibungs- und Wärmeleitungstheorien beschrieben. Es kommen natürlich auch bei diesen scheinbar irreversiblen Prozessen zufällige molekulare Abweichungen von den normalen phänomenologischen Gesetzen vor, welche jedoch bis jetzt weniger untersucht sind und auch minder merkwürdig erscheinen, als die vorher besprochenen Abweichungen vom normalen Gleichgewichtszustand.

Handelt es sich uns um den Absolutbetrag der Abweichung vom Normalzustand, so sind jene Theorien überhaupt nur für Zustände benützbar, welche den Bereich der mittleren Abweichung erheblich überschreiten. Für Zustände die innerhalb jenes Bereiches liegen, erfolgt die Änderung im allgemeinen sogar im entgegengesetzten Sinne (entsprechend einer Abnahme der Entropie).

Im Ganzen führt also die statistische Mechanik zum Resultate, daß die Entropie ebensogut zunehmen wie abnehmen kann, daß Wärme von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann — sogar die ganze Sonnenwärme ist ja vielleicht nur als eine solche automatisch eingetretene Ansammlung von Wärme innerhalb eines im Gleichgewichtszustand befindlichen Systems anzusehen —, aber die Wahrscheinlichkeit einer solchen Ansammlung nimmt ganz außerordentlich rascher ab als deren Größe, sobald man über den Bereich der mittleren Schwankung hinausgeht. Da nun die Wahrscheinlichkeit dem „Zeitmittel" entspricht, würden die Sätze der üblichen Thermodynamik in etwas eingeschränkter Formulierung aufrecht erhalten bleiben, z. B. „Wärme kann nicht dauernd von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen" oder: „Es kann keine, Wärme niedrigster Temperatur verbrauchende, automatische Maschine geben, welche eine dauernde Arbeitsquelle von endlicher Ergiebigkeit bilden würde". Eine solche Formulierung genügt auch zur Ableitung der üblichen Anwendungen in entsprechend eingeschränkter Form.

Man kann sich auch durch direkte Betrachtungen plausibel machen, daß man tatsächlich jene Schwankungen weder mit Hilfe

eines mechanischen Ventils noch z. B. mit Hilfe einer automatischen, optischen oder elektrischen Auslöse-Vorrichtung zur Herstellung eines dauernd wirkenden perpetuum mobile zweiter Art ausnützen kann. Soweit unsere jetzigen Kenntnisse reichen, wäre hierzu ein „Dämon“ nötig, welcher 1) ohne Sinneseindrücke zu empfangen, in jedem Momente wüßte, in welchem Mikrozustande das molekulare System sich befindet, und voraus wissen würde, wie es sich weiter bewegt; 2) die Bedingungen für das Eintreten des molekularen Vorganges so beherrschen würde, daß er ohne Arbeit zu leisten denselben beliebig oft in Gang setzen und zum Stillstand bringen könnte. Ein Lebewesen molekularer Konstruktion würde weder die eine noch die andere Bedingung erfüllen.

Man könnte denken, es genüge zur Herstellung eines perpetuum mobile von dauernder Ergiebigkeit, den makroskopischen Zustand eines molekularen Gleichgewichts-Prozesses zu beobachten, den letzteren zu unterbrechen, wenn sich eine bestimmte einseitige Energie-Abweichung zufällig einmal von selbst eingestellt hat, und dieses Spiel in derartigen, regelmäßigen Intervallen beliebig oft zu wiederholen. Das scheint auf einem Fehlschluß zu beruhen, ebenso wie in einem analogen Glücksspiele: es läßt sich nämlich leicht nachweisen, daß in letzterem Falle die zur Erreichung eines vorgegebenen einseitigen Überschusses durchschnittlich nötige Anzahl von Würfen nicht gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert.

Probleme der freien Weglänge.

Von A. Sommerfeld in München.

I. Methodisches über Einführung und Benutzung der freien Weglänge.

1. Die freie Weglänge wird unter Vermeidung spezieller Annahmen durch ein Absorptionsgesetz definiert. 2. Der Transport einer Größe pro Flächen- und Zeiteinheit wird nach Debye für ein beliebiges Verteilungsgesetz berechnet. Die etwas paradoxe Annahme, daß der letzte Zusammenstoß im Abstande λ erfolgt sei, braucht nicht gemacht zu werden. 3. Unter gewissen Näherungsannahmen fällt aus dem Quotienten Wärmeleitungskoëffizient $\varkappa$ durch Reibungskoëffizient η die freie Weglänge heraus und hängt

der Quotient nur von der viel weniger problematischen Energieverteilung (spezifische Wärme) ab. Analogon zum Wiedemann-Franzschen Gesetz. 4. Bei Maxwellscher Verteilung und Zusammenstößen nach Art elastischer Kugeln wird die Konstante im Quotienten $\varkappa/\eta$ berechnet. 5. Die Maxwellsche Verteilung ist bei der Wärmeleitung zu modifizieren. Bequemer heuristischer Weg hierzu. 6. Die modifizierte Verteilung erweist sich identisch mit der von Lorentz für Elektronen in Metallen gefundenen Geschwindigkeitsverteilung. Zwei verschiedene Auffassungen der Transportgleichung: Integration über den Lagenraum oder Integration über den Geschwindigkeitsraum.

II. Experimentelles über die Abhängigkeit der freien Weglänge von Geschwindigkeit und Druck.

1. Gaskinetische Ergebnisse. 2. Freie Weglänge der Elektronen gemessen durch Ionisierung. Das Optimum der Ionisierung, Abnahme mit zunehmender Geschwindigkeit. Die gleiche Kurve bei Elektronen und α-Partikeln. 3. Freie Weglänge der Kathodenstrahlen gemessen durch deren Absorption. Rapide Abnahme des auf Absorption wirkenden Molekül-Querschnittes bei der Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit. 4. Freie Weglänge der Kanalstrahlen. Abweichung von der Druckproportionalität.

III. Spezifische Wärme der einatomigen Gase (nach W. Lenz).

1. Methode der Eigenschwingungen bei Gasen. Der Unterschied gegen feste Körper besteht darin, daß die Schallgeschwindigkeit bei Gasen wesentlich von der Temperatur abhängt. Man muß das Spektrum der Eigenschwingungen in der Skala der Wellenlängen (nicht Schwingungszahlen) entwerfen. 2. Die Verteilungsfunktion wird aus dem Maximum der Wahrscheinlichkeit bestimmt; die Transformation der Energie von einer Schwingungszahl in eine andere wird quantenhaft vorausgesetzt. Näherungsformeln der Verteilungsfunktion für hohe und niedrige Temperaturen. 3. Die spezifische Wärme der Gase für hohe Temperaturen. Der Faktor 1/2, der die spezifische Wärme der einatomigen Gase von der der einatomigen festen Körper unterscheidet, kommt automatisch zustande durch die Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit. Die Näherungsformel für hohe Temperaturen gilt bis in die nächste Nähe des absoluten Nullpunktes. 4. Spezifische Wärme und Zustandsgleichung für sehr tiefe Temperaturen. Unsicherheit der Methode. 5. Die experimentelle Abnahme der spezifischen

Wärme des Wasserstoffs bei tiefen Temperaturen auf den einatomigen Wert hat ihr Analogon in dem theoretischen Verhalten der Schallgeschwindigkeit. Diese geht nach Jeans für zweiatomige Gase bei abnehmender Temperatur oder zunehmender Schwingungszahl von dem zweiatomigen auf den einatomigen Wert herauf; die Übergangsstelle hängt von der Unsymmetrie des Moleküls ab.

Anwendung der kinetischen Theorien auf Elektronenbewegung.

Von H. A. Lorentz in Haarlem.

1. In der „Elektronentheorie der Metalle“, wie sie von Riecke[1]), Drude[2]) und anderen Physikern entwickelt worden ist, versucht man, die elektrischen Eigenschaften der Metalle und das, was damit zusammenhängt, auf das Verhalten der in ihnen befindlichen beweglichen Elektronen zurückzuführen. Dabei wird angenommen, daß diese sich in demselben Maße wie alle sonstigen beweglichen Teilchen an der Wärmebewegung beteiligen. Bei der Temperatur T ist die mittlere kinetische Energie eines Elektrons in Planck's Bezeichnungsweise $\frac{3}{2}kT$.

2. Man erhält bei nicht zu niedriger Temperatur den richtigen Wert für die spezifische Wärme eines Metalls, wenn man für jedes Atom eine kinetische Energie $\frac{3}{2}kT$ und den gleichen Betrag an potentieller Energie ansetzt. Daraus folgt, daß die Zahl der beweglichen Elektronen nur ein kleiner Bruchteil der Atomzahl sein kann. Befinden sich, was allerdings sehr wahrscheinlich ist, weitere Elektronen in dem Körper, so muß man diese als festliegend betrachten, oder jedenfalls annehmen, daß die kinetische Energie, die sie im Mittel erhalten, aus irgend welchem Grunde erheblich kleiner als $\frac{3}{2}kT$ ist.

3. Die beweglichen Elektronen lassen sich in „gebundene“ und „freie“ teilen. Erstere sind solche, die eine bestimmte Gleichgewichtslage haben, aus der sie sich nicht über einen gewissen Abstand hinaus entfernen. Die freien Elektronen aber können

---

1) Riecke, Ann. Phys. Chem. **66** (1898), p. 353, 545 u. 1199; Ann. Phys. **2** (1900), p. 835.

2) Drude, Ann. Phys. **1** (1900), p. 566; **3** (1900), p. 369.

unter dem Einflusse einer konstanten Kraft über beliebig große Strecken wandern.

Ein konstanter elektrischer Strom kann nur durch eine Bewegung freier Elektronen zustande kommen.

Ein und dasselbe Elektron kann im Laufe der Zeit bald frei, bald gebunden sein.

4. Wollte man in einem Metall mehr als eine Gattung freier Elektronen annehmen, so stieße man auf die größten Schwierigkeiten; man würde einem Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik kaum entgehen können. Der einzige, oder jedenfalls der einfachste Ausweg besteht in der Hypothese, daß es nur eine Art freier Elektronen gibt[1]. Alles spricht dafür, daß dies negative Teilchen sind, identisch mit den Elektronen der Kathoden- und der β-Strahlen.

5. Die freien Elektronen werden aus den Atomen durch eine Art Dissoziation gelöst. Ihre Anzahl pro Volumeneinheit (N) ändert sich von einem Metall zum anderen und ist in jedem eine bestimmte Funktion der Temperatur. Beschränkt man sich auf stationäre Zustände (nur von solchen ist im weiteren die Rede), so darf man annehmen, daß auch dann, wenn die Eigenschaften des Metalls sich von Punkt zu Punkt ändern, und ebenso wenn ein Temperaturgefälle besteht oder eine elektrische Kraft wirkt, N in irgend einem Volumelement denselben Wert hat, der gelten würde, wenn in einem homogenen Metall von der Beschaffenheit jenes Volumelementes thermisches und elektrisches Gleichgewicht bestände. In jedem Volumelement werden in einer bestimmten Zeit gleichviel Elektronen in Freiheit gesetzt und an die Atome gebunden. Zur Vereinfachung darf man annehmen, daß fortwährend dieselben Elektronen sich in freiem Zustande befinden.

6. In einer linearen (geschlossenen oder ungeschlossenen) Kette von Leitern werde die Lage eines normalen Querschnitts durch die der Kette entlang gemessene Entfernung x von einem festen Querschnitt bestimmt. Die Natur des Metalles, sowie die Temperatur, und also auch die Zahl N mögen sich kontinuierlich von einen Querschnitt zum anderen ändern. Auf ein freies Elektron wirke in der Richtung x eine Kraft X, die teils von einem elektrischen Felde, teils von einer molekularen Anziehung seitens der Metallatome herrührt. Ganz allgemeine und naheliegende Betrachtungen führen dann zu folgenden Gleichungen für den elek-

---

1) Lorentz, Jahrb. d. Radioaktivität und Elektronik, 4 (1907), p. 125.

trischen Strom i und den Wärmestrom w durch einen Querschnitt ω

$$i = \left\{\alpha \frac{dT}{dx} + \beta(X-K)\right\}\omega,$$

$$w = \left\{-\gamma \frac{dT}{dx} + \delta(X-K)\right\}\omega.$$

Die Koeffizienten α, β, γ, δ und die Größe K haben an jeder Stelle bestimmte Werte.

In diesen Größen lassen sich nun die Leitfähigkeiten für Wärme und Elektrizität ($\varkappa$ und σ), die elektromotorische Kraft in einer Thermokette, der Peltien- und der Kelvin-Effekt ausdrücken, und es läßt sich die Bedingung angeben (Beziehung $\underline{A}$), die erfüllt sein muß, damit die thermo-elektrischen Größen der Relation genügen, die man aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik abgeleitet hat.

7. Die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, K$ näher zu bestimmen, ist Aufgabe der kinetischen Elektronentheorie. Was K betrifft, bietet das keine Schwierigkeit. Diese Größe ist nämlich der Wert, den die Kraft X haben muß, damit bei überall gleicher Temperatur Gleichgewicht bestehe. In einem homogenen Metall ist also $K = 0$. Wo sich die Natur des Metalles von Punkt zu Punkt ändert (Übergangsschicht zwischen zwei Metallen) gilt:

$$K = kT\left(\frac{d \log N}{dx}\right)_T.$$

8. Um die Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu ermitteln, muß man die Methoden der kinetischen Theorien anwenden. Dabei darf von den wechselseitigen Zusammenstößen zwischen den Elektronen abgesehen werden; nur die Zusammenstöße mit den Metallatomen stellen ihrer Beweglichkeit eine Grenze. Da die Anzahl derjenigen Atome, die ein Elektron abgegeben haben, nur ein kleiner Bruchteil der Gesamtzahl ist (§ 2), so braucht auch die Wirkung der positiv geladenen Atome nicht besonders berücksichtigt zu werden.

9. Ebenso wie in der Gastheorie kann man von der mittleren freien Weglänge l eines Teilchens reden, und mit Hülfe dieses Begriffs läßt sich eine elementare Theorie der Erscheinungen entwickeln. Drude ist in dieser Weise zu dem wichtigen Ergebnis gelangt, daß das Verhältnis der Leitfähigkeiten $\varkappa$ und σ für alle Metalle den gleichen der Temperatur proportionalen Wert CT hat (Beziehung $\underline{B}$). Auch gelang es ihm, den numerischen Wert des Faktors C in sehr befriedigender Weise aus anderweitigen Daten abzuleiten.

10. Will man strenger verfahren, so muß man eine statistische Methode benutzen. Es sei $f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dS$ die Anzahl der freien Elektronen im Volumelement dS, deren Geschwindigkeitskomponenten zwischen ξ und $\xi + d\xi$, η und $\eta + d\eta$, ζ und $\zeta + d\zeta$ liegen. Die „Verteilungsfunktion" f genügt einer Gleichung, die der Grundgleichung der Gastheorie ähnlich ist. Für den Fall des Gleichgewichts hat sie die durch das Maxwellsche Gesetz bestimmte Gestalt.

11. Betrachtet man die Atome als Kugeln, an welchen die Elektronen nach den Gesetzen des elastischen Stoßes zurückprallen, so kann man die Grundgleichung vollständig lösen[1]). Die Werte, die sich dann für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ergeben, genügen den Beziehungen $\underline{A}$ (§ 6) und $\underline{B}$ (§ 9). Der Wert, den man für C (§ 9) erhält, ist aber weniger gut als bei Drude mit den Beobachtungen in Übereinstimmung.

12. Offenbar ist die Annahme kugeliger Atome höchstens eine rohe Annäherung. Das zeigt schon der Umstand, daß nach ihr die freie Weglänge l unabhängig von der Geschwindigkeit der Elektronen wird, was nicht wahrscheinlich ist. Es ist daher von Interesse, statt der elastischen Stöße Wirkungen anderer Art zwischen den Atomen und den Elektronen anzunehmen. Es gelingt nun, ohne zu spezielle Annahmen aus der Grundgleichung die Beziehung $\underline{A}$ abzuleiten und somit die Anwendung des zweiten Hauptsatzes auf die thermo-elektrischen Erscheinungen zu rechtfertigen. Dagegen gelingt es nicht, zu der Drudeschen Beziehung $\underline{B}$ zu gelangen. Diese wäre also als eine Näherungsregel zu betrachten.

13. Weder auf die Erklärung der magnetischen Erscheinungen, noch auf die Theorie des Hall-Effektes und der damit verwandten Phänomene soll hier eingegangen werden. Nur sei bemerkt, daß eine Erklärung des Diamagnetismus aus den im Magnetfeld gekrümmten Bahnen den Elektronen, wie sie J. J. Thomson[2]) versucht hat, sich m. E. nicht durchführen läßt. Es hängt das damit zusammen, daß die Verteilungsfunktion im magnetischen Felde dieselbe Gestalt hat, wie außerhalb des Feldes.

14. Die Wärmebewegung der Elektronen hat zur Folge, daß eine elektrische Ladung nicht an der Oberfläche eines Leiters ihren Sitz hat, sondern sich bis zu einer gewissen Tiefe erstreckt. Diese Tiefe stellt sich aber bei der Berechnung als so klein heraus, daß sie keinen Einfluß auf beobachtbare Erscheinungen haben kann.

1) Lorentz, Amsterdam Proc., I (1905), p. 438.

2) J. J. Thomson, Rapports du Congrès de physique de 1900, Paris, 3, p. 148.

15. Nach den Gesetzen der Elektrostatik wird eine in einem Punkt konzentrierte Ladung e von einer leitenden Platte gerade so angezogen, als ob sich in ihrem Spiegelbilde eine Ladung $-e$ befände. Diese Wirkung kommt dadurch zustande, daß die Ladung $-e$ über die Oberfläche der Platte verteilt ist, mit einer Flächendichte, die der dritten Potenz der Entfernung von e umgekehrt proportional ist. Ist nun e die Ladung eines einzigen Elektrons, so ist eine derartige Verteilung unmöglich. Trotzdem wird auch dann die genannte Anziehung bestehen und zwar als zeitlicher Mittelwert der Kraft, die die beweglichen Elektronen in der Platte auf e ausüben. In ähnlicher Weise werden die Gesetze der Elektrostatik zu Mittelwertssätzen, sobald die betrachteten Ladungen nicht aus einer großen Zahl von Elementarquanten bestehen.

Auf einige weitere Fragen wird in dem Vortrag einzugehen sein.

Die Beziehungen der Volumenfläche zum Polymorphismus des Wassers.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Februar 1913.

Aus den bekannten Bestimmungen der Volumenfläche des Wassers von E. H. Amagat schien zu folgen, daß bei Drucken über 3000 kg die Abnormitäten derselben schwinden würden, so daß das Wasser unter Drucken über 3000 kg sich dem Verhalten normaler Flüssigkeiten nähern würde. Wäre diese Extrapolation zutreffend, so hätte man auch betreffs der Kristallisation des Wassers bei Drucken über 2200 kg normale Verhältnisse zu erwarten. Die Schmelzkurve des Eises III würde dann bis zum Tripelpunkt (Wasser, III, II) steigen und die Schmelzkurve von II würde weiter bis zum maximalen Schmelzpunkt, dessen Existenz bei normalen Flüssigkeiten so wahrscheinlich ist, ansteigen.

Die ausgezeichnete Arbeit von P. W. Bridgman[1]) hat aber gelehrt, daß diese Extrapolation nicht zutrifft. Bridgman hat nicht nur das Zustandsdiagramm des Wassers von 3500 kg bis 20000 kg weiter ausgearbeitet, sondern auch die Volumenfläche des Wassers von 1 bis 12.500 kg und von den Temperaturen der Schmelzkurven bis 80^{0} festgelegt. Es hat sich ergeben, daß auf der Volumenfläche des Wassers über 3000 kg neue Abnormitäten auftreten, aus denen zu schließen ist, daß das Wasser sogar bei 12000 kg noch nicht aus einer Molekülart besteht. Entsprechend der Vermehrung von Molekülarten, auf welche die Abnormitäten

1) Proceedings of the American Aoademy of Arts and Sciences 47, N. 13, 441, 1912 u. Zeitschr. f. anorg. Chemie 77, S. 377, 1912.

der Volumfläche hinweisen, sind auch zwei neue Kristallgruppen von Bridgman, die Gruppen V und VI, gefunden worden.

Im Folgenden soll auf den Zusammenhang zwischen den Abnormitäten der Volumenfläche des Wassers und seinem Polymorphismus eingegangen werden, und eine quantitative Behandlung dieser Frage angebahnt werden. Eine solche ist zur Zeit wohl noch nicht mit Erfolg in Angriff zu nehmen, weil wir nicht wissen, ob die Volumenfläche des Wassers durch Addition der partiellen Volumenflächen der einzelnen Molekülarten des Wassers dargestellt werden kann. Vor Entscheidung dieser Frage hätte man zu untersuchen, ob ein solches Additionsgesetz für die Mischungen zweier Flüssigkeiten zutrifft.

Für normale Flüssigkeiten gilt, wie früher[1]) gezeigt wurde, bei Drucken, die eine gewisse pT-Linie überschreiten, eine sehr einfache Zustandsgleichung:

$$(v - v_{p=\infty})(K + p) = CT,$$

wo $v_{p=\infty}$ das Grenzvolumen beim Druck $p = \infty$ bedeutet, K die von v, p und T unabhängige Molekularattraktion, und C eine Konstante, welche mit dem freien Volumen A bei $p = 0$ und der Wärmeausdehnung $\left(\frac{d_p v}{dT}\right)_{p=0}$ in folgender Weise zusammenhängt.

$$C = K\frac{A}{T}, \qquad \frac{A}{T} = \left(\frac{dv}{dT}\right)_{p=0} = \alpha_{p=0}.$$

Aus dieser Zustandsgleichung ergeben sich durch Differentiation nach p und T die Gleichungen:

$$\frac{d_p v}{dT} = \alpha_{p=0}\frac{K}{K+p} \tag{1}$$

und

$$\frac{d_T v}{dp} = -\frac{\alpha_{p=0}KT}{(K+p)^2}. \tag{2}$$

Die Wärmeausdehnung bei konstantem Druck ist also unabhängig von der Temperatur und nimmt bei konstanter Temperatur mit wachsendem Druck ab. Die Kompressibilität wächst bei konstantem Druck proportional der absoluten Temperatur und nimmt bei konstanter Temperatur mit wachsendem Druck ab.

Durch Differentiation von (1) nach der Temperatur und von

---

1) Ann. d. Phys. 37, S. 975 und F. Körber, Ann. d. Phys. 37, S. 1014.

(1) nach dem Druck oder von (2) nach der Temperatur ergibt sich:

$$\frac{d_p^2 v}{dT^2} = 0 \tag{3}$$

und

$$\frac{d^2 v}{dT dp} = -\frac{\alpha_{p=0} K}{(K+p)^2} \tag{4}$$

Die Isobaren sind also gerade Linien und bei konstantem Druck ist $\frac{d^2 v}{dT dp}$ unabhängig von der Temperatur, während bei konstanter Temperatur dieser Quotient mit wachsendem Druck abnimmt.

Bei einem Teil assoziierter Flüssigkeiten treffen die einfachen Regeln (1), (2), (3) und (4) noch zu, bei einem anderen Teil nicht mehr. Hierüber und über das zu erwartende abnorme Verhalten assoziierter Flüssigkeiten kann man auf Grund thermodynamisch-atomistischer Überlegungen zu weiteren Regeln gelangen, dadurch die Kennzeichen der Assoziation aus den Volumenflächen festlegen und zu einem Verfahren der Zählung der Molekülarten in einem Teil der assoziierten Flüssigkeiten gelangen.

Um möglichst einfache Verhältnisse zu fixieren, denken wir uns eine assoziierte Flüssigkeit, die nur aus zwei Molekülarten, 1 und 2, besteht.

Beide Molekülarten sind mit einander im Gleichgewicht, das sich bei Änderung von p und T sehr schnell einstellt. In diesem Zustande sei die Konzentration der Molekülart 1, C_1 und die der Molekülart 2, C_2. Nach dem Gesetz der Massenwirkung gilt, wenn n_1 und n_2 die Molekülzahlen in der Reaktionsgleichung bedeuten, $C_1^{n_1} = K C_2^{n_2}$. Die Änderung von C_1 bei Änderung von p und T wird bekanntlich durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\frac{d_p \ln K}{dT} = \frac{Q}{RT^2}, \tag{5}$$

$$\frac{d_T \ln K}{dp} = -\frac{\Delta v}{RT}. \tag{6}$$

Hier bedeuten $\ln K$ den natürlichen Logaritmus der Gleichgewichtskonstante und Q die Reaktionswärme, welche gleich ist der Energiedifferenz ΔE der beiden Molekülarten 1 und 2 plus der äußeren Arbeit bei Umsatz eines gr. Mols. Es ist also

$$\frac{Q}{T} = \frac{\Delta E + \Delta v p}{T} = \eta_1 - \eta_2,$$

wo η_1 die Entropien pro Masseneinheit eines nur aus den Molekülen 1 und η_2 eines nur aus den Molekülen 2 bestehenden Stoffes bezeichnet[1]).

Da bei Steigerung des Druckes sich immer die Molekülart kleineren Volumens bilden muß, so wird die Wirkung der Änderung von C mit p auf das Volumen des Stoffes immer in einer Abnahme des Volumens bestehen, $\frac{d_T C_1}{dp} \Delta v$ wird immer negativ sein.

Die Wirkung der Gleichgewichtsverschiebung auf das Volumen des Stoffes bei Änderung der Temperatur, $\frac{d_p C}{dT} \Delta v$, wird durch das Vorzeichen von Q, welches positiv aber auch negativ sein kann, bestimmt, und zwar haben Q und $\frac{d_p C}{dT} \Delta v$ dasselbe Vorzeichen.

Man hat also, je nachdem für die spezifischen Volumen des aus einer Molekülart bestehenden Stoffes v_1 und v_2 und die spezifischen Entropien η_1 und η_2 gleiche oder entgegengesetzte Größenbeziehungen gelten, für die Wirkung der Konzentrationsänderung auf das Volumen des Stoffes $\frac{d_p C}{dT} \Delta v$ zwei Fälle zu unterscheiden.

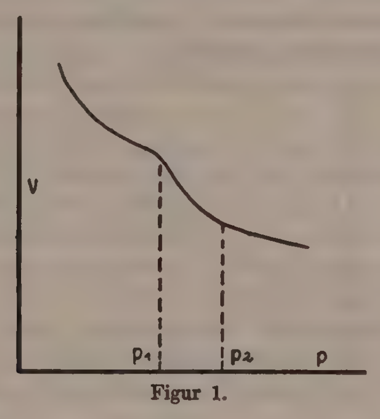
I $v_1 > v_2, \quad \eta_1 > \eta_2$	II $v_1 > v_2, \quad \eta_1 < \eta_1,$
$\frac{d_p C}{dT} \cdot \Delta v +$	$\frac{d_p C}{dT} \cdot \Delta v -$
$\frac{d_T C}{dp} \cdot \Delta v -$	$\frac{d_T C}{dp} \cdot \Delta v -$

Untersuchen wir nun die Wirkung des molekularen Umsatzes in einer assoziierten Flüssigkeit auf die Schnitte der Volumenfläche, um aus diesen die Kennzeichen für molekulare Umsetzungen abzuleiten.

Für die Volumenisothermen assoziierter Flüssigkeiten ergibt sich in beiden Fällen, daß sie im Druckintervall der Reaktion durch die Änderung von C mit steigendem Druck stärker abfallen kann als bei kleineren Drucken außerhalb des Reaktionsintervalls, $p_2 - p_1$. Denn zur Volumenverkleinerung durch Druckzuwachs kommt in dem Reaktionsintervall noch die Volumenverkleinerung $\frac{d_T C}{dp} \Delta v$ durch Bildung der Molekülart mit kleinerem Volumen hinzu.

1) Auch wenn die Gasgesetze für den osmotischen Druck der Mischung beider Molekülarten nicht gelten, so werden diese Gleichungen doch qualitativ richtig bleiben. R wird dann durch eine Funktion von C, T und p zu ersetzen sein.

Wenn der Einfluß von $\frac{d_rC}{dp}\,\Delta v$ gering ist, so wird auf der Volumenisotherme im Reaktionsintervall nur eine stärkere Krümmung sich bemerkbar machen, und erst in der Abhängigkeit der Kompressibilität $\frac{d_rv}{dp}$ vom Druck tritt dann die in Fig. 1 wiedergegebene schnellere Zunahme von $\frac{d_rv}{dp}$ im Reaktionsintervall, $p_2 - p_1$ ein.



Figur 1.

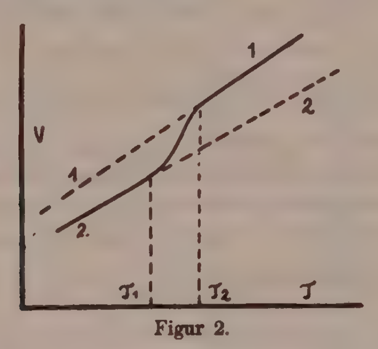
Wenn die Volumenänderung beim Umsatz klein ist, dann wird auch $\frac{d_rC}{dp}$ klein sein, und in Folge davon wird der Umsatz sich über ein weiteres Druckintervall erstrecken, und daher schwer an einer Zunahme der Kompressibilität zu erkennen sein. Tritt aber diese Zunahme ein, so ist sie ein Indicium einer Reaktion.

Wenn bei steigender Temperatur das Druckintervall $p_2 - p_1$ sich zu kleineren Drucken verschiebt, so liegt für die Reaktion der Fall I, für den $\eta_1 > \eta_2$ ist, vor, wenn das Intervall $p_2 - p_1$ sich zu höheren Drucken verschiebt, so hat man den Fall II, und wenn das Intervall $p_2 - p_1$ bei steigender Temperatur bei demselben Druck bleibt, so ist $\eta_1 - \eta_2 = 0$.

Bei den Volumenisobaren assoziierter Flüssigkeiten entsprechen den Fällen I und II verschiedene Änderungen von $\frac{d_pv}{dT}$ mit der Temperatur. Im Falle I wird im Temperaturintervall der Reaktion $T_2 - T_1$ die Isobare der assoziierten Flüssigkeit von der Isobare 2 der Flüssigkeit, welche praktisch fast nur aus der Molekülart 2 besteht, mit steigender Temperatur zu der Isobare der Molekülart 1 ansteigen. Fig. 2.

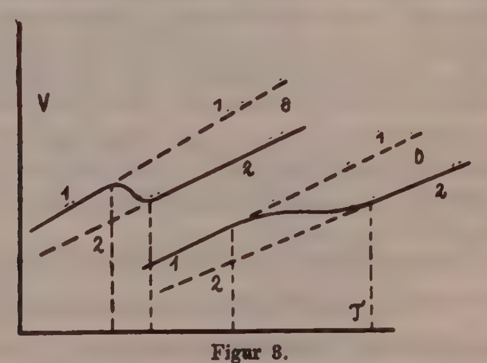
Je größer $\eta_2 - \eta_1$ und $v_1 - v_2$ sind, um so kleiner wird das Temperaturintervall $T_2 - T_1$ und um so deutlicher die Zunahme von $\frac{d_p v}{dT}$ vom kleinerem konstanten Wert zu größerem konstanten Wert sein. In einem relativ kleinen Temperaturintervall kann $\frac{d_p v}{dT}$ für eine assozziierte Flüssigkeit unabhängig von der Temperatur erscheinen.

Mit steigendem Druck wird das Intervall $T_2 - T_1$ zu höheren Temperaturen verschoben werden.



Figur 2.

Im Falle II wird im Temperaturintervall $T_2 - T_1$ der Reaktion die Isobare der assoziierten Flüssigkeit von der Isobare 1 der Flüssigkeit, bestehend aus den Molekülen 1 zu der Isobare 2 der Flüssigkeit, bestehend aus den Molekülen 2, gehen. Fig. 3.



Figur 3.

Hierbei kann im Falle *a* Fig. 3 $\frac{d_p v}{dT}$ negativ werden, aber auch positiv bleiben, Fall *b* Fig. 3; doch wird im Falle *b* $\frac{d_p^2 v}{dT^2}$ für ein

gewisses Temperaturintervall negativ werden. Die Wärmeausdehnung wird dadurch negativ, daß die negative Volumenänderung beim Umsatz der Molekülart 1 in 2 die normale Wärmeausdehnung überwiegt, hierzu ist aber notwendig, daß die Faktoren des Produktes $-\frac{d_p C}{dT} \Delta v$ groß sind. Gegen Ende des Umsatzes nimmt $\frac{d_p C}{dT}$ aber stark ab, infolgedessen muß mit steigendem Druck die Form der Isobare in die Form *b* übergehen, die sich schließlich der normalen Form nähert. Bei wachsendem Druck werden die Temperaturintervalle abnormer Wärmeausdehnung zu tieferen Temperaturen verschoben werden.

Die Form der Isobare *a* stimmt mit der des Wassers zwischen -20^0 und 10^0 für 1500 kg und die der Isobare *b* mit der des Wassers für 2000 kg fast überein.

Zur Auffindung von Reaktionen in einer assoziierten Flüssigkeit, bei denen eine Molekülart in eine andere, deren Volumen und Entropien sich von einander unterscheiden, übergeht, kann man außer den beiden Schnitten der Volumenfläche senkrecht zur *T*- und *p*-Achse noch die Schnitte senkrecht zur *v*-Achse, die isometrischen Linien, heranziehen. Da aber die Richtung der isometrischen Linien $\frac{d_v p}{dT} = -\frac{\frac{d_p v}{dT}}{\frac{d_T v}{dp}}$ ist, so werden an ihnen nur Abnormitäten auftreten, die schon an den Wärmeausdehnungen und den Kompressibilitäten wahrnehmbar sind. So wird, wenn $\frac{d_p v}{dT}$ negativ ist, auch $\frac{d_v p}{dT}$ negativ werden. Die Wirkung eines Umsatzes in der Flüssigkeit wird auf die isometrischen Linien qualitativ dieselbe sein wie auf die Isobaren, so daß man, um diese Wirkungen zu übersehen, in den Fig. 2 und 3 nur die *v*-Achse durch die *p*-Achse zu ersetzen braucht, um die betreffenden Wirkungen für die 3 Fälle I, IIa und IIb auf die isometrischen Linien zu übersehen.

Die Abnormitäten auf der Volumenfläche des Wassers.

P. W. Bridgman hat die Volumenfläche des Wassers bis zu 12500 kg von den Temperaturen der Schmelzkurven bis 80^0 bestimmt. Die Differenzen der Volumen bei konstanter Temperatur sind in der Tabelle I, die Differenzen dieser Differenzen sind in

der Tabelle II zusammengestellt. Außerdem ist noch aus der Tabelle der Volumenfläche von Amagat die Tabelle III abgeleitet worden[1]).

Aus den Tabellen II und III ist zu entnehmen, daß auf 4 pT-Linien die Kompressibilität bei wachsendem Druck schneller abfällt als bei etwas kleineren Drucken. Die 4 gebrochenen Linien zwischen den Zahlen der Tabellen II nnd III bezeichnen die pT-Linien, auf denen eine abnorme Zunahme der Kompressibilität bei wachsendem Druck und konstanter Temperatur eintritt. Auf der pT-Linie 1 Tab. III tritt zwischen 0°—20° eine recht deutliche Zunahme der zweiten Differenz $\Delta\Delta v$ ein, bei höheren Temperaturen wird diese Abnormität undeutlich. Die Zunahme der Werte $\Delta\Delta v$ auf der pT-Linie 2 Tab. II bleibt bis 80° merklich, wenn auch ihre Deutlichkeit mit steigender Temperatur erheblich abnimmt. Dasselbe gilt für die pT-Linie 3. Auf der pT-Linie 4 nimmt bei tiefen Temperaturen die Kompressibilität deutlich zu, aber schon bei 15° verschwindet diese Zunahme.

Diesen 4 Abnormitäten der Volumenfläche müssen nach den früheren Darlegungen 4 Reaktionen entsprechen, bei denen mit wachsendem Druck je eine Molekülart größeren Volumens in eine solche kleineren Volumens übergeht. Außerdem gilt für die 4 Reaktionen angenähert die Gleichung $\Delta\eta = 0$, da sich die Druckintervalle abnorm hoher Kompressibilität bei Änderung der Temperatur nicht merklich verschieben. Auf der Grundlage der 4 pT-Linien kann man die Molekülarten, welche sich an den ihnen entsprechenden Reaktionen bestätigen, mit den Molekülarten, aus denen die verschiedenen Eisgruppen aufgebaut sind, in Verbindung bringen.

Die Molekülart I, an denen das Wasser der pT-Linie 1 Tab. III reich ist, baut offenbar die Formen der Gruppe des Eis I auf.

Die größte Volumenänderung bei allen Umwandlungen der mit einander im Gleichgewicht befindlichen Eisarten kommt der Umwandlung von Eis I in das Eis II zu. Daher ist es wahrscheinlich, daß die abnorm großen Werte von $\frac{d_\tau^2 v}{dp^2}$ bei steigendem Druck auf der pT-Linie des kleinsten Druckes, der Linie 1, dieser Reaktion entsprechen. Da ferner η_{I} etwas größer als η_{II} ist, so wäre, wenn

1) In Tab. III ist die Abnormität der pt-Linie 2 undeutlich, da aber dieselbe aus den Angaben Bridgmans sehr deutlich hervorgeht, so ist wohl an ihrer Existenz nicht zu zweifeln. Die Tab. 62 Amagats reicht nur bis 1000 Atm., sie bricht also zu früh ab, um aus ihr die Abnormität der Tab. III bestätigen zu können.

dieselbe Beziehung auch für die entsprechenden Molekülarten im Wasser gelten sollte, zu erwarten, daß die pT-Linie 1 mit steigender Temperatur zu etwas kleineren Drucken gehen sollte. Hierüber aber kann man auf Grund der Erfahrung, der nicht hinreichend genauen Messungen, die der Tabelle III zu Grunde liegen, nichts sicheres erfahren.

Auf der pT-Linie 2 Tab. II wird dann der Rest der Molekülart I im Wasser in die Molekülart III übergehen. Da diese pT-Linie bei konstantem Druck verläuft, so ist für ihre Reaktion angenähert $\Delta\eta = 0$, auch bei der Umwandlung der Eisarten I und III ist $\Delta\eta$ klein. Außerdem trifft die pT-Linie 2 die Schmelzkurve des Eises I bei einem Druck, der etwas kleiner ist, als der des Tripelpunktes, in dem Wasser, Eis I und III im Gleichgewicht sind, Fig. 4.

Bei 2000 kg und -20^0 ist also das Wasser, wie aus dieser Volumenfläche ersichtlich, an den Molekülen I verarmt und relativ reich an den Molekülarten III und II geworden, die Folge hiervon ist die Möglichkeit von Gleichgewichten zwischen dem Eis III und dem an den Molekülen III angereicherten Wasser, das neben den Molekülen III auch noch reichliche Mengen von II enthält. Könnte man die Kristallisation der Moleküle III verhindern, so würde bei weiterer Abkühlung das Wasser noch reicher an II werden und die Ausscheidung von Eis II, dessen Zustandsfeld unter dem des Eises III liegt, eintreten.

Überschreitet der Druck die pT-Linie 3, so wandeln sich bei tieferen Temperaturen II und III, bei höheren III in die Moleküle V um, denn die pT-Linie 3 trifft die Schmelzkurve der Eisart V, an dessen Molekülart das Wasser relativ reich sein muß, um mit dem Eises V ins Gleichgewicht kommen zu können. Aus dem Verlauf der Gleichgewichtslinie der Eisarten III und V folgt, daß $\Delta\eta$ für diese Umwandlung sehr klein ist. Dementsprechend ergibt sich, daß für die Reaktion der Molekülarten III$\rightarrow$V im Wasser, deren pT-Linie 3 bei fast konstantem Druck verläuft, ebenfalls $\Delta\eta$ sehr klein ist.

Diese Beziehung zwischen den $\Delta\eta$-Werten der Eisarten und den der entsprechenden Molekülarten im Wasser gilt auch für die Umwandlung der Eisarten V und VI und für die ihr entsprechende Reaktion zwischen den Molekülarten V und VI im Wasser, denn die pT-Linie 4 verläuft ebenfalls bei konstantem Druck.

Die pT-Linie 4 trifft ziemlich die Mitte der Schmelzkurve des Eises V und nicht das Ende dieser Schmelzkurve beim Tripel-

1) Ann. de chim. et de phys. VI, 29, 545, Tab. N. 63, 1893.

punkt: Wasser, V und VI. Hiermit hängen besondere Eigentümlichkeiten, die bei der spontanen Entstehung von Eis V aus Wasser beobachtet wurden, zusammen. Relativ reich ist das Wasser an den Molekülen V nur in einem engen Druckintervall, zwischen 4000—4500 kg; zwischen 5000—6000 kg hat die Menge dieser Molekülart also über der Schmelzkurve von V (Fig. 4 und Tab. II) schon wieder abgenommen. Dementsprechend wäre zu erwarten, daß das spontane Kristallisationsvermögen einiger Formen der Gruppe V zwischen 4000—4500 kg ihr Maximum hat. Hierauf deuten auch die Angaben von Bridgman hin. Bridgman beobachtete, daß zwischen 5000—6000 kg immer das Eis VI sich aus Wasser bildete, und daß dann erst aus dem Eise VI das Eis V entstand. Diese Beobachtung steht also im Einklang mit dem, was man aus der Volumenfläche des Wassers betreffs der Molekülzusammensetzung des Wassers zwischen 4000—6000 und -10^0 bis 0^0 ableiten kann. Da das Wasser in diesem Gebiet offenbar nicht reich an den Molekülen V, sondern neben II und III auch sehr bald VI auftritt, so ist zu erwarten, daß das spontane Kristallisationsvermögen von Eis V besonders klein ist, was auch die Beobachtung bestätigt.

Man darf also behaupten, daß sich das Zustandsdiagramm des Wassers und seine Volumenfläche dem Satze unterordnen, daß an der Kristallisation sich nur Molekülarten beteiligen, die schon in der Flüssigkeit vorhanden sind.

Die Untersuchung der Volumen-Isobaren wird diesen Schluß bestätigen.

Im Isobarennetz sind 3 Abnormitäten auf den pT-Linien 5, 6 und 7 Tab. IV und Fig. 4 zu verzeichnen. Beim Überschreiten der pT-Linie 5 nach höheren Temperaturen hin wechselt die Wärmeausdehnung ihr Vorzeichen, beim Überschreiten der pT-Linien 6 und 7 in derselben Richtung wird $\frac{d_r^2 v}{dT^2}$ negativ; bei 6 gilt das nur für ein Temperaturintervall von etwa 10^0, bei 7 ist dieser Intervall viel größer, seine obere Temperaturgrenze liegt außerhalb des Erfahrungsgebietes. Diese 3 Abnormitäten weisen auf 3 Reaktionen hin, bei denen bei steigender Temperatur aus einer Molekülart größeren Volumens sich eine Molekülart kleineren Volumens bildet, wobei die Entropie der Molekülart kleineren Volumens größer ist als die Entropie größeren Volumens. Die 3 Abnormitäten sind also durch Reaktionen der Art des Falles II Fig. 3 verursacht.

Nun gelten aber, wie wir sehen, für die Volumen und Entropien der verschiedenen Molekülarten im Wasser mit aller Wahr-

scheinlichkeit die Beziehungen:

$$v_{I} > v_{II},\quad v_{I} > v_{III},\quad v_{III} \gtrless v_{V} \text{ und } v_{V} > v_{VI} \text{ sowie } \eta_{I} > \eta_{II}, \text{ und}$$
$$\text{nahezu: } \eta_{I} = \eta_{III},\quad \eta_{III} = \eta_{V} \text{ und } \eta_{V} = \eta_{VI},$$

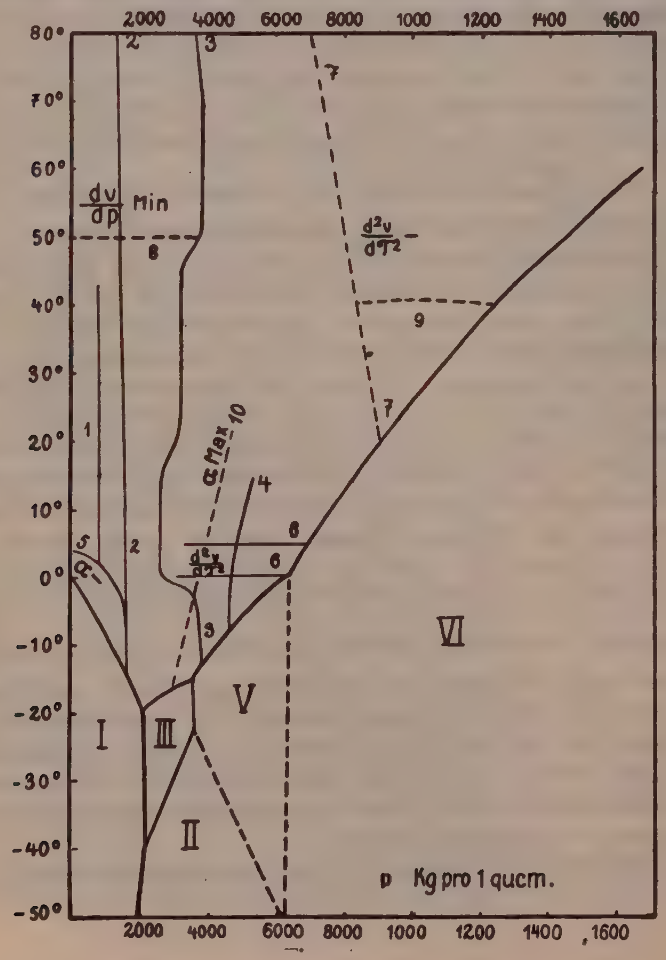
und es ist nicht anzunehmen, daß bei Druckänderungen von 2—4000 kg und einer Temperatursteigerung um etwa 30° über die Schmelzkurven wesentliche Abweichungen von den Beziehungen der Entropien zu einander auftreten werden.

Man ersieht also, daß unter den aus den Volumen-Isothermen gefundenen Reaktionen sich keine findet, welche die Abnormitäten 5, 6 und 7 erklären könnte. Hierzu muß man sich zur Annahme einer weiteren Molekülart VII, im Wasser entschließen, und dieser ein Volumen, das kleiner als das Volumen von VI ist, und einen Entropiewert, der größer ist als der der anderen Molekülarten, zu schreiben, wenn man nicht noch mehrere andere Molekülarten annehmen will. Diese Annahme erklärt die Abnormitäten 5, 6 und 7, welche durch die Reaktionen I→VII, V→VII und VI→VII gedeutet werden. Wenn aber diesen Reaktionen die Abnormitäten $\frac{d_p v}{dT}$ — und $\frac{d_p v^2}{dT^2}$ — entsprechen, so ist man auch berechtigt für die Reaktion III→VII eine dieser Abnormitäten zu erwarten. Eine solche findet sich aber nicht. Im Gebiete, in dem diese Abnormität zu erwarten ist, zwischen 1500—4000 kg bei 0° bis 20°, verläuft aber noch eine andere Reaktion, deren Volumen- und Entropieänderungen der Reaktion III→VII entgegengesetzt sind, wie aus den bekannten Volumen- und Entropiebeziehungen der Eisarten II und III zu schließen ist. Der Grund für das Nichtauftreten der Abnormität III—VI ist also aller Wahrscheinlichkeit nach in einer Kompensation derselben durch die Wirkung der Reaktion II—III zu suchen. Hierauf deutet auch das schnelle Anwachsen der Wärmeausdehnung zwischen −15 und 0° bei Drucken zwischen 2000—3500 kg, das der Umwandlung der Moleküle II in III entsprechen würde, und die darauf bei weiter steigender Temperatur folgende Unveränderlichkeit von $\frac{d_p v}{dT}$, welche durch Kompensation der Wirkungen beider Reaktionen II→III und III→VII bedingt würde. Die Abnormität 7 muß natürlich bei höheren Drucken und Temperaturen verschwinden, in diesem Gebiet könnte das Wasser schließlich nur noch aus einer Molekülart, aus VII, bestehn, und diese Molekülart könnte sich dann krystallbildend betätigen.

Außer den 7 Abnormitäten der Volumenfläche, die sich in

directem Zusammenhang mit Änderungen der Molekularkonzentration im Wasser bringen lassen, existieren noch 3 Abnormitäten, welche eine indirekte Folge dieser Änderungen sind.

Bei 50° findet sich zwischen 0 und 4000 kg ein deutliches Minimum der Kompressibilität $\frac{d_\tau v}{dp}$, welches bei höheren Drucken undeutlich wird, weil in dem betreffenden Gebiet $\frac{d_\tau v}{dp}$ von der Temperatur innerhalb der Genauigkeit der Messungen unabhängig ist, und das dann bei noch höheren Drucken, zwischen 8 bis 12000 kg bei etwa 40° wieder aufzutreten scheint. Die entsprechenden *pt*-Linien sind in Fig. 4 mit den Zahlen 8 und 9



bezeichnet. Diese beiden Minima werden dadurch bedingt, daß bei Temperaturen unter 20° die Kompressibilität wegen der Bildung von Molekülen kleineren Volumens aus solchen größeren Volumens abnorm groß ist, dann aber entsprechend der Abnahme der Quantität des Umsatzes mit steigender Temperatur abnimmt. Schließlich tritt von etwa 80° an die normale Zunahme der Kompressibilität, die auch normalen Flüssigkeiten eigentümlich ist, ein. Man sieht also, daß das Minimum der Kompressibilität eine Folge stärkeren Molekularumsatzes bei tieferen Temperaturen ist.

Die Wärmeausdehnung $\alpha = \frac{d_p v}{dT}$ hat auf der *pt*-Linie 10 von -15 bis 20° ein recht deutlich ausgeprägtes Maximum, welches dadurch bedingt ist, daß durch die Reaktionen der *pt*-Linien 5 und 6 die Wärmeausdehnung zu beiden Seiten der *pt*-Linie 10 herabgedrückt, in der Nähe der Linie 10 aber durch die Bildung der Moleküle III aus II vergrößert ist.

Die Deutlichkeit der Abnormitäten auf der Volumenfläche hängt von der Richtung des Schnittes durch die Volumenfläche ab. Da die Haupt-Abnormitäten durch Änderung der Molekularzusammensetzung bei Änderung von p und T bedingt werden, so müssen die hieraus folgenden Abnormitäten am deutlichsten in den Schnitten senkrecht zur T- oder p-Achse auftreten, jedenfalls wird das für Gebiete gelten, in denen nur die pT-Linie einer Abnormität verläuft. Abnormitäten, die auf andere Ursachen als Konzentrationsänderungen zurückzuführen wären, können auf den Schnitten senkrecht zur v-Achse nicht erwartet werden, da die Schnitte senkrecht zur v-Achse, die isometrischen Linien, ihrer Richtung nach durch die Werte $\frac{d_T v}{dp}$ und $\frac{d_p v}{dT}$ bestimmt sind, und die Abnormitäten dieses Werts durch Konzentrationsänderungen bedingt sind.

In der Tabelle V sind die Δp-Werte bei 5° Temperatursteigerung für konstante Volumen von 500 zu 500 kg Druckzuwachs angegeben. Der Anfangsdruck, bei dem das Wasser das unveränderlich erhaltene Volumen erfüllt, ist bei der Temperatur, für die dieses Volumen gilt, verzeichnet, ihm folgen für dieses Volumen die Zunahmen des Druckes bei 5° Temperaturerhöhung zwischen den Temperaturgrenzen, auf die sie sich beziehn.

Vergleicht man die *pt*-Linie 5a, auf der $\frac{d_v p}{dT}$ durch den Nullwert geht, mit der *pt*-Linie 5 der Tab. III, auf der $\frac{d_p v}{dT}$ durch

Null geht, so findet man die zu erwartende Übereinstimmung. Dasselbe ergibt der Vergleich der *pt*-Linien 6a und 6, auf denen $\frac{d_v^2 p}{dT^2}$ respektive $\frac{d_p^2 v}{dT^2}$ für ein kleines Temperaturintervall negativ sind, und der Vergleich der *pt*-Linien 7a und 7, welche das Feld, auf dem die $\frac{d_v^2 p}{dT^2}$- und $\frac{d_p^2 v}{dT^2}$-Werte negativ sind, von dem der positiven Werte trennt.

Die zweiten Differenzen $\Delta\Delta p$, aus denen man die Änderung von $\frac{d\frac{d_v p}{dT}}{dp}$ ersehn würde, sind recht unregelmäßig, durch Beobachtungs- und Rechenfehler zu sehr entstellt, als das man aus ihnen irgend welche Schlüsse ziehen könnte. Dem Minimum der Temperaturabhängigkeit von $\frac{d_T v}{dp}$ auf den *pt*-Linien 8 und 9 entspricht kein Maximum der der Temperaturabhängigkeit von $\frac{d_v p}{dT}$ und dem Maximum der Druckabhängigkeit von $\frac{d_p v}{dT}$ auf die *pt*-Linie 10 kein Maximum der Druckabhängigkeit von $\frac{d_v p}{dT}$, weil diese nicht direkt durch Änderungen der Molekularkonzentration bedingt werden. Das Minimum der Temperaturabhängigkeit von $\frac{d_T v}{dp}$ verschwindet bei den $\frac{d_v p}{dT}$, weil $\frac{d_p v}{dT}$ im betreffenden Temperaturgebiet zunimmt, und das Maximum der Druckabhängigkeit von $\frac{d_p v}{dT}$, weil hier $\frac{d_T v}{dp}$ mit wachsendem Druck größere negative Werte annimmt.

Zusammenfassend darf man wohl sagen, daß auf der Volumenfläche des Wassers die Spuren von 6 Molekülarten zu finden sind, andererseits sind 5 Gruppen von Eisarten bekannt. Die 6. Molekülart des Wassers kann sich erst bei sehr hohen Drucken und relativ hohen Temperaturen krystallbildend betätigen. Aber nicht nur die Zahl der Molekülarten stimmt mit der Zahl der Eisgruppen überein, sondern auch die Beziehungen der Volumen und Entropien der Molekülarten des Wassers entsprechen diesen Beziehungen der Eisgruppen, und die Lage der *pt*-Linien der Abnormitäten zu den der Schmelzkurven der Eisgruppen macht jene Beziehungen besonders wahrscheinlich.

Berücksichtigt man ferner die Erfahrung, daß aus einer nor-

malen Flüssigkeit sich nur die Formen einer Gruppe bilden, so darf man behaupten, daß mit der Krystallisation in der Regel eine Änderung des Molekulargewichts nicht verbunden ist, daß nur Molekülarten, die in Schmelzen vorhanden siud, Krystalle bilden.

Zu einer Krystallgruppe können erfahrungsgemäß eine Reihe von Formen gehören. Daß diese Formen in Bezug auf einander total instabil sind, wird thermodynamisch dadurch beschrieben, daß ihre Flächen des thermodynamischen Potentials sich untereinander nicht schneiden. Das deutet auf eine besondere Verwandtschaft der Volumenflächen hin, die man in Übereinstimmung mit der sonstigen Erfahrung dahin formulieren kann, daß, wenn eine Gleichung $v = f(K+p, T)$ die Volumenfläche der stabilen Form einer Gruppe darstellt, die der instabileren durch dieselbe Funktion, in der nur an Stelle der Kohäsion K ein kleinerer K-Wert zu setzen ist. Atomistisch ist die Existenz verschiedener Formen derselben Gruppe auf Anordnung derselben Molekülart in verschiedene Raumgitter zurückzuführen, deren Stabilität mit zunehmender Kohäsion oder Molekularattraktion zunimmt.

Die Tatsache, daß nur Formen verschiedener Gruppen miteinander ins Gleichgewicht kommen, wäre auf die allgemeine atomistische Begründung des dynamischen Gleichgewichtes, daß sich in derselben Zeit gleiche Molekularmengen an der Grenzfläche beider Formen umsetzen, zurückzuführen. Auch nach dieser Auffassung können Formen, die aus ein und derselben Molekularart bestehn, nicht miteinander ins Gleichgewicht kommen.

Wenn auch die Gesamterfahrungen auf dem Gebiete des Polymorphismus atomistisch einfach zu deuten sind, so besteht doch noch eine Lücke der Theorie. Man kann nämlich das Molekulargewicht der einzeluen Molekülarten assoziierter Flüssigkeiten und deshalb auch das der verschiedenen ihnen entsprechenden Krystallgruppen nicht angeben, weil man weder über allgemeine stöchiometrische Gesetze wie bei Gasen noch über speziellere stöchiometrische Beziehung fürs Erste verfügt.

Tabelle I. Volumendifferenzen bei konstanten Temperaturen $\Delta v . 10^4$ für 500 kg

$$\frac{\Delta v}{\Delta p} \cdot 500 \cdot 10^4.$$

p kg	— 20°	— 15°	— 10°	— 5°	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°
0																					
500	I		222	228	229	221	215	211	208	207	204	203	203	202	202	203	203	203	204	206	209
1000			197	194	193	189	184	180	178	175	174	173	173	173	173	174	174	176	178	180	182
1500			182	177	168	165	163	162	159	158	157	156	156	157	157	157	159	159	160	162	164
2000		169	178	155	150	148	146	144	144	143	142	141	141	141	141	143	143	144	145	146	147
2500	143	141	139	135	127	126	126	125	124	124	124	124	124	124	125	126	126	127	128	128	128
3000	122	122	120	120	118	118	117	117	116	115	115	115	115	115	115	115	116	117	117	119	120
3500	III	108	108	109	108	108	107	107	108	108	108	108	108	108	109	109	109	109	110	110	111
4000		98	102	102	100	99	100	100	99	100	100	100	100	100	101	101	101	102	102	103	103
4500			90	91	90	91	92	91	92	92	92	92	92	92	92	92	92	93	94	93	95
5000	V		85	85	85	85	85	86	86	86	86	86	86	86	86	86	87	86	87	88	88
5500				73	78	80	81	81	81	81	80	80	80	80	81	81	81	81	81	82	82
6000				73	74	75	76	76	76	76	75	75	75	75	75	75	75	76	76	76	77
6500						71	71	73	72	72	71	71	71	71	71	71	71	72	72	73	72
7000							68	68	69	68	68	67	67	67	67	67	67	67	68	68	69
7500							65	65	66	64	64	64	64	64	64	64	65	64	64	64	65
8000								62	63	62	61	61	61	61	61	61	61	62	61	62	62
8500								59	59	58	58	57	57	57	58	57	57	58	58	58	58
9000									55	54	54	54	54	54	53	54	54	54	55	54	54
9500			VI							52	52	51	51	51	52	52	52	52	51	52	52
10000										50	49	49	49	47	49	49	49	49	49	49	49
10500											47	47	47	46	47	47	47	47	48	47	48
11000												46	46	45	46	46	46	46	46	47	46
11500												45	45	45	45	45	45	45	45	45	46
12000													45	45	45	45	45	45	45	45	45
12500													44	44	44	44	44	45	44	44	44

Tab. II. **Zweite Volumendifferenzen bei konstanter Temperatur $\Delta\Delta v . 10^4$ für 500 kg Drucksteigerung.**

p kg		—20°	—15°	—10°	—5°	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°
500				25	34	36	32	31	31	30	32	30	30	30	29	29	29	29	27	26	26	27
1000	I			15	17	25	24	21	18	19	17	17	17	17	16	16	17	15	17	18	18	18
1500		2		9	22	18	17	17	18	15	15	15	14	15	16	16	14	16	15	15	16	17
2000			28	34	20	23	22	20	19	20	19	18	18	17	17	16	17	17	17	17	18	19
2500		21	19	19	15	9	8	9	8	8	9	9	9	9	9	10	11	10	10	11	9	8
3000	III		14	12	11	10	10	10	10	8	7	7	7	7	7	6	6	7	8	7	9	9
3500			10	6	7	8	9	7	7	9	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	7	8
4000		3		12	11	10	8	8	9	7	8	8	8	8	8	9	9	9	9	8	10	8
4500		4		5	6	5	6	7	5	6	6	6	6	6	6	6	6	5	7	7	5	7
5000					12	7	5	4	5	5	5	6	6	6	6	5	5	6	5	6	6	6
5500	V				0	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	5	5	5	6	5
6000							4	5	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	5
6500								3	5	3	4	3	4	4	4	4	4	4	5	4	5	3
7000								3	3	3	4	4	3	3	3	3	3	2	3	4	4	4
7500									3	3	2	3	3	3	3	3	3	4	2	3	2	3
8000									3	4	4	3	4	4	4	3	4	4	4	3	4	4
8500										4	4	4	3	3	3	5	3	3	4	3	4	4
9000	VI										2	2	3	3	3	1	2	2	2	4	2	2
9500											2	3	2	2	4	3	3	3	3	2	3	3
10000												2	2	2	1	2	2	2	2	1	2	1
10500													1	1	1	1	1	1	1	2	0	2
11000													1	1	0	1	1	1	1	1	2	0
11500														0	0	0	0	0	0	0	0	1
12000														1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tab. III. Zweite Volumendifferenzen bei konstanter Temperatur $\Delta\Delta v . 10^7$ für 200 Atm. Drucksteigerung nach den Beobachtungen von Amagat.

	0°.00	2°.10	4°.35	6°.35	10°.10	14°.25	20°.40	29°.45	40°.45	48°.85
0—200	30	43	47	38	35	43	47	29	54	13
200—400	30	25	30	25	15	25	20	30	10	30
400—600	30	20	10	20	25	10	20	20	30	20
600—800	20	20	35	25	30	20	25	20	25	25
1										
800—1000	30	45	30	35	20	25	30	15	20	20
1000—1200	30	15	10	15	20	25	20	15	10	20
1200—1400	15	10	15	20	20	25	5	15	10	10
1400—1600	15	15	20	15	25	15	20	20	5	10
2										
1600—1800	20	15	15	20	10	10	10	15	20	15
1800—2000	10	10	10	15	20	10	15	15	15	10
2000—2200	15	15	15	5	15	15	10	5	15	10
2200—2400	10	15	5	15	10	15	15	5	5	10
2400—2600	15	15	10	15	15	10	5	5	10	15
2600—2800	10	15	5	5	10	5	5	5	10	5
2800—3000	20	15	0	5	5	10	5	10	10	10

Tabelle IV. Volumendifferenzen bei konstantem Druck für 5° Temperaturdifferenz, $\Delta v \cdot 10^4$

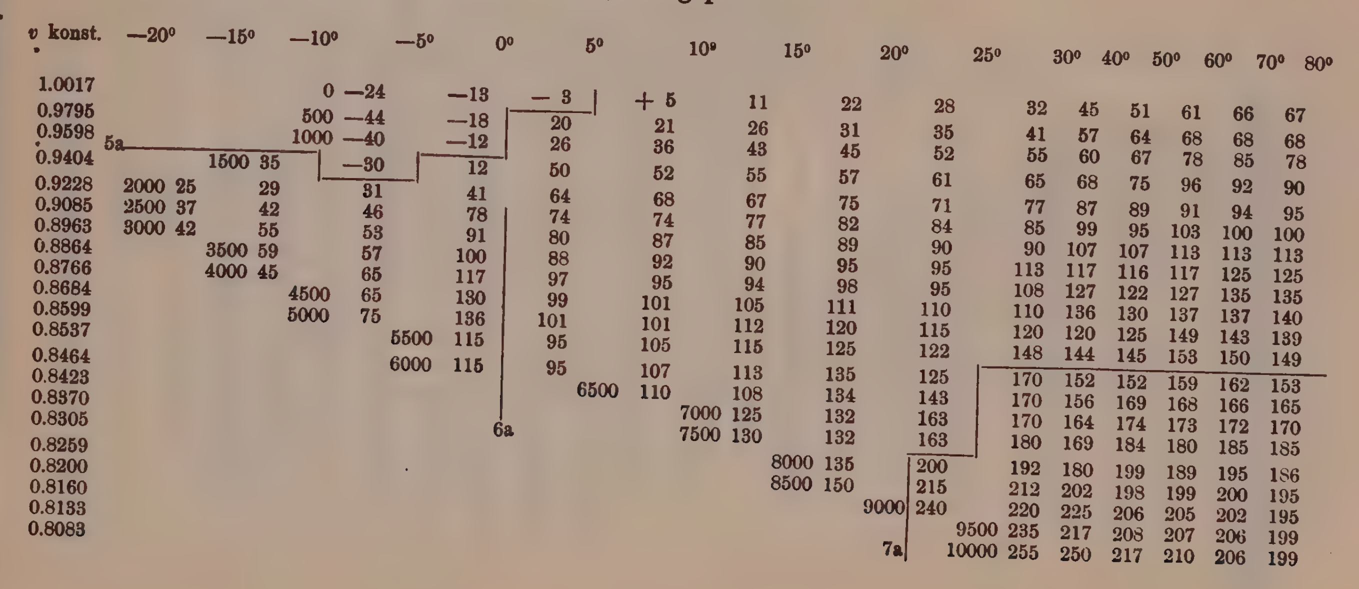
$$\frac{\Delta v}{\Delta T} \cdot 5^0 \cdot 10^4$$

p kg		−20°	−15°	−10°	−5°	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°
0					−11	− 6	− 1	2	6	9	12	13	16	19	20	22	25	25	27	29	31	32
500	I				−17	− 7	+ 7	8	10	12	13	16	17	19	21	22	24	25	27	28	29	29
1000	5				−14	− 6	+11	13	14	14	16	17	18	19	21	22	23	25	25	26	27	27
1500				+12	− 9	+ 3	14	15	15	17	17	18	19	19	20	22	23	23	25	25	25	25
2000			+7	+ 8	+ 9	+ 8	16	17	17	17	18	19	19	20	20	22	22	22	24	24	24	24
2500			9	10	13	16	17	17	17	17	18	19	19	20	20	21	21	22	23	23	24	24
3000	III		9	12	13	18	17	18	18	19	19	19	19	20	20	21	21	21	23	23	22	23
3500				12	12	18	17	18	18	19	19	19	19	20	20	20	21	21	22	22	22	22
4000				8	12	21	18	18	18	19	19	18	19	20	20	20	20	21	21	22	21	22
4500					11	22	17	17	19	18	19	18	19	20	20	20	20	21	20	21	22	20
5000	V				11	22	17	17	18	18	19	18	19	20	20	20	20	21	21	20	21	20
5500						17	15	16	18	18	19	19	19	20	20	19	20	20	21	20	20	20
6000						16	14	15	16	18	19	20	19	20	20	19	20	20	20	20	20	19
6500								15	16	19	19	21	19	20	20	19	20	20	19	20	19	20
7000									16	18	20	21	20	20	20	19	20	20	19	19	19	19
7500						6			16	17	22	21	20	20	20	19	20	20	19	19	19	19
8000										16	23	22	20	20	20	19	20	19	19	20	18	18
8500										16	24	22	21	20	20	19	19	20	19	19	18	18
9000				VI							25	23	21	20	20	22	20	19	19	18	19	18
9500												23	22	20	20	19	19	19	19	19	18	18
10000												24	22	20	20	19	19	19	19	19	18	17
10500											7		22	20	20	19	19	19	19	18	19	17
11000														20	20	19	19	19	19	18	18	18
11500														20	20	19	19	19	19	18	18	17
12000															20	19	19	19	19	18	18	17
12500															20	19	19	19	18	19	18	17

Tabelle V. Δp für 5° Temperatursteigerung bei unveränderlichem Volumen.

Δp in kg pro 5°.

v konst.	—20°		—15°		—10°		—5°		0°		5°		10°		15°		20°		25°		30°		40°		50°		60°		70°		80°
1.0017					0	—24		—13		— 3		+ 5		11		22		28		32		45		51		61		66		67	
0.9795					500	—44		—18		20		21		26		31		35		41		57		64		68		68		68	
0.9598	5a				1000	—40		—12		26		36		43		45		52		55		60		67		78		85		78	
0.9404			1500	35		—30		12		50		52		55		57		61		65		68		75		96		92		90	
0.9228	2000	25		29		31		41		64		68		67		75		71		77		87		89		91		94		95	
0.9085	2500	37		42		46		78		74		74		77		82		84		85		99		95		103		100		100	
0.8963	3000	42		55		53		91		80		87		85		89		90		90		107		107		113		113		113	
0.8864			3500	59		57		100		88		92		90		95		95		113		117		116		117		125		125	
0.8766			4000	45		65		117		97		95		94		98		95		108		127		122		127		135		135	
0.8684					4500	65		130		99		101		105		111		110		110		136		130		137		137		140	
0.8599					5000	75		136		101		101		112		120		115		120		120		125		149		143		139	
0.8537							5500	115		95		105		115		125		122		148		144		145		153		150		149	
0.8464							6000	115		95		107		113		135		125		170		152		152		159		162		153	
0.8423											6500	110		108		134		143		170		156		169		168		166		165	
0.8370													7000	125		132		163		170		164		174		173		172		170	
0.8305									6a				7500	130		132		163		180		169		184		180		185		185	
0.8259															8000	135		200		192		180		199		189		195		186	
0.8200															8500	150		215		212		202		198		199		200		195	
0.8160																	9000	240		220		225		206		205		202		195	
0.8133																			9500	235		217		208		207		206		199	
0.8083																	7a		10000	255		250		217		210		206		199	



Über die statistische Mechanik der Raumgesamtheit und die Wahrscheinlichkeit der Komplexion[1]).

Von

Paul Hertz.

Vorgelegt in der Sitzung vom 22. Februar 1913.

§ 1. Über den Begriff der Raumgesamtheit und ihre Statistik.

Die mechanische Theorie der thermodynamischen Vorgänge hat sich mit drei Arten von Gesamtheiten zu befassen und ihre Statistik zu entwickeln:

Ist ein individuelles System gegeben, so macht der Inbegriff der von ihm zeitlich nacheinander durchlaufenen Phasen die dem System zugehörige Zeitgesamtheit aus, und die Untersuchung wird sich besonders auf die zeitliche Häufigkeit zu richten haben, mit der jede Phase der Gesamtheit angenommen wird, auf die Wahrscheinlichkeit des Sukzedierenden. Ein einfaches Beispiel einer Zeitgesamtheit bietet z. B. ein Roulettespiel mit einer zirkulierenden Kugel. Die Kugel verweilt im 37. Teile der Periodenzeit auf der Null, und daraus folgt für die Wahrscheinlichkeit, sie auf der Null anzutreffen, der Wert 1/37. Die Richtigkeit und der objektive Charakter des Axiomes, auf dem dieser Zusammenhang beruht, kann nicht ernstlich bezweifelt werden[2]).

---

1) Eine ausführliche Untersuchung über diesen Gegenstand wird demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinen.

2) Vielleicht könnte man meinen, der Begriff der Wahrscheinlichkeit ließe sich auch in diesem Falle nur mit Hilfe der virtuellen Gesamtheit (siehe folgende Seite) definieren. Das ist nicht der Fall. Es genügt, dasselbe Individium in einer diskreten Menge von Teilpunkten zu betrachten.

Wenn andererseits nur Bau und Bewegungsgleichung oder, wie wir sagen, der Mechanismus für ein System vorgegeben sind, so kann einer solchen Vorschrift noch in mannigfaltiger Weise durch konkrete Systeme genügt werden. Auch der Inbegriff aller dieser Möglichkeiten ist der Betrachtung wert. Schon die analytische Mechanik hat sich ihrer zur Formulierung des Hamiltonschen Prinzipes bedient und die entsprechende Bewegung als virtuelle bezeichnet. Darum soll auch hier eine Gesamtheit von Systemen mit gleichem Mechanismus virtuelle Gesamtheit genannt werden. Überall aber, wo man in der Natur eine große Menge einem Plane entsprechender Systeme findet, wird man auch eine gewisse Gesetzmäßigkeit in der Häufigkeit der Phasen, eine natürliche Verteilung beobachten können. Somit kann virtuelle Gesamtheit dreierlei bedeuten:

Erstens kann (wie in der analytischen Mechanik) die Gesamtheit aller möglichen Anfangsphasen betrachtet und besonders auf die ihr zugehörige Bewegungsschar untersucht werden (unbestimmte virtuelle Gesamtheit).

Zweitens kann jeder Anfangsphase eine bestimmte von uns willkürlich gewählte Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden (bestimmte virtuelle Gesamtheit).

Drittens können die Anfangsphasen in derjenigen Häufigkeitsverteilung vorgegeben sein, die nach Wahrscheinlichkeitsgesetzen erwartet werden muß (natürliche bestimmte Gesamtheit).

Daß der Begriff der natürlichen bestimmten Gesamtheit kein imaginärer ist, zeigt die Besinnung auf ganz einfache Beispiele. Man denke sich etwa eine Menge von 3700 Roulettespielen aufgestellt und in jedem von ihnen die Kugel zirkulieren. Niemand wird zweifeln, daß in einem gegebenen Augenblick die Kugel in etwa 100 dieser Spiele die Nullstellung zeigen wird. Schon an diesem Beispiele erweist sich, daß die Häufigkeitsverteilung der natürlichen virtuellen Systemgesamtheit genau der Phasenzeitgesamtheit eines individuellen Systemes entspricht [1]. Allerdings ist noch nicht klar, wie dieser Zusammenhang zu begründen ist, ob er beweisbar ist oder auf einem Axiome beruht. Es wird aber

1) D. h. die virtuelle Wahrscheinlichkeit ist der relativen Verweilzeit proportional und auch der zeitlichen Wahrscheinlichkeit, die ohne Bezug auf die virtuelle Gesamtheit (siehe vorige Anm.) definiert werden kann. Logisch denkbar wäre es, daß relative Verweilzeit und zeitliche Gesamtheit im individuellen System stets übereinstimmten, die Häufigkeit in der virtuellen Gesamtheit aber davon abwiche. Dann wäre diese eine Zeitfunktion oder überhaupt nicht einheitlich bestimmbar oder gar von der besondern Erzeugungsart (§ 4) abhängig.

leicht bemerkt, daß die Klärung dieser Frage auch Licht verbreiten muß über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst, insbesondere das bekannte Prinzip der gleichberechtigten Fälle.

Neben der virtuellen und zeitlichen Gesamtheit ist nun auch die Raumgesamtheit von Wichtigkeit. Den Unterschied zwischen Raum- und Zeitgesamtheit lehrt uns die Gastheorie am besten verstehen. Greifen wir in einem Gas ein bestimmtes Molekül heraus und betrachten seine Phasen zu allen möglichen Zeitpunkten, so erhalten wir eine Zeitgesamtheit, allerdings eines nicht abgeschlossenen Systemes. Umgekehrt können wir einen Zeitpunkt festhalten und die Phasen aller koexistierenden Moleküle betrachten. Diese Mannigfaltigkeit soll Raumgesamtheit genannt werden. Die Gastheorie behauptet nun, daß die Verteilung in der Raumgesamtheit ein Abbild der Verteilung in der Zeitgesamtheit ist, d. h. also daß diejenigen Geschwindigkeiten, die sich zu einem bestimmten Zeitpunkt bei sehr vielen Molekülen finden, auch von einem bestimmten Molekül zu verhältnismäßig ebenso vielen Zeiten angenommen werden. Aber diese Behauptung bedarf durchaus des Beweises, und dieser kann nur erbracht werden, wenn wir eine Theorie der Raumgesamtheit ausbilden.

Sie aufzustellen haben wir in der Tat das größte Interesse. Wenn die Betrachtung der zeitlichen und der virtuellen Gesamtheit als Grundlage für die allgemeine Thermodynamik dienen kann, so ist die Theorie der Zeitgesamtheit das Eingangstor, durch das wir in das Reich der besonderen Lehren, vor allem der kinetischen Gastheorie, eintreten. Sodann liegt die Möglichkeit vor, die hier noch nicht recht eingesehen werden kann, mit ihrer Hülfe (§ 4) auch die Grundprinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst besser zu verstehen.

Als Ausgangspunkt der Theorie wird aber die Fragestellung dienen: Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind zu einem bestimmten Zeitpunkte die verschiedenen möglichen Phasen in einer Gesamtheit koexistierender und physikalisch voneinander abhängiger Systeme vertreten? Dieses Problem ist bisher nach zwei Methoden gelöst worden:

Erstens hat man unter allen möglichen Raumgesamtheiten die reale durch die Bedingung der Stationarität herausgehoben: In jeder Phase sollen stets zwar nicht dieselben, aber gleichviele Systeme angetroffen werden. Diese Forderung legt der räumlichen Verteilung eine gewisse Beschränkung auf und genügt unter Umständen zur Aufstellung eines Verteilungsgesetzes. Aber es ist klar, daß dieser Weg nicht allgemein genug ist; denn so gangbar

er auch ist, wenn bekannt ist, wie die Teilsysteme miteinander gekoppelt sind, so versagt er doch völlig, wo eine solche Kenntnis fehlt. Dann bleibt nur noch die zweite Methode.

Sie besteht darin, jedem Verteilungsgesetze eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuzuordnen und die wahrscheinlichste zu suchen. Folgendermaßen aber wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit bestimmt. Man teilt den Partialphasenraum in gleichgroße Partialphasenzellen ein und faßt als Komplexion alle diejenigen Phasen zusammen, für die die Phasenpunkte der Partialsysteme in den gleichen Partialzellen liegen. Die Komplexion ist also bekannt, wenn gegeben ist, welche Partialsysteme sich in den einzelnen Phasenzellen befinden. Wo wir aber nur wissen, wie viele in ihnen enthalten sind, wollen wir von einer Kenntnis des Zustandes reden. Dann ist klar, daß einem Zustande viele Komplexionen entsprechen, die auseinander durch Permutation hervorgehen und deren Zahl daher gerade die Permutationszahl ist. Um den wahrscheinlichsten Zustand zu finden, hat man denjenigen aufzusuchen, der am reichsten an Komplexionen ist, also ein Variationsproblem zu lösen. Dabei tritt noch eine Nebenbedingung auf, die die Konstanz der Energie zum Ausdruck bringt.

Diese Behandlung kann nicht vollkommen befriedigen. Denn es ist ohne Beweis angenommen, daß die einzelnen Komplexionen gleich wahrscheinlich sind. Diese Annahme sollte aber entweder begründet oder durch eine zutreffendere ersetzt werden. Wo nun überhaupt ein objektives Maß für die Wahrscheinlichkeit gesucht wird, muß, wie schon klar wurde, auf die Theorie der Zeitgesamtheit zurückgegangen werden. Es liegt daher nahe, die zeitliche Gesamtheit des Totalphasensystemes zu betrachten. Wir werden uns also vorzustellen haben, daß die einzelnen Komplexionen zeitlich aufeinander folgen und die Wahrscheinlichkeit aus der relativen Verweilzeit bestimmen. Dann aber können nur solche Phasen in bezug auf ihre Häufigkeit verglichen werden, die fähig sind, auseinander hervorzugehen, also nur Phasen konstanter Energie. Darum muß eine bestimmte Totalenergie von vornherein gegeben sein. Mit ihr ist aber nicht die Gesamtmenge aller zu einer Komplexion gehörigen Phasen verträglich, sondern nur eine Mannigfaltigkeit niedrigerer Ordnung. Um diese zu erhalten, hat man im Totalphasenraum die der Komplexion entsprechende Totalphasenzelle zu konstruieren und sie mit der Totalenergiefläche zum Schnitt zu bringen. Das von der Zelle aus der Energiefläche herausgeschnittene Stück enthält alle Phasen innerhalb einer Komplexion, die überhaupt energetisch möglich sind. Von seiner Größe wird es aber auch ab-

hängen, wie wahrscheinlich die Komplexion ist. Daraus sehen wir: Es ist nicht richtig, eine Komplexion entweder als energetisch unmöglich auszuschließen, oder ihr, wenn sie zuzulassen ist, einen stets gleichen Wahrscheinlichkeitswert zuzuschreiben. Vielmehr gibt es Komplexionen von den verschiedensten Wahrscheinlichkeitswerten. Die Zustandswahrscheinlichkeit ist also noch nicht durch die Permutationszahl gegeben, sondern diese noch mit der Komplexionswahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Wenn aber somit der Extremand des Variationsproblems einen neuen die Komplexionswahrscheinlichkeit ausdrückenden Tern aufnimmt, so kann andererseits die Energienebenbedingung fallen gelassen werden. Das so erhaltene Variationsproblem ist zu lösen, und es ist zu untersuchen, welchem Grenzwert die Lösung bei unendlich zunehmender Feinheit der Einteilung zustrebt [1]).

§ 2. Definition und Wahrscheinlichkeit der Komplexionen.

Wenn der Wert der Wahrscheinlichkeit durch die größere oder geringere Zeit des Verweilens in einer Situation gegeben werden soll, so muß die Theorie der Zeitgesamtheit zum Ausgangspunkte der Betrachtung gewählt werden. Sei ein beliebiges System von N Freiheitsgraden gegeben, bezeichne $V(E^*)$ das $2N$-dimensionale Volumen aller Phasenpunkte von einer Energie $E < E^*$, ferner Ω den Differentialquotienten $\frac{dV}{dE^*}$, und sei weiter die „Energiefläche" $\mathfrak{E}$ die Fläche von der Gleichung

1) $$E = E^*.$$

Die Wahrscheinlichkeit ΔW dafür, daß das System sich in einem $2N$-1-dimensionalen Flächenelement dO von $\mathfrak{E}$ befindet, kann einfach ausgedrückt werden, wenn man noch die Hülfsflächen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$

2) $$E = E^* - \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}E^*$$

und

3) $$E = E + \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}E^*$$

konstruiert, unter $\mathfrak{D}E^*$ eine sehr keine Größe verstanden. Ist $\mathfrak{D}T$ das Volumen des zwischen ihnen gelegenen und dO senkrecht durchschneidenden Zylinders oder aller Punkte, für die

4) $$|E - E^*| < \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}E^*$$

1) Das zu lösende Problem ist mit größter Schärfe formuliert worden von P. u. T. Ehrenfest: Enzykl. d. math. Wissensch. Bd. IV. 32 [IV. 2. II. Heft 6] S. 38 u. 40.

gilt, so beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit[1])

$$5)\qquad \Delta W = \frac{1}{\Omega(E^*)\,\mathfrak{D}E^*}\,\mathfrak{D}T.$$

Diese Formel haben wir nun auf ein Totalsystem anzuwenden, das aus k gleich beschaffenen Teilsystemen von je n Freiheitsgraden besteht. Es wird vorausgesetzt, daß die Energie E des Totalsystemes gleich der Summe der in den einzelnen Systemen vorhandenen Partialenergien ε_i ist, also die Beziehung

$$6)\qquad E = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$$

besteht. Wenn keine äußeren Kräfte auf das Totalsystem wirken, so verändert sich seine Energie nicht. Es durchläuft also eine Mannigfaltigkeit von Phasen gleicher Energie E^*, wobei die Partialsysteme wechselnde Energien annehmen, aber nur solche, die der Bedingungsgleichung

$$7)\qquad E^* = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$$

genügen. Dabei treten alle möglichen Kombinationen von Partialphasen auf; mit welcher Wahrscheinlichkeit, das haben wir nun zu untersuchen.

Um unser Problem möglichst zu vereinfachen, wollen wir eine ganz bestimmte Einteilung in Komplexionen zugrunde legen[2]). Unsere Spezialisierung soll in folgendem bestehen:

1) Alle Partialphasenräume sollen in gleicher Weise eingeteilt werden, sodaß man auch von der Einteilung des Partialphasenraumes statt von der Einteilung der Partialphasenräume reden kann.

2) Eine erste Zerlegung des Partialphasenraumes werde hervorgebracht durch eine Schar von Flächen konstanter Energie, und zwar besitze jedes Paar aufeinanderfolgender Energieflächen dieselbe Energiedifferenz $\Delta\varepsilon$, die als Energieschwelle bezeichnet werden möge.

3) Die Einteilung in Partialphasenzellen werde dadurch vervollständigt, daß zwischen den Partialenergieflächen senkrechte $2n-1$-dimensionale Scheidewände angebracht werden. Aber diese sollen nicht ganz beliebig verteilt werden, sondern so, daß alle

1) Cl. Maxwell, Transactions Cambridge Soc. XII. 3. 1878. S. 554. L. Boltzmann, Gastheorie Bd. II. S. 92. A. Einstein, Ann. d. Phys. 14, 1904 S. 365; P. Hertz, Ann. d. Phys. 33, 1910 S. 239.

2) Die Notwendigkeit gerade dieser Festsetzungen wird in der ausführlichen Darstellung gezeigt werden.

Partialphasenzellen gleiches Volumen $\Delta\tau$ besitzen; dort also, wo die Energieflächen sehr dicht zusammenrücken, müssen die Scheidewände weit voneinander entfernt sein und umgekehrt.

Wir erhalten so in den Partialphasenräumen ein System von Zylindern, deren jeder zwischen zwei Energieflächen liegt. Die auf den Energieflächen aufliegenden Basen wollen wir mit do_j bezeichnen. Es ist bequem, wenn auch für den Beweis unerheblich, die Elemente do_j als $2n-1$-dimensionale rechtwinklige Parallelepipede vorauszusetzen. Die Länge der Kanten sei $a_{j1}, a_{j2} \ldots a_{j\,2n-1}$, während b_j die Größe der Kante parallel dem Energiegradienten bezeichnet.

Dann ist

8) $$b_j = \frac{\Delta\varepsilon}{|\nabla_j\,\varepsilon_j|}$$

9) $$\prod_{l=1}^{2n-1} a_{jl} = do_j$$

10) $$b_j \prod_{l=1}^{2n-1} a_{jl} = do_j b_j = \Delta\tau.$$

Eine Kombination von k solchen Partialphasenzellen heiße nun ein Zustand. Dagegen nennen wir Komplexion den Inbegriff der Angaben darüber, welches Partialphasensystem sich in jeder der k Zellen befindet. Jeder Komplexion entspricht eine Totalphasenzelle ΔT im Totalphasenraum. Es fragt sich, welche Wahrscheinlichkeit ΔW ihr zukommt.

Zur Beantwortung dieser Frage ist es zunächst erforderlich, die Gestalt der unserer Komplexion entsprechenden Totalphasenzellen zu ermitteln, und das geschieht am einfachsten, wenn man ein besonderes der Komplexion angepaßtes Koordinatensystem zugrunde legt. Wir wollen im Partialphasenraum ein Hülfskoordinatensystem vorschreiben, dessen Ursprung im Zentrum des zur Komplexion gehörigen Partialphasenelementes liegt, dessen eine Achse — die der Koordinate h_j — senkrecht zur Partialenergiephasenfläche und dessen andere Achsen — die der $\xi_{j1}, \xi_{j2} \ldots \xi_{j\,2n-1}$ — ihr parallel weisen, sodaß die Gleichungen

11) $$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_j} = 0$$

bestehen.

Dann sind die Partialphasen der Komplexion durch die die Ungleichungen

12) $$|\,\xi_{jl}\,| \leqq \tfrac{1}{2}\,a_{jl}$$

13) $$|h_j| \leqq \frac{1}{2} b_j$$

bestimmt. Dadurch ist auch für unseren Totalphasenraum ein Koordinatensystem $\xi_{j1}, \xi_{j2} \ldots \xi_{j\,2n-1}, h_1, h_2 \ldots h_k$ gegeben. Nach (6) und (11) erhält man

14) $$\frac{\partial E}{\partial \xi_{jl}} = 0,$$

und alle Punkte des Totalphasenelementes (der Komplexion) genügen den Ungleichungen

15) $$|\xi_{jl}| \leqq \frac{1}{2} a_{jl}$$

16) $$h_j \leqq \frac{1}{2} b_j.$$

Dem Element $\mathfrak{D}T$ gehören nun alle Punkte an, die sowohl die Ungleichungen (15) und (16) als auch (4) befriedigen, d. h. die in der Totalphasenzelle $\varDelta T$ und zwischen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ liegen. Solche Punkte wird es aber dann und nur dann geben, wenn die Energiefläche $\mathfrak{E}$ die Totalphasenzelle überhaupt schneidet. Wir wollen, wenn es in $\varDelta T$ überhaupt Phasen von der Energie E^* gibt, die Komplexion energetisch möglich nennen, im anderen Falle energetisch unmöglich. Die Entscheidung darüber, welcher dieser Fälle vorliegt, kann leicht gefällt werden, wenn die Energie E_0 des Komplexionszentrums, d. h. des Punktes $\xi_{jl} = h_j = 0$ bekannt ist. Nach (6) wird sie aus der Gleichung

17) $$E_0 = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{i0}$$

gewonnen, unter ε_{j0} die Energien in den Zentren der Partialphasenpunkte verstanden. Da nun in jeder Partialphasenzelle die Energie von $\varepsilon_{j0} - \frac{\varDelta\varepsilon}{2}$ bis $\varepsilon_{j0} + \frac{\varDelta\varepsilon}{2}$ schwankt, so ist eine Komplexion dann und nur dann energetisch möglich, wenn

18) $$|E^* - E_0| < k\frac{\varDelta\varepsilon}{2}$$

ist. Mit dem Ausdruck

19) $$E^* - E_0 = DE,$$

der energetische Differenz genannt werden möge, wird auf die Größe von $\mathfrak{D}T$ zusammenhängen.

Ist $\varDelta T$ klein, so können $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ als Ebenen aufgefaßt werden. Dann gilt für $\mathfrak{E}$ nach (1) und (19) die Gleichung

$$\sum h\frac{\partial E}{\partial h} + \xi\frac{\partial E}{\partial \xi} = DE$$

oder nach (6) und (14)

20) $$\sum h_i |\mathfrak{r}_i \varepsilon_i| = DE.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir für $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ die Beziehungen

21) $$\sum h_i |\mathfrak{r}_i \varepsilon_i| = DE - \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}E^*$$

22) $$\sum h_i |\mathfrak{r}_i \varepsilon_i| = DE + \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}E^*$$

und nach (4) und (19) als Bedingung dafür, daß ein Punkt von ΔT auch in $\mathfrak{D}T$ liegt, die Ungleichung

$$|E - E_0 - DE| < \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}E^*.$$

Das ist nach (14)

23) $$|\sum h_i |\mathfrak{r}_i \varepsilon_i| - DE| < \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}E^*.$$

Daraus sieht man, daß es für jeden in ΔT gelegenen Phasenpunkt allein von den h-Werten abhängt, ob er in $\mathfrak{D}T$ liegt oder nicht [1]). Es ist also

$$\mathfrak{D}T = \int dh_1 \ldots dh_k \, d\xi_{j1} \ldots d\xi_{k\,2n-1}$$

wo die ξ den Ungleichungen (15) und die h den Ungleichungen (16) und (23) unterliegen.

Die Integration, nach den ξ liefert

$$\mathfrak{D}T = \left(\prod_{\substack{j=1\\i=1}}^{k,2n-1} a_{ji}\right) \int dh_1 \ldots dh_k$$

oder nach (9)

24) $$\mathfrak{D}T = \left(\prod_{i=1}^{k} do_i\right) \mathfrak{D}U$$

25) $$\mathfrak{D}U = \int dh_1 \ldots dh_k,$$

wo die h den Ungleichungen (16) und (23) genügen müssen.

Wir wollen jetzt setzen

26) $$h_j = b_j h'_j.$$

Dann erhalten wir

27) $$\mathfrak{D}U = \left(\prod_{i=1}^{k} b_i\right) \mathfrak{D}U'$$

28) $$\mathfrak{D}U' = \int dh'_1 \ldots dh'_k$$

wo nach (16), (26) und (8), (23) die h' den Ungleichungen

1) Die Totalphasenzelle läßt sich in Schichten von k-dimensionalen Parallelepipeden zerlegen, in deren jeder die Energieflächen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ in derselben Weise verlaufen.

29) $$|h_j'| < \tfrac{1}{2}$$

30) $$\left|\sum_{i=1}^{k} h_i' - \frac{DE}{\varDelta\varepsilon}\right| < \frac{1}{2}\,\frac{DE^*}{\varDelta\varepsilon}$$

unterworfen sind [1]).

Wir wollen nun eine Funktion $U'(\hat{E})$ für positive $\hat{E}$ durch das Integral

31) $$U' = \int dh_1' \ldots dh_k'$$

definieren, wobei die Integration über alle den Ungleichungen

32) $$|h_j'| \leqq \tfrac{1}{2}$$

33) $$0 < \sum_{i=1}^{k} h_i' \varDelta\varepsilon < \hat{E}$$

genügende Werte zu erstrecken. Für negative $\hat{E}$ soll definiert werden

34) $$U'(-\hat{E}) = -U'(\hat{E}).$$

Setzen wir nun

35) $$\hat{E}_1 = DE - \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}E^*$$

36) $$E_2 = DE + \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}E^*$$

so ist nach (29), (30), (32), (33), (35), (36)

37) $$U'(\hat{E}_2) - U'(\hat{E}_1) = \mathfrak{D}U'$$

also

38) $$\frac{\mathfrak{D}U'}{\mathfrak{D}E^*} = \frac{dU'}{d\hat{E}}\bigg|\,\hat{E} = DE.$$

Jetzt folgt aus (5), (24), (27), (28) für die Wahrscheinlichkeit

$$\varDelta W = \frac{1}{\Omega(E^*)}\left(\prod_{i=1}^{k} do_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k} b_i\right)\frac{dU'}{d\hat{E}}\bigg|\,\hat{E} = DE$$

und nach (10)

39) $$\varDelta W = \frac{1}{\Omega(E^*)}\varDelta\tau^k\,\frac{dU'}{d\hat{E}}\bigg|\,\hat{E} = DE.$$

Endlich sei

---

1) Wir haben durch (26) also eine Transformation ausgeführt, welche $\varDelta T$ in den Einheitswürfel und durch (21) und (22) gegebenen Flächen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ in solche Ebenen überführt, die senkrecht zur größten Diagonalen stehen, und deren Gleichungen

$$\Sigma h' = \frac{DE}{\varDelta\varepsilon} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{D}E}{\varDelta\varepsilon}$$

lauten.

40) $$\eta = \frac{\hat{E}}{\sqrt{k}} \frac{1}{\Delta \varepsilon}.$$

Dann ist U' eine Funktion von η die nach (31)—(33), (40) durch das System von Relationen

41) $$U' = \int dh'_1 \ldots dh'_k$$

42) $$|h'_j| < \tfrac{1}{2}$$

43) $$0 < \sum \frac{h'_j}{\sqrt{k}} < \eta$$

gegeben wird. Für die Wahrscheinlichkeit ΔW ergibt sich aber aus (39) und (40)

44) $$\Delta W = \frac{1}{\Omega(E^*)} \Delta \tau^k \frac{1}{\Delta \varepsilon \sqrt{k}} \frac{d U'}{d \eta}$$

wo zu setzen ist

45) $$\eta = \frac{DE}{\sqrt{k}} \frac{1}{\Delta \varepsilon}.$$

Nun bedeutet nach (41)—(43) U' das Volumen im Einheitswürfel zwischen zwei Ebenen, deren eine im Mittelpunkt und deren andere im Abstande η davon senkrecht die größte Diagonale durchsetzen. Also wird

46) $$\frac{d U'}{d \eta} = S_\varkappa(\eta)$$

der Flächeninhalt des ebenen Stückes sein, daß aus einer die größte Diagonale im Abstand η vom Zentrum senkrecht durchschneidenden Ebene vom Einheitswürfel herausgeschnitten wird. Diese Größe aber tritt im Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit einer Komplexion auf. Für sie gelten nach (44)—(46) und (19) die Gleichungen

47) $$\Delta W = \frac{1}{\Omega(E^*)} \Delta \tau^k \frac{1}{\Delta \varepsilon \sqrt{k}} S_\varkappa(\eta)$$

48) $$\eta = \frac{E^* - E_0}{\Delta \varepsilon \sqrt{k}}.$$

Ferner ist nach (18) und (45) die Komplexion dann und nur dann energetisch möglich, wenn

49) $$|\eta| < \tfrac{1}{2} \sqrt{k}$$

ist. Nun verschwindet offenbar an der Stelle

$$\eta_\varkappa = \tfrac{1}{2} \sqrt{k}$$

die Funktion $S_x(\eta)$. Setzen wir also fest, daß $S_x(\eta)$ für $|\eta| \geqq \eta_x$ verschwinden soll, so definieren diese Bestimmungen zusammen mit (46) für den unendlichen Argumentenbereich $-\infty$ bis $+\infty$ eine stetige Funktion und die Gleichung (47) trifft für alle Komplexionen zu.

Mit Rücksicht auf das Folgende ist es bequem zu setzen

51) $$\frac{\eta}{\sqrt{k}} = \xi;$$

dann gilt für energetisch mögliche Komplexionen

52) $$|\xi| < \tfrac{1}{2}.$$

§ 2. Der wahrscheinlichste Zustand.

Unter Zustand verstehen wir das System der Angaben darüber, wieviel Partialsysteme sich in jeder der vorhandenen z Partialzellen befinden. Es kann somit charakterisiert werden durch die Zahlen

$$f_1, f_2, \ldots f_z$$

wo $f_j \Delta\tau k$ die Anzahl der in der j^{ten} Zelle enthaltenen Partialsysteme bedeutet. Offenbar ist

53) $$\sum_1^z f_i \Delta\tau = 1$$

und die für die f_j überhaupt möglichen Werte bilden eine arithmetische Reihe mit der Differenz $\dfrac{1}{\Delta\tau k}$.

Aus diesen Fortsetzungen folgt:

1) daß zu einem Zustand viele Komplexionen gehören,

2) daß alle Komplexionen desselben Zustandes die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, die die Komplexionswahrscheinlichkeit des Zustandes heißen möge,

3) daß die Zustandswahrscheinlichkeit gleich der Komplexionswahrscheinlichkeit ist, multipliziert mit der Anzahl der zu ihm gehörigen Komplexionen.

Versteht man also unter $\Delta\mathfrak{W}$ die Zustandswahrscheinlichkeit und unterwirft den Ausdruck für die Komplexionszahl den aus der Gastheorie bekannten Umformungen, so folgt aus (47)

54) $$\ln \Delta\mathfrak{W} = C_k - k \sum f_i \ln f_i \Delta\tau + \ln S_k(\eta)$$

wo C_k eine nur von k und der Art der Einteilung abhängige Konstante bedeutet und wo nach (48) und (17)

(55)
$$\eta = \frac{\sqrt{k}}{\Delta \varepsilon}\left[\sum_{i=1}^{z} \varepsilon_{i0} f_i \Delta\tau - \varepsilon^*\right]$$

ist, unter ε^* den Quotienten

56)
$$\frac{E^*}{k} = \varepsilon^*$$

verstanden.

Nun ist für große Werte von k asymptotisch [1])

57)
$$S_k(\eta) = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\, e^{-6\eta^2}.$$

Daher ist, unter $\mathfrak{C}_k$ eine andere Konstante, verstanden nach (51)

58)
$$J \equiv \frac{ln \Delta \mathfrak{W}}{k} = \mathfrak{C}_k - \sum f_i ln f_i \Delta\tau - 6\zeta^2$$

59)
$$\zeta = \frac{1}{\Delta\varepsilon}\left[\sum \varepsilon_{i0} f_i \Delta\tau - \varepsilon^*\right].$$

Der wahrscheinlichste Zustand wird nun durch das System derjenigen F_j gegeben, das J zu einem Maximum macht unter allen (53) genügenden Wertsystemen. Nach dem Rolleschen Theorem gilt dafür

60)
$$-1 - ln\left[F_j + \beta_j \frac{1}{\Delta\tau k}\right] - \frac{12\zeta_j \varepsilon_{j0}}{\Delta\varepsilon} + \lambda = 0$$

61)
$$\zeta_j = \frac{1}{\Delta\varepsilon}\left[\varepsilon_{j0}\left(F_j + \gamma_j \frac{1}{\Delta\tau k}\right)\Delta\tau + \left(\sum_{\substack{i=1 \dots j-1 \\ j+1 \dots z}} \varepsilon_{i0} F_i \Delta\tau\right) - \varepsilon^*\right],$$

wo λ einen Lagrangeschen Multiplikator bedeutet und wo die β_j und γ_j den Umgleichungen

$$|\beta_j| \leqq 1$$
$$|\gamma_j| \leqq 1$$

genügen. Wir wollen nun die Zahl k der Systeme immer größer werden lassen. Die Einteilung in Partialzellen soll dagegen unverändert und die mittlere Energie ε^* konstant bleiben, sodaß die Zahl z der in Betracht kommenden Partialzellen ins Unendliche wächst. Dann erhält man in der Grenze

1) Vgl. A. Sommerfeld: Boltzmannfestschrift S. 859 sowie eine demnächst in den mathematischen Annalen erscheinende Arbeit von G. Polya. Die vorliegende Note hat mit der Sommerfeldschen Arbeit nicht nur formale Berührungspunkte sondern zeigt auch eine tiefer gehende Übereinstimmung der Grundgedanken.

$$1 + \ln F_i + \frac{12\zeta\,\varepsilon_{i0}}{\Delta\varepsilon} + \lambda = 0 \tag{62}$$

wo

$$\zeta = \frac{1}{\Delta\varepsilon}\left[\sum \varepsilon_{i0} F_i \Delta\tau - \varepsilon^*\right] \tag{63}$$

vom Index unabhängig ist.

Man kann auch schreiben

$$F_i = A e^{-\frac{\varepsilon_{i0}}{\vartheta}} \tag{64}$$

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{12\zeta}{\Delta\varepsilon}. \tag{65}$$

Hierzu tritt noch die aus (52) folgende Ungleichung

$$\left|\sum \varepsilon_i F_i \Delta\tau - \varepsilon^*\right| < \tfrac{1}{2}\,\Delta\varepsilon. \tag{66}$$

Geht man jetzt nach dem ersten Grenzübergang mit $\Delta\varepsilon$ und $\Delta\tau$ zur Grenze 0 über, so folgt aus (64) und (66) und (53) für die Funktion F, gegen die die F_i konvergieren

$$F = A e^{-\frac{\varepsilon}{\vartheta}} \tag{67}$$

$$\int F \varepsilon\, d\tau - \varepsilon^* = 0 \tag{68}$$

$$\int F\, d\tau = 1 \tag{69}$$

wo $d\tau$ das Volumendifferential im Partialphasenraum bedeutet und ε die Energie als Funktion der Phase. Wir sind also zu dem bekannten Maxwellschen Gesetz gelangt.

Die neuere Entwicklung der Physik[1]) legt die Frage nahe, welche Verteilungsfunktion man erhält, wenn man den Grenzübergang $k = \infty$, aber nicht den Grenzübergang $\Delta\varepsilon = 0$, $\Delta\tau = 0$ ausführt. Der allgemeine Charakter der Verteilungsfunktion ist auch in diesem Falle durch (64) gegeben, indeß sind diese Formeln noch unvollständig, solange die Konstanten ϑ und A unbekannt sind. Wenn wir diese Lücke ausfüllen, d. h. ϑ in seiner Abhängigkeit von ε^* bestimmen, so müssen wir damit zu einer Formel für die spezifische Wärme als Funktion der Temperatur gelangen. Nun bestimmt sich ϑ nach (53), (63), (65) und (67) aus dem Gleichungenpaar

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{12}{\Delta\varepsilon^2}\left[\left(\sum A\varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{\vartheta}} \Delta\tau\right) - \varepsilon^*\right] \tag{70}$$

---

1) Vergleiche besonders M. Planck, Theorie der Strahlung. 2. Aufl. 1913. S. 110 ff.

$$71)\qquad \sum A e^{-\frac{\varepsilon_i}{\vartheta}} \Delta\tau - 1 = 0$$

oder wenn ΔV_μ das Volumen im Partialphasenraum zwischen den Partialenergieflächen

$$\varepsilon = \mu \Delta\varepsilon$$
$$\varepsilon = (\mu + 1)\Delta\varepsilon$$

bezeichnet

$$72)\qquad \frac{1}{\vartheta} = \frac{12}{\Delta\varepsilon^2}\left[\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} A \Delta\varepsilon\mu e^{-\frac{\Delta\varepsilon . \mu}{\vartheta}} \Delta V_\mu\right) - \varepsilon^*\right]$$

$$73)\qquad \sum A e^{-\frac{\Delta\varepsilon\mu}{\vartheta}} \Delta V_\mu = 1.$$

In besonderen Fällen läßt sich ΔV_μ berechnen. Wenn z. B. unser Totalsystem ein fester einatomiger Körper ist, also die Partialsysteme materielle Punkte von der Masse m, die mit der Schwingungszahl ν um ein festes Zentrum oszillieren, so ist

$$74)\qquad \Delta V_\mu = \frac{1}{2\sqrt{m^3}} \frac{1}{\nu^3} \mu^2 \Delta\varepsilon^3.$$

In diesem Falle läßt sich die Beziehung zwischen ϑ und ε^* aus (72) und (73) explizit ermitteln. Wir wollen zur Abkürzung

$$75)\qquad \frac{\Delta\varepsilon}{\vartheta} = x$$

setzen. Dabei liegt es nahe unter dem Quotienten

$$75)\qquad \frac{\vartheta}{\varkappa} = T$$

die gewöhnliche Temperatur zu verstehen, wo $\varkappa$ die von Planck mit k bezeichnete Strahlungskonstante [1]) bezeichnet, sodaß

$$77)\qquad \frac{\Delta\varepsilon}{\vartheta} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varkappa T} = x$$

ist. Dann erhält man aus (72)—(74)

$$78)\qquad \frac{\varepsilon^*}{\Delta\varepsilon} = -\frac{x}{12} + \mathfrak{Ctg}\, x + \frac{2}{\mathfrak{Sin}\, x}.$$

Durch Differentiation folgt für die spezifische Atomwärme

$$79)\qquad \gamma = R x^2 \left\{\frac{1}{12} + \frac{1 + 2\,\mathfrak{Cos}\, x}{\mathfrak{Sin}^2 x}\right\}$$

1) l. c. S. 117 u. 166.

unter R die universelle Gaskonstante verstanden. Diese Formel gilt zwar für höhere Temperaturen in die auch in der bisherigen Theorie gültige Beziehung

$$80) \qquad \gamma = 3R$$

über, stimmt aber im übrigen so wenig mit der Erfahrung, daß der Versuch als gescheitert anzusehen ist, auf diesem Wege die Theorie der Zeitgesamtheit mit der Quantentheorie in Beziehung zu bringen. Vielleicht bringt irgend eine Modifikation die gewünschte Übereinstimmung [1]). Unsere Aufgabe sollte es überhaupt nicht sein, die neuere Theorie der spezifischen Wärme zu begründen, sondern nur zu zeigen, daß die Maxwellsche Verteilungsfunktion erhalten werden kann, auch wenn die Theorie der Zeitgesamtheit als Ausgangspunkt der Betrachtung gewählt wird.

§ 4. Beziehung zwischen der Theorie der Raumgesamtheit und den Theorien der Zeitgesamtheit und virtuellen Gesamtheit.

Innerhalb eines Totalsystemes kann einerseits für ein beliebiges aber festgehaltenes Partialsystem jeder Phase eine bestimmte zeitliche Wahrscheinlichkeit, andererseits zu einem bestimmten Zeitpunkt jeder der koexistierenden Phasen eine räumliche Wahrscheinlichkeit zugewiesen werden. In der üblichen molekulartheoretischen Darstellung fließt in den Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes räumliches und zeitliches Maß zusammen. Diese Verschmelzung wird mit Recht vorgenommen, deshalb nämlich, weil die Gastheorie den realen Zustand gewöhnlich als den stationären definiert und weil in einer im statistischen Gleichgewicht befindlichen Gesamtheit die räumliche Wahrscheinlichkeit der zeitlichen gleich ist. Nur für uns, die wir den realen Zustand als wahrscheinlichsten definieren, ergibt sich die Nötigung, die Gleichheit zwischen räumlicher und zeitlicher Wahrscheinlichkeit besonders nachzuweisen.

Nun kann Stationarität der Raumgesamtheit ein Doppeltes bedeuten. Es kann mit dieser Bezeichnung gemeint sein, daß die räumliche Verteilungsfunktion keine Änderungen erfährt. Durch diese Eigenschaft möge die **aktuelle Stationarität** definiert werden. Es kann aber auch nur — und dann wollen wir von **virtueller Stationarität** reden — eine solche Verteilung vorliegen, daß wenn die Systeme unabhängig voneinander wären,

1) Man beachte besonders, daß in (74) der Quotient von „Energiequantum“ $\Delta\varepsilon$ und Schwingungszahl ν, also das Wirkungsquantum h auftritt.

keine weitere Änderung ihrer Verteilungsfunktion stattfände [1]). Offenbar ist es nun hinreichende Bedingung für das Vorhandensein der virtuellen Stationarität, daß die Verteilungsfunktion reine Energiefunktion ist; aber diese Bedingung zieht noch nicht notwendig die aktuelle Stationarität nach sich, von der gerade die Gleichheit zwischen räumlicher und zeitlicher Wahrscheinlichkeit abhängt. Nicht daraus also, daß die Verteilungsfunktion eine reine Energiefunktion ist, sondern nur durch den Vergleich mit den für unvollständige Systeme geltenden Formeln [1]) kann man erkennen, daß die räumliche Wahrscheinlichkeit der Partialsysteme innerhalb eines Totalsystemes der zeitlichen gleich ist oder kürzer, daß die Raumgesamtheit ein Abbild der Zeitgesamtheit ist. Es liegt nun nahe, hiermit die Verteilung in einer virtuellen Gesamtheit zu vergleichen. Leider nur ist der Begriff der virtuellen Gesamtheit zunächst noch zu unbestimmt, als daß man genaue Aussagen über ihn machen könnte. Erstens bezeichnen wir mit diesem Ausdruck eine vorgestellte Gesamtheit sehr vieler Systeme vom gleichen Mechanismus, zwischen denen, eben weil sie nur vorgestellt sind, keine wechselseitige physikalische Beeinflussung besteht (unbestimmte virtuelle Gesamtheit). Was sie determiniert ist der Mechanismus, dessen individuelle Verwirklichungsmöglichkeit sie darstellt. Aber es ist klar, daß bei einer so allgemein gehaltenen Definition über die Verteilung in ihr keine Aussagen sondern nur Annahmen gemacht werden können, daß Hypothesen nicht im Sinne von Vermutungen, sondern nur im Sinne von Festsetzungen möglich sind (bestimmte virtuelle Gesamtheit). Andererseits ist zuzugeben, daß man sich zu keiner Zeit gescheut hat, dennoch bestimmte Behauptungen oder wenigstens Vermutungen über die Wahrscheinlichkeit in einer Gesamtheit isolierter Systeme aufzustellen, und diese nicht durch eine definierende Annahme festzulegen sondern umgekehrt der durch den Mechanismus definierten Gesamtheit, wenn auch nur vermutungsweise eine natürliche Verteilung zuzuschreiben (bestimmte natürliche virtuelle Gesamtheit). Denn was wäre die Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung,

---

1) In einer virtuellen Gesamtheit dagegen gibt es nur eine Art von Stationarität, die stets vorhanden ist, wo die Verteilungsfunktion reine Energiefunktion ist, und sie hat stets Gleichheit zwischen räumlicher und zeitlicher Wahrscheinlichkeit zur Folge.

1) Diese siehe u. a. in den Arbeiten: W. Lenz, Phys. Zeitschrift Bd. 11. 1910 S. 1175. P. Hertz, K. Akademie v. Wetenschappen 6 Amsterdam 11. Jan. 1911 S. 844 und in meiner demnächst in den mathem. Annalen erscheinenden Abhandlung.

das Prinzip der gleichberechtigten Fälle, anderes als ein Unternehmen, wenigstens in gewissen Fällen über die virtuelle Häufigkeit etwas auszusagen? Wenn wir nun zu einer solchen natürlichen Verteilung gelangen wollen, werden wir dem Begriffe des Mechanismus etwas zusetzen müssen, nämlich eine wenn auch sehr allgemein gehaltene Angabe über die Art und Weise die ihm entsprechenden Individuen zu erzeugen. Nun gibt es ein sehr einfaches Mittel sich eine solche Gesamtheit zu verschaffen. Wir nehmen ein Totalsystem der von uns betrachteten Art und zerlegen es zu einem bestimmten Zeitpunkt in seine Teilsysteme. Dieses Vorgehen wird kein ganz unnatürliches sein. Denn wer etwa beauftragt wäre, eine Menge gleichbeschaffener Gasgemische von dem Mischungsverhältnis der atmosphärischen Luft darzustellen, wird kein einfacheres Verfahren finden können, als zunächst offene Gefäße herzustellen und dann alle durch einen Deckel zu verschließen, die Gesamtheit also durch Abtrennung aus dem einen Luftmeer zu erzeugen.

Wenn nun ein Totalsystem plötzlich in eine Menge von Partialsystemen zerlegt wird, so bekommt man eine Gesamtheit, die sich im statistischen Gleichgewicht befindet. Denn nach (67) bis (69) ist im Augenblick der Abtrennung mit überwiegender Wahrscheinlichkeit virtuelle Stationarität zu erwarten — auf die aktuelle kommt es hier garnicht an — und diese muß sich auch nach der Loslösung dauernd aufrecht erhalten.

Wählt man aber aus der so erhaltenen Menge überhaupt entstandenen Teilsysteme eine große Anzahl aus, so wird sich auch diese Teilmenge im statistischen Gleichgewicht befinden. Also auch wenn man nur einige durch Abtrennung vom Totalsystem entstandenen Systeme betrachtet, bekommt man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die der Stationaritätsbedingung genügt. Dabei sind wir uns wohl bewußt, schon ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Axiom anzuwenden, den Grundsatz nämlich: Wenn aus einer Menge, die in gleichberechtigte Teile zerfällt, durch willkürliche Wahl eine Teilmenge ausgesondert wird, so ist die Häufigkeit mit der ein Zustand in der Teilmenge angetroffen wird, der Häufigkeit seines Vorhandenseins in der Gesamtmenge proportional. Auf eine objektive Deduktion dieses Satzes kann hier nicht eingegangen werden. Wenn sie überhaupt möglich sein sollte, so wird sie nur so geschehen können, daß man das auswählende Prinzip, sei es auch ein organisches Wesen, als Maschine deutet und mit zum Totalsystem rechnet. Jedenfalls wird man zugeben, daß die bisher über solche Mengen getroffenen Festsetzungen nicht mehr mit völliger

Willkür behaftet erscheinen, und daß wenigstens ein Weg zu ihrer objektiven Begründung aufgezeigt ist.

Denken wir uns jetzt eine Welt, die durch plötzliche Zerlegung eines Totalsystemes in Partialsysteme entstanden ist. Eine beliebige aber sehr große Teilmenge von ihnen wird immer noch eine durch (67) bis (69) gegebene Häufigkeitsverteilung aufweisen. Wollten wir nun wiederum alle diejenigen ihrer Systeme zusammenstellen, denen eine bestimmte Energie E^* zukommt, so würden wir wohl kein einziges finden. Denn obwohl sehr groß, ist nach unserer Annahme die Menge aller in der Welt überhaupt vorhandenen Partialsysteme doch schließlich endlich, und auf diejenigen mit genau der Energie E^* entfällt ein verschwindend kleiner Bruchteil. Wir müssen daher eine kleine Schwankung für E^* zulassen, etwa so, daß alle Systeme mit einer Energie zwischen E und $E+dE$ als im Besitz der Energie E befindlich angesehen werden mögen. Suchen wir daher alle in diesem Sinne die Energie E^* aufweisenden Systeme zusammen, so erhalten wir — das folgt aus den angestellten Entwickelungen — eine Menge isolierter Systeme, deren Verteilung durch die Formel (5) gegeben ist, eine mikrokanonische Gesamtheit, das Abbild einer Zeitgesamtheit.

Wird endlich aus der Menge aller Systeme von der vermeintlichen Energie E^*, die aber in Wahrheit eine Energie zwischen E^* und E^*+dE^* besitzen, eine sehr große Teilmenge ausgewählt, so wird auch diese die Häufigkeitsfunktion der mikrokanonischen Gesamtheit besitzen. Es tritt also neben dem Begriff der im Universum real vorhandenen Gesamtheit der Begriff einer beliebig ausgewählten Menge. Gerade sie verdient den Namen einer natürlichen virtuellen Gesamtheit. Die bloße Vorstellung einer dem Mechanismus entsprechenden Menge führt zwar noch keine Häufigkeitsvorstellung mit sich. Aber die Forderung, den Begriff irgendwie zu realisieren, bedeutet in unserm Falle, wo die Abtrennung bereits vorgenommen war, nichts anderes als daß eine Auswahl aus den schon vorher real vorhandenen Systeme getroffen werden sollen. Damit ist gezeigt, daß in einer so idealisierten Welt die virtuelle Gesamtheit das Abbild der Zeitgesamtheit ist. Hieran wird es auch nichts ändern, wenn die Abtrennung nicht in einem Zeitpunkt, sondern zu beliebig vielen Zeitpunkten erfolgt.

Daß allgemein die natürliche virtuelle Gesamtheit ein Abbild der zeitlichen ist, ist ein fraglos richtiges Axiom. Niemand wird bezweifeln, daß, wie bei einem einzigen Roulettespiel die Kugel in $^1/_{37}$ der Zeit auf 0 verweilt[1]), beim Eintreten in einen Saal mit

1) Der Zusammenhang zwischen relativer Verweilzeit und zeitlicher Wahr-

3700 Roulettspielen in 100 von ihnen die Kugel in der Nullstellung zu finden. Andererseits ist nicht einzusehen, was eigentlich der tiefere Grund für den geheimnisvollen Zusammenhang zwischen Zeitgesamtheit und virtueller Gesamtheit sein mag. Es ist geradezu ein logischer Widerspruch, über die Häufigkeitsverteilung isolierter Systeme etwas auszusagen, über den Zusammenhang, von etwas, was keinen Zusammenhang besitzt. Also muß, wenn jenes Axiom eine objektive Bedeutung haben soll, die Beziehungslosigkeit nur scheinbar sein, und das ist schwerlich anders so möglich, als daß früher ein Zusammenhang bestanden hat, der jetzt gelöst ist. Wollte man auf dieser Grundlage eine objektive Theorie der virtuellen Gesamtheit errichten, so hätte man jedenfalls das trennende Prinzip, sowohl als auch das auswählende, von dem früher die Rede war, mit in das Totalsystem einzubeziehen. Diesen Weg zu beschreiten, fordert geradezu die in den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung enthaltene Antinomie gebieterisch auf. Dafür daß er wirklich gangbar ist, mag aber als Vorbedeutung dienen, daß in einer sehr idealisierten Welt allerdings noch unter Zuhülfenahme gewisser Wahrscheinlichkeitssätze ein Zusammenhang zwischen virtueller und zeitlicher Gesamtheit aufgezeigt wurde. Aber die weitere Durchführung dieses Programmes überschreitet den Rahmen der vorliegenden Abhandlung; sie würde dazu führen können, der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine objektive Grundlage zu geben, ihr wichtigstes Prinzip, das Prinzip der gleichberechtigten Fälle objektiv zu deuten und alle Wahrscheinlichkeit auf zeitliche Wahrscheinlichkeit zurückzuführen. Nur wäre fraglich, ob man hierbei stehen zu bleiben hätte, ob nicht letzten Endes der Zeitbegriff wieder herausfiele und als letztes Fundament sowohl für die Physik als auch für die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Satz vom Typus der Ergodenhypothese betrachtet werden müßte.

---

scheinlichkeit — diese wie auf S. 1 Anm. 2 gefaßt — läßt sich nur objektiv deduzieren, wenn das die diskreten Zeitpunkte auswählende Prinzip mit ins Totalsystem einbezogen wird.

Weitere Beiträge zur Gliederung des Oberdevon.

Von

R. Wedekind.

Vorgelegt von A. v. Koenen in der Sitzung vom 25. Januar 1913.

Einleitung.

Die große Schwierigkeit Oberdevon Vorkommen verschiedener Lokalitäten miteinander zu vergleichen, beruht, abgesehen von den schwierigen Lagerungsverhältnissen und dem vielfachen Fazieswechsel, besonders darin, daß eine im einzelnen palaeontologisch begründete Zonenfolge bisher fehlte. Ausgehend von den grundlegenden Arbeiten A. DENCKMANN'S (1901)[1]) im rheinischen Gebirge habe ich in den letzten 5 Jahren die besseren Oberdevonprofile auf den Fauneninhalt der einzelnen Horizonte untersucht. Diese umfangreichen Aufsammlungen ergaben das Resultat, daß das Oberdevon in der gleichen Weise in Stufen und Zonen gegliedert werden kann, wie das bereits von QUENSTEDT und OPPEL für die Juraformation und von A. V. KOENEN für die untere Kreide durchgeführt ist.

Zur Fortsetzung meiner früheren Studien wurde ich noch besonders dann angeregt, als die Arbeiten anderer Geologen (RAYMOND 1910, SOBOLEW 1912, BORN 1912, PERNA 1912) ergaben, daß die von mir bereits früher (1908) publizierte Zonenfolge des höheren Oberdevon auch für andere, selbst außerdeutsche Vorkommen zutrifft. Die nachfolgende Arbeit PERNA'S zeigt, daß auch im Ural die westfälische Gliederung des Oberdevon wiederkehrt. Einzelne Bemerkungen PERNA'S machen es außerdem wahrscheinlich, daß bei der weiteren Durcharbeitung der Ober-

---

1) Die Literatur ist am Schlusse dieser Abhandlung zusammengestellt.

devonprofile im Ural auch die feinere Zoneneinteilung durchführbar sein wird.

In der nachfolgenden Abhandlung gebe ich eine Zusammenstellung der von mir bisher als selbständig erkannten Oberdevonstufen und Zonen. Ausführliche Fossillisten enthalten meine bereits erschienenen und im Druck befindlichen Abhandlungen (siehe das Literaturverzeichnis auf S. 9).

Übersicht über die Oberdevonstufen.

Das Oberdevon läßt sich in 6 Stufen teilen, die durch Goniatiten- resp. Clymeniengattungen charakterisiert werden können. Sie werden hier mit römischen Zahlen und die in ihnen unterschiedenen Zonen mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Es sind:

	WEDEKIND 1913:	A. DENCKMANN 1901:
VI:	Gonioclymenienschichten.	Wocklumer Kalk.
V:	Laevigatastufe.	Fossley. Dasberger Kalk.
IV:	Postprolobitesstufe.	Annulata Kalk.
III:	Prolobitesstufe.	Enkeberger Kalk z. T.
II:	Cheilocerasstufe.	
I:	Manticocerasstufe.	Adorfer Kalk. Webeler Kalk. Prolecanitenschichten.

Zoneneinteilung.

I. *Manticocerasstufe.*

Die untere Grenze des Oberdevon ist allgemeinem Brauch nach dort zu ziehen, wo im rheinischen Gebirge zuerst Goniatiten aus der Familie der *Manticoceratinae* erscheinen. Sie sind bezeichnend für die ganze Stufe, oberhalb der sie nur mit einer Art *Manticoceras superstes* Wdkd. (1908) vorkommen. Innerhalb der Manticocerasstufe selbst erreichen die drei Gattungen *Pharciceras* Hyatt, *Manticoceras* Hyatt em. Holzapf. und *Crickites* Wdkd. nacheinander das Maximum der Häufigkeit. *Pharciceras* ist ganz auf den unteren Teil beschränkt, wie das bereits FRECH (1888) und später A. DENCKMANN nachgewiesen haben; *Manticoceras* wird erst in dem mittleren Teile häufig und die Gattung *Crickites*, die bei Martenberg in dem mittleren Teile nur mit einer Art in wenigen Exemplaren von mir beobachtet ist, dominiert in dem oberen Teile,

den man meist bisher als Kellwasserkalk bezeichnet hat. Dazu kommt eine weitere Zone, die durch gerippte *Manticoceras*- und *Gephyroceras*arten ausgezeichnet ist. Vollständige Profile finden sich an der Martenberger Klippe und nach einer Mitteilung von DR. LOTZ im Tagebau der Grube Diana in der Dillmulde. Namentlich auf Grund meiner Aufsammlung an der Martenberger Klippe unter Mitbenutzung des von Herrn Geheimrat V. KOENEN bei Bicken gesammelten Materials ergibt sich folgende Zonenfolge:

I δ. Zone des *Crickites Holzapfeli* WDKD.
I γ. „ „ *Manticoceras cordatum* SANDB. und *carinatum* SANDB.
I β. „ „ *Gephyroceras nodulosum* WDKD.
I α. „ „ *Pharciceras lunulicosta* SANDB.

Die Zone I α ist bereits 1888 von FRECH aufgestellt. Die Zone I β entspricht dem Webeler Kalk DENCKMANNS. Ausführliche Fossillisten wird meine im Druck befindliche Arbeit über die Goniatitenfauna des unteren Oberdevon von Martenberg enthalten.

Ein Teil oder auch die ganze Stufe kann in Westfalen durch Korallen- oder Brachiopodenkalke vertreten sein (Burg bei Brilon), der untere Teil, namentlich die Zone I α auch ganz fehlen. Die weite Verbreitung der Manticocerasstufe (Amerika, Europa und Nordafrika) ist bekannt und in jedem Lehrbuch der Geologie aufgeführt. Erwähnenswert ist nur, daß es sich fast immer um Faunen handelt, die einer der oben angeführten Zonen entsprechen. So führt z. B. TH. TSCHERNYSCHEW (1887, Taf. I u. II) aus dem Ural nur solche Goniatiten der Manticocerasstufe an, die der Zone I γ in Westfalen entsprechen.

II. *Cheilocerasstufe.*

Die primordialen Goniatiten der Stufe I reichen mit nur einer einzigen oben angeführten Art in die Cheilocerasstufe hinauf. Es herrschen in derselben Goniatiten der Gattung *Cheiloceras* FRECH, *Dimeroceras* HYATT em. WDKD. und *Aganides* MONTF. vor. Diese Gattungen sind wiederum fast ganz mit Ausnahme von *Aganides* auf diese Stufe beschränkt. Es ist von besonderer Wichtigkeit, daß E. PERNA im Ural zu den gleichen Resultaten gelangt ist, indem er zeigte, daß sich in der nächsthöheren Stufe, der Prolobitesstufe, genau wie in Westfalen kein Goniatit der Gattung Cheiloceras fand.

Eine Zweiteilung dieser Zone ist von mir 1908 auf Grund der Profile am Enkeberg und an der Burg etc. durchgeführt. Ich habe damals unterschieden

II β. Zone des *Dimeroceras Gümbeli* Wdkd. und des
Aganides lentiformis Sandb. (= obere Cheilocerasschichten).

II α. „ „ *Cheiloceras subpartitum* Muenst. und
Cheiloceras Verneuili Muenst. (= untere Cheilocerasschichten).

Die Cheilocerasstufe ist weitverbreitet. Ein zweifelhaftes Bruchstück eines Cheiloceras hat J. M. CLARKE (1904, S. 334) aus dem Osten Nordamerikas beschrieben. In Europa liegt das westlichste bisher bekannt gewordene Vorkommen bei Barcelona. ALMERA und BERGERON (1904) führen von dort Cheiloceraskalke an. Bereits 1890 hatte SEUNES Kalke mit *Cheiloceras amblylobum* Sandb. aus den Pyreneen vom Gère Ballesten beschrieben. A. BRESSON (1903) hat dann später gezeigt, daß sie im Hangenden der Manticocerasstufe auftreten.

Die französischen Vorkommen, die Goniatitenschiefer von Rostellec (Brest) mit *Cheiloceras curvispina* Sandb. und *Cheiloceras amblylobum* Sandb. und von Cabrières sind seit langem bekannt. GOSSELET hat aus den Ardennen (vgl. BARROIS 1898) ein weiteres Vorkommen aus der Gegend von Marienbourg beschrieben. Diese Vorkommen sind deshalb beachtenswert, weil sie nicht nur faunistisch, sondern auch faciel vollkommen mit den Goniatitenschiefern von Nehden übereinstimmen (Zone II α).

In Deutschland hat neuerdings A. BORN (1912) gezeigt, daß im Aecketal (Harz) die Zone II β in gleicher Weise wie am Enkeberge ausgebildet ist. Weitere Vorkommen finden sich bei Aachen und an vielen Stellen des rheinischen Schiefergebirges. Von Interesse ist die im vorigen Jahre von SOBOLEW (1912) bei Kielce im polnischen Mittelgebirge ebenfalls durchgeführte Zweiteilung der Cheilocerasstufe, die mit den unteren und oberen Cheilocerasschichten verglichen werden. Über das Vorkommen im Ural siehe die Arbeit von A. Perna.

III. *Prolobitesstufe.*

Oberhalb der Cheilocerasstufe folgt im rheinischen Gebirge mit ziemlich scharfer Grenze die Prolobitesstufe. Besonders auffällig ist das nahezu vollkommene Zurücktreten der Gattung *Cheiloceras* und *Dimeroceras*. Demgegenüber erscheint hier besonders häufig *Pseudoclymenia* Frech in den tieferen Teilen der Prolobitesstufe, Goniatiten aus der Gruppe des *Sporadoceras Münsteri* v. Buch (Goniatiten der Gruppe des *Sporadoceras biferum* Phill. sind bereits in der Zone II β vorhanden), die Gattung *Prolobites* Karpinsky,

Praeglyphioceras Wdkd. und vor allen gerippte Clymenien aus der Verwandtschaft der *Clymenia Frechi* Wdkd. und *Pompeckji* Wdkd. in dem oberen Teile. Auf Grund der verschiedenen Faunen war es am Enkeberge, an der Burg bei Brilon und am Beul bei Balve möglich, die Prolobitesstufe einzuteilen in

III β. Zone der *Clymenia involuta* Wdkd. und des *Prolobites delphinus* Sandb.

III α. „ „ *Pseudoclymenia Sandbergeri* Guembel.

Ausführliche Fossilisten habe ich in meiner 1908 erschienenen Abhandlung gegeben.

Die Prolobitesstufe, namentlich die Zone III β ist weitverbreitet. P. E. RAYMOND (1910) hat eine Prolobitesfauna aus dem östlichen Amerika beschrieben. In Deutschland hat A. BORN 1912 die beiden Zonen im Aecketal nachgewiesen. SOBOLEW hat Prolobitesschichten von Kielce beschrieben. Auffallend ist die vollkommene Übereinstimmung der Fauna, die A. PERNA im Ural aus den Prolobitesschichten gesammelt hat, mit der vom Enkeberg, wovon ich mich persönlich habe überzeugen können.

IV. *Postprolobitesstufe.*

Die Stufe IV oder Postprolobitesstufe stimmt ziemlich genau mit den Annulatakalken DENCKMANN'S überein. Die Bezeichnung Annulatakalke verwende ich deshalb nicht, weil *Clymenia annulata* Muenst. auf den oberen Teil beschränkt ist und sich, soweit ich bisher beobachtet habe, in dem unteren Teile nicht findet.

Die Gattung *Prolobites* Karp. und *Praeglyphioceras* Wdkd., die Clymenien der Gruppe der *Clymenia involuta* Wdkd. und der *Clymenia Pompeckji* Wdkd., die Leitformen der Prolobitesstufe fehlen ganz. Neu sind die Goniatiten der Gattung *Postprolobites* Wdkd. und *Posttornoceras* Wdkd. Dazu kommen als wichtige Leitformen kräftig berippte Goniatiten der Gruppe der *Clymenia annulata* Muenst. s. str. mit einfachen nur schwach nach vorn konkaven Anwachsstreifen (die ebenfalls gerippten Clymenien der Gruppe der *Clymenia Pompeckji* haben sichelförmige Anwachsstreifen und eine andere Lobenlinie). Am Enkeberg, an der Burg bei Balve ließ sich die Postprolobitesstufe in die beiden Zonen teilen:

IV β. Zone des *Postprolobites Frechi* Wdkd. und der *Clymenia annulata* Muenst.

IV α. „ der *Clymenia protacta* Wdkd.

Die reiche Fauna ist bisher noch nicht bearbeitet.

Die Stufe IV ist am Beul bei Balve nur in dem oberen Teile aufgeschlossen und zwar, wie das bereits von A. DENCKMANN beschrieben ist, außerordentlich fossilreich. An der Burg und am Enkeberg findet sich dagegen nur der untere Teil mit *Clymenia protacta*, der unmittelbar den Prolobitesschichten aufliegt. Über weitere Vorkommen fehlen noch einwandsfreie Angaben.

V. *Laevigatastufe.*

Die in der Umgegend von Balve am Burgberg, in dem Steinbruch an der Straße Hövel-Beckum, am Dasberg und Beul typisch entwickelte nächsthöhere Zone ist von der Postprolobitesstufe faunitisch scharf getrennt. *Clymenia laevigata* Muenst. s. str., die nur ganz vereinzelt und in zweifelhaften Formen aus den oberen Prolobitesschichten des Enkeberges bekannt geworden ist und die in Postprolobitesschichten fehlt oder doch zu fehlen scheint, erscheint in den Laevigatakalken in so großer Individuenzahl und als durchaus dominierende Form, sodaß sie diesem Teil der Clymenienschichten einen besonderen Charakter aufprägt. Schon an der unteren Grenze, die in dem Steinbruch an der Straße Hövel-Beckum aufgeschlossen ist, tritt dies deutlich hervor. In diesem Steinbruch entsprechen die tiefsten dunklen Kalklagen dem oberen Teil der Prolobitesschichten. Es folgen darüber die in diesem Aufschluß nur wenig mächtigen Postprolobitesschichten und dann an einer scharfen und auch petrographisch ausgezeichneten Grenze die tiefsten Teile der Laevigataschichten. In diesem unteren Teile fand sich vorwiegend *Clymenia laevigata* Muenst. Außerdem nur 2 Exemplare von Clymenia striata Muenst., zwei neue Gonioclymenien und neue Goniatitenarten. 95 % der gefundenen Cephalopoden gehören zu Clymenia laevigata Muenst. Ich besitze allein aus diesem Aufschluß 50 vollständige Exemplare.

Clymenia bisulcata Muenst., die in dem tieferen Teile der Stufe zu fehlen scheint, findet sich in dem höheren Teil der Laevigatakalke relativ häufig zusammen mit *Clymenia laevigata* Muenst. und *undulata*[1]) Muenst. Die diese Clymenien führenden Schichten wird man vielleicht später als eine besondere Zone — Zone der *Clymenia bisulcata* Muenst. — ausscheiden müssen.

Außer dem Dasberger Kalk DENCKMANNS enthält auch der Fossley eine gleiche oder doch ähnliche Fauna, sodaß ich faunistisch den Fossley DENCKMANNS der Laevigatastufe zurechnen

1) *Clymenia aff. undulata* Mstr. kommt als Seltenheit auch in der Zone IIIβ vor.

möchte. Ich weise insbesondere auf das relativ häufige Vorkommen großer Exemplare von *Clymenia laevigata* im Fossley am Burgberg bei Balve hin.

Die Laevigatastufe ist ebenfalls weit verbreitet. Das westlichste europäische Vorkommen ist neuerdings von PRUVOST (1912) aus Südportugal bekannt geworden. BAROIS (1898) und A. BRESSON (1903) führen aus der „ravin de Coularie" 2 km westlich von Bourg d'Oueil *Oxyclymenia undulata* MUENST., *Oxyclymenia striata* MUENST. und *Cyrtoclymenia laevigata* MUENST. an. Das ist eine Fauna, die durchaus der rheinischen Laevigatastufe entspricht. Das gleiche gilt von dem Clymenienvorkommen, das GORTANI (1907) vom Monte primoso ausführlich beschrieben hat.

VI. *Gonioclymenienstufe.*

Diese Stufe bildet den oberen Teil des Oberdevon. Sie ist von mir palaeontologisch noch nicht durchforscht worden. A. DENCKMANN gibt als Leitform *Clymenia subarmata* MUENST. an.

Sowohl die Laevigata- wie die Gonioclymenienstufe ist weit verbreitet. Es seien nur die Vorkommen von Schübelhammer, von Cabrières und von Klein Pal (Karnische Alpen)[1]) erwähnt. Erst nach weiterem sorgfältigen Sammeln und einer Neubearbeitung der Clymenien wird sich die Frage entscheiden lassen, wie die beiden letzten Stufen gegeneinander im einzelnen abzugrenzen sind. Die sorgfältigen Arbeiten von DENCKMANN bieten dabei eine durchaus zuverlässige Grundlage.

Zusammenfassung.

In der nachfolgenden Tabelle ist die Stufen- und Zonenfolge des Oberdevon tabellarisch zusammengestellt. Eine Einteilung des Oberdevon in ein unteres, mittleres und oberes, wie das von FRECH und mir früher vertreten ist, kann ich heute nicht mehr aufrecht erhalten, da die einzelnen 6 Stufen einander faunistisch und der Mächtigkeit nach vollkommen gleichwertig sind.

1) Wahrscheinlich handelt es sich bei diesem Vorkommen um echte Laevigatakalke.

Stufen:		Zonen:	Einteilung Denckmann's:	Wichtige Aufschlüsse:
VI.	Goniocly-menienstufe			
V.	Laevigata-stufe.		Fossley.	
		Zone mit *Clymenia bisulcata* Mstr.	Dasberger Kalk.	Dasberg, Burgberg bei Balve.
		Zone mit *Clymenia laevigata* Mstr.		Hövel b. Balve.
IV.	Postprolobites-stufe.	IV β. Zone der *Clymenia annulata* Muenst. und des *Postprolobites Frechi* Wedekind.	Annulatakalk.	Beul b. Balve.
		IV α. Zone der *Clymenia protacta* Wedekind.		Burg und Enkeberg b. Brilon.
III.	Prolobitesstufe.	III β. Zone des *Prolobites Delphinus* Sandb. und der *Clymenia involuta* Wedekind.	Enkeberger Kalk z. T.	Hövel bei Balve, Enkeberg und Burg b. Brilon.
		III α. Zone der *Pseudoclymenia Sandbergeri* Gümbel em. Frech.		Enkeberg u. Beul b. Balve. Aecketal im Harz.
II.	Cheilocerasstufe.	II β. Zone des *Dimeroceras Gümbeli* und des *Aganides lentiformis* Sandb.		Enkeberg b. Brilon, Aecketal im Harz.
		II α. Zone des *Cheiloceras subpartitum* Münst.		Nehden b. Brilon, Enkeberg.
I.	Manticocerasstufe.	I δ. Zone des *Crickites Holzapfeli* Wedkd.	Adorfer Kalk.	Martenberg bei Adorf, Bicken.
		I γ. Zone des *Manticoceras cordatum* Sdbgr. em. Wedekd. und des *Mant. carinatum* Sandb.		Martenberg bei Adorf, Oberscheld, Balve.
		I β. Zone des *Gephyroceras nodulosum* Wedekd.	Webeler Kalk.	Martenbg., Beul bei Balve.
		I α. Zone des *Pharciceras lunulicosta* Sandbgr.	Prolecaniten-schichten.	Iserlohn, Balve, Dillmulde, Martenberg.

Literatur.

ALMERA und BERGERON 1904: Bulletin de la Société géologique de France.
BARROIS 1898: Des relations des mers dévoniennes de Bretagne avec celles des Ardennes. Annales de la Société géologigue du Nord. Bd. XXVII.
1898: Les goniatites du ravin de Coularie (Haute Garonne). Annales de la Société géologique du Nord. Bd. XXVII.
BRESSON 1903: Études sur les formations anciennes des Hautes et Basses Pyrenées. Bulletin des Services de la Carte géologique de France. Nr. 93.
BORN, A. 1912: Die geologischen Verhältnisse des Oberdevon im Aecketal (Oberharz). Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie etc. Beilage-Bd. XXXIV.
CLARKE, J. M. 1898: The Naples Fauna. Part. I.
1904: The Naples Fauna. Part. II. New York State Museum. Memoir 6.
DENCKMANN, A. 1901: Ueber das Oberdevon auf Blatt Balve. Jahrb. d. Kgl. preuß. geol. Landesanst. für das Jahr 1900. Berlin 1901.
1901: Devon und Karbon des Sauerlandes, Blatt Balve und Hohenlimburg. Jahrb. d. kgl. preuß. geol. Landesanst. für das Jahr 1902. Berlin 1905.
FRECH, FR. 1887: Die palaeozoischen Bildungen von Cabrières (Languedoc). Zeitschr. d. Deutsch. geol. Ges. Bd. 39.
1888: Geologie der Umgegend von Haiger bei Dillenburg. Abhandl. zur. geol. Spezialkarte von Preußen. Bd. VIII, Heft 3.
GORTANI, M. 1907: La Fauna a Climenie del Monte Primosio. Memoria presentata alla R. Accademia delle Science del' Instituto di Bologna.
PRUVOST, P. 1912: Sur la presence de fossiles d'âge dévonnien superieur dans les schistes à neréites de San Domingo. Annales de la Société géologique du Nord. Bd. XLI.
RAYMOND, P. E. 1910: The Clymenia Fauna in the American Devonian. The Seventh International Zoological Congress. Boston Meeting. 1907.
SEUNES. 1890/91. Sur le Devonien des Basses Pyrenées. Bulletin de la Société géologique de France [3] Bd. 19.
SOBOLEW, O. 1912: L'étage famennien de la chaine de montagne de Kielce-Sandomierz. Annuaire géologique et mineralogique de la Russie. Vol. XIII.
TSCHERNYSCHEW. 1887: Die Fauna des mittleren und oberen Devon am Westabhange des Urals. Mém. du Comité géologique. Tom. III. N. 3.
WEDEKIND, R. 1908: Die Cephalopodenfauna des höheren Oberdevon am Enkeberge. Neues Jahrbuch für Mineralogie etc. Beilage-Bd. XXVI.
1909: Posttornoceras Balvei n. gen. et n. sp. Centralblatt für Mineralogie, Geologie etc.
1913 a: Die Goniatitenkalke des unteren Oberdevon von Martenberg. Sitzungsberichte der Gesellschaft naturforschender Freunde. Berlin.
1913 b: Die Familie der *Prolobitidae* im Rheinischen Gebirge. Neues Jahrbuch für Mineralogie etc. (Im Druck.)

Über die Beziehungen des Oberdevon im östlichen Ural zu dem von Westfalen und Schlesien.

Von

E. Perna, Petersburg.

Vorgelegt von A. v. Koenen in der Sitzung vom 25. Januar 1913.

In dieser kurzen Mitteilung sollen nur die Hauptresultate zusammengefaßt werden, zu denen ich beim Vergleiche der uralischen Vorkommen mit denjenigen in Deutschland gekommen bin. Ein ausführlicher Bericht darüber erscheint in meiner monographischen Beschreibung der oberdevonischen Cephalopoden des Ost-Urals.

Durch die Arbeiten von TH. TSCHERNYSCHEW ist es bereits seit einer Reihe von Jahren bekannt, daß das Oberdevon im Uralgebirge in ein unteres und ein oberes geteilt werden kann. Im allgemeinen entspricht diese Einteilung ziemlich genau den westeuropäischen. Im Westen wie im Osten des Urals ist die untere Abteilung an vielen Stellen als Iberger Kalk oder auch als Adorfer Kalk ausgebildet. Die obere Abteilung dagegen meist als Clymenienkalk. Besonders interessant sind aber die oberdevonischen Ablagerungen im südlichen Teile des Osturals, in der Umgegend der Stadt Werchne-Uralsk, da sie eine sehr genaue Parallelisation mit dem deutschen Oberdevon erlauben. Schon Professor A. KARPINSKY wies im Jahre 1885 darauf hin, daß die von ihm damals in der Umgegend von Werchne-Uralsk zuerst entdeckte Clymienfauna mit der des Enkebergs in Westfalen übereinstimmt. Durch meine eigenen Arbeiten in dem gleichen und benachbarten Gebieten stellte es sich nun heraus, daß diese Übereinstimmung eine sehr genaue ist. In meinem Bericht über die geologischen Verhältnisse des Palaeozoikums im östlichen Ural

(Bulletin du Comité géologique St. Petersburg, Bd. XXXI, S. 333) habe ich bereits eine Übersicht der betr. Ablagerungen gegeben. Dort wurde gezeigt, daß die untere Abteilung des Oberdevon in der betr. Gegend aus 2 Zonen zusammengesetzt ist. Die untere Abteilung, die aus sandigen Kalksteinen besteht, führt zahlreiche Versteinerungen, hauptsächlich Brachiopoden, so *Spirifer Verneuili*, *Productella*, *Athyris* etc.; die obere Abteilung besteht aus festen, hell bis dunkelgrauem Kalkstein mit spärlicher Fauna. Ich habe auch bereits darauf hingewiesen, daß diese zweite Zone große Ähnlichkeit mit dem Hauptkalk des Ebersdorfer Oberdevon in Schlesien aufweist. Bei meinem späteren Besuche der Ebersdorfer Steinbrüche konnte ich mich überzeugen, daß der Hauptkalk wirklich ganz denselben Charakter hat wie die zweite Zone des unteren Oberdevon in dem von mir untersuchten Gebiete. Einmal ist in beiden Fällen ganz derselbe petrographische Charakter vorhanden und dann ist in beiden Gebieten die spärliche Fauna — sie ist im Ural etwas reicher als in Schlesien — ganz ähnlich. Am häufigsten findet sich in der betr. Zone des Südurals *Euomphalus crassitesta* Tietze, eine Form, die, soweit mir bekannt, bisher nur im Ebersdorfer Hauptkalk gefunden wurde, von wo sie TIETZE zuerst beschrieben hat. Außerdem haben die beiden Vorkommen folgende gemeinsame Arten: *Rhynchonella pugnus* Martin var., die TIETZE als *Rhynchonella pleurodon* beschrieben hat; *Productella subaculeata* Murchis., *Athyris concentricus* v. Buch, *Orthis striatula* Schloth. Im Ural fand ich noch *Spirifer Verneuilli*, der in Ebersdorf durch andere Spiriferen vertreten zu sein scheint. Dazu kommt noch eine Anzahl von Gastropoden, die im Ural indessen meist schlecht erhalten sind.

In Ebersdorf hat der Hauptkalk große Mächtigkeit. Er reicht von der Unterkante des Oberdevon bis zu den oberen Clymenienschichten hinauf. Im Ural dagegen ist er weniger mächtig und entspricht nur dem unteren Oberdevon. (Vgl. das Schema S. 209.) Die hangenden Clymenienschichten wurden, wie schon erwähnt, durch A. KARPINSKY als Enkeberger Schichten erklärt. Die weiteren Untersuchungen haben folgende Resultate gezeitigt:

Die größte Verbreitung haben im Ural die sog. Prolobitesschichten. Es sind meistens ziemlich feste Kalke von weißer oder dunkelroter Farbe. Sie haben nur eine geringe Mächtigkeit, führen aber eine reiche Fauna. Es seien u. a. folgende Arten genannt: *Prolobites delphinus* Sandb., *Sporadoceras Münsteri* v. Buch, *Tornoceras planidorsatum* Muenst., *Tornoceras dorsatum* Wdkd., *Clymenia involuta* Wdkd., *Clymenia cycloptera* Wdkd., *Clymenia Stuckenbergi*

Tok und *Clymenia* cf. *Pompeckji* Wdkd. Dieser Horizont wurde an vielen Stellen nachgewiesen und überall zeigte er einen sehr beständigen Charakter und enthielt große Mengen von *Sporadoceras Münsteri* v. Buch und *Prolobites delphinus* Sandb.

Unterhalb der Prolobitesschichten finden sich helle Kalke mit spärlicher Fauna, die aber große linsenförmige Einschlüsse enthalten. Diese linsenförmigen Einschlüsse sind durch eine reiche Fauna ausgezeichnet. Die Fauna besteht aus einer Anzahl kleiner Korallen, *Amplexus* sp., aus kleinen Gastropoden und Trilobiten, unter denen sich auch das neue Genus *Cyrtosymbole* Richter nachweisen ließ. Dazu kommen zahlreiche Cephalopodenreste. Zu bestimmen waren *Cheiloceras sacculus* Sandb., *Cheiloceras* n. sp., *Cheiloceras* aff. *subpartitum* Muenst., *Gomphoceras* sp., *Phragmoceras* sp. Es unterliegt keinem Zweifel, daß dieser Horizont den Nehdener Cheilocerasschichten entspricht, obwohl wir es im Ural augenscheinlich mit einer anderen Facies zu tun haben. Andeutungen für das Vorhandensein von Cheilocerasschichten im westlichen Ural hat auch schon TH. TSCHERNYSCHEW gemacht.

Über den Prolobitesschichten liegen Kalke, die sich petrographisch wenig von den ersteren unterscheiden, aber eine verschiedene Fauna enthalten. Unter den Cephalopoden sind folgende Arten enthalten: *Clymenia annulata* Muenst. var., *Clymenia dubia* Lev.-Lessing — diese Art ist mit *Clymenia undulata* Muenst. verwandt — und außerdem viele Fragmente, die der Gruppe der *Clymenia laevigata* Muenst. angehören.

Darüber folgen körnige, weiße oder graue Kalke, die abgesehen von einigen Brachiopoden-Bruchstücken gar keine Fauna aufweisen. Zuoberst liegt eine mächtige Schicht von Sandsteinen und Schiefer, die allmählich in unterkarbonische Ablagerungen übergehen. Höchst interessant sind zweifellos die mittleren Partien des uralischen Oberdevon, also diejenigen Partien, welche Cephalopoden enthalten, da sie fast genau mit den entsprechenden Stufen in Westfalen, wie dieselben durch die Arbeiten von DR. DENCKMANN und DR. WEDEKIND aufgestellt sind, übereinstimmen. Von der großen Ähnlichkeit dieser Ablagerungen konnte ich mich auch persönlich überzeugen, als ich unter der freundlichen Führung von DR. WEDEKIND das westfälische Oberdevon in der Umgegend von Balve kennen lernte.

Die Laevigata- und Annulatastufe (= Postprolobitesstufe Wedekind) sind im Ural vorläufig noch nicht als 2 einzelne Stufen zu erkennen, was aber durch weitere Forschungen nachweisbar sein könnte. Es wird auch wahrscheinlich möglich sein, Überein-

	Ostabhang des Südurals (Werchneuralsk):	**Westfalen** (Enkeberg, Balve):	**Schlesien** (Ebersdorf):
c_1	Sandsteine und Kalke.	Culm.	Schiefer und Kalksteine.
D_3^2	Sandsteine und Schiefer; körnige Kalke.	Gonioclymenienschichten.	Obere Clymenienschichten.
	Schichten mit *Clymenia laevigata* und *annulata*.	Laevigatastufe.	
		Annulatastufe (Postprolobitesstufe).	
	Prolobitesstufe.	Prolobitesstufe.	Hauptkalk mit *Euomphalus crassitesta*.
	Cheilocerasstufe.	Cheilocerasstufe.	
D_3^1	Graue Kalke mit *Euomphalus crassitesta*.	Manticocerasstufe.	
	Sandige Schiefer mit Brachiopoden.	Brachiopodenkalke.	

stimmung in einzelnen Zonen nachzuweisen. So wurde z. B. an einzelnen Stellen *Tornoceras (Pseudoclymenia) Sandbergeri* Guemb. gefunden. Ob wir es aber wirklich auch hier mit einer Zone der *Pseudoclymenia* zu tun haben, läßt sich vorläufig noch nicht mit der nötigen Sicherheit entscheiden.

St. Petersburg, Dezember 1912.

Über die Transplantation junger Beinknospen in die Augenhöhle bei Froschlarven.

Vorläufige Mitteilung einiger Ergebnisse.

Von

Bernhard Dürken, Göttingen.

Vorgelegt in der Sitzung am 8. Februar 1913 von E. Ehlers.

Angeregt durch die Ergebnisse früherer Untersuchungen vollführte ich im Frühjahr 1912 Transplantationen von jungen Beinknospen in die Augenhöhle bei Larven von Rana fusca. Jene Untersuchungen[1]) hatten gezeigt, daß die Extremitäten des Grasfrosches in engen Entwicklungskorrelationen stehen zum Centralnervensystem und daß durch Vermittelung des letzteren die einzelnen Extremitäten sowohl unter sich als auch mit dem Auge echt korrelative Entwickelungsabhängigkeiten aufweisen. Es lag daher nahe, den Entwickelungsmodus der Extremitäten auch an „isolierten" Beinanlagen zu prüfen. Eine solche „Isolation", die natürlich nur cum grano salis zu verstehen ist, läßt sich zur Zeit nur durch Transplantation junger Anlagen auf einen der normalen Entwicklung fremdartigen Ort bei demselben oder wenigstens bei einem artgleichen Individuum ausführen. Von einer vollkommenen Isolation ist dabei naturgemäß keine Rede. Auch reizte das Bestreben, über das Verhalten und die Entwicklung des Nerven-

1) B. Dürken, Über frühzeitige Extirpation von Extremitätenanlagen beim Frosch etc. Zeitschrift f. w. Zool. Bd. 99. 1911.

—, Über einseitige Augenexstirpation bei jungen Froschlarven. Vorl. Mitteil. Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl. 1912. Die ausführliche Abhandlung erscheint in Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 105. 1913.

systems Weiteres zu erfahren, zur Ausführung dieser Versuche, wie ja auch in den oben genannten Abhandlungen diesem Ziele nachgearbeitet wurde.

Transplantiert wurden die jungen Anlagen der Hinterbeine von Larven von 24 mm Länge in die rechte Augenhöhle von etwas jüngeren Larven, deren Länge ganz 22 mm, ohne Ruderschwanz 7 mm betrug.

Die transplantierten Beinanlagen bilden auf diesem Stadium kleine kegelförmige Knospen, die auf Schnitten in ihrem Innern gleichmäßiges dichtes Mesenchym aufweisen; die ersten Anlagen von Gefäßen sind im proximalen Abschnitt schon zu erkennen. In den Mesenchymzellen bemerkt man zahlreiche Kernteilungsfiguren. Die Länge der Anlage (nach der Anzahl der Querschnitte) beträgt 0,6 mm.

Die als Unterlage benutzten Tiere waren etwas jünger und dementsprechend kleiner als die Larven, denen die Beinanlagen entnommen wurden. Auch ihre Beinkuppen sind schon deutlich kegelformig, aber viel kleiner als das Transplantat; dementsprechend ist auch ihr ganzer Entwicklungszustand weniger weit vorgeschritten, wie bei äußerlicher Betrachtung namentlich der unvollkommenere Entwicklungsgrad des Auges zeigt.

Die Hinterbeinknospe wurde mit der Schere herausgeschnitten und dann in die Augenhöhle eines anderen Individuums übertragen; ein anderes Individuum wurde gewählt, um jeden Einfluß der Exstirpation der Beinanlage auf die Gesamtentwicklung und auch auf die Ausbildung des Nervensystems auszuschließen. Daß ein solcher auftreten kann, haben meine eingangs erwähnten Untersuchungen zur Genüge erwiesen.

Die Befestigung der kleinen Knospe in der weiten Augenhöhle nach Entfernung des Bulbus oculi ist mit einigen Schwierigkeiten verknüpft. Sie gelang dadurch, daß ich die Conjunktiva größtenteils stehen ließ, so daß sie die leere Augenhöhle überwölbte. Der Bulbus wird durch einen möglichst kleinen Schlitz in der Conjunktiva herausgenommen, wobei er mit einer feinen Schere vom Opticus und von den Muskeln abgetrennt wird. In die von der Conjunktiva überspannte Augenhöhle wird die Beinknospe so eingesetzt, daß ihre Spitze aus dem Loch in der Conjunktiva hervorragt. Auf diese Weise gerät Wundfläche auf Wundfläche.

Die Anheilung der Beinanlage gelang in einer größeren Anzahl von Fällen; der Entwicklungsgrad, den das Transplantat erreicht, ist ein ganz ungleicher.

Conserviert wurden im ganzen 20 Exemplare dieser Operationsserie, davon 2 als größere Larven, die anderen gegen Ende der Metamorphose. Von diesen 20 Tieren zeigen 8 an der rechten Kopfseite das mehr oder minder weit entwickelte Transplantat; bei den übrigen ist ein solches äußerlich nicht mit Sicherheit zu erkennen, auch die Untersuchung auf Schnitten gibt in solchen Fällen keine Spur des Transplantats. Das Fehlen eines solchen muß hauptsächlich wohl darauf zurückgeführt werden, daß die Beinknospe vor der Anheilung aus der Wunde herausgefallen ist. Es läßt sich aber auch der Gedanke nicht abweisen, daß dabei Resorptionsvorgänge im Spiele sind. Bei einer Larve nämlich, welche etwa 4 Wochen nach der Implantation der Beinknospe conserviert wurde, findet sich folgendes: An der Stelle des rechten Auges sieht man eine flache Delle, in deren Mitte eine mit unbewaffnetem Auge nicht sichtbare weißliche Hervorragung, deren ganze Oberfläche Pigmentzellen aufweist, wenn diese auch weniger zahlreich sein mögen als in der Umgebung. Es handelt sich hier, wie die Untersuchung an Schnitten zeigt, um das Transplantat, das durch Verschluß der Wunde der Conjunctiva ganz unter das Integument geraten ist. Das Merkwürdige daran ist nun, daß die implantierte Beinknospe nicht nur nicht gewachsen und nicht weiter differenziert ist, sondern sogar ihr eigenes Epithel verloren hat und dementsprechend nur aus einem Mesenchympfropf besteht, der unmittelbar unter der der Conjunctiva entsprechenden Hautstelle liegt und von dieser umschlossen wird, wie die normale Beinanlage von ihrem normalen Epithel. Hier haben offenbar Reduktionsvorgänge stattgefunden, die sich allerdings nur auf den ektodermalen Bestandteil der Knospe erstrecken. Das deutet aber vielleicht an, daß bei vollständiger Überwachsung des Transplantats eine Resorption desselben stattfindet. Dieses Verhalten bedarf noch näherer Untersuchung.

Das ältere Transplantat, das gut eingeheilt sich weiter differenziert hat, schwankt in der äußeren Form vom einfachen Zapfen bis zur winkelstellig gegliederten Extremität, deren Formbildung aber keineswegs eine dem normalen Zustande völlig entsprechende ist. Ich gebe hier die Beschreibung einiger typischer Fälle, die bei der Conservierung aufgenommen ist.

Zunächst ein Tier mit wenig entwickeltem Transplantat. Alle Beine sind normal und kräftig ausgebildet, der Schwanz ist schon bedeutend reduziert. Der Mundrand hat keine Papillen mehr, das Tier steht unmittelbar vor dem Verlassen des Wassers. Die transplantierte Beinanlage ist gewachsen; sie erscheint als ein

dicker kurzer runder Zapfen mit stumpfem Ende von etwa $^1/_2$—$^2/_3$ mm Länge, senkrecht abstehend. Andeutung einer Gliederung ist durch eine knollige Anschwellung an der Basis gegeben; Pigment ist fast ebenso reichlich vorhanden wie in der übrigen Haut.

Als zweiter Fall sei der Befund an einem Exemplar gegegeben, das ein weiter entwickeltes Transplantat aufweist. Bei der Conservierung sind beide Vorderbeine frei, alle Extremitäten normal, die Mundwinkel haben noch einen sehr kleinen Papillenrest. Das Transplantat besteht aus drei winkelig gegen einander abgesetzten Gliedern, welche die drei Abschnitte des Hinterbeines darstellen, runde, plumpe Bildungen, die in spitzem Winkel zu einander stehen. Der Fuß endet stumpf ohne Zehen. Pigment ist ziemlich viel an der Hinterseite und auf der oberen Fläche vorhanden, Vorderseite pigmentlos. Aktive Bewegungen des Gebildes fanden nicht statt.

Ein noch weiter differenziertes Transplantat zeigt folgender Fall; der allgemeine Entwicklungszustand des Tieres bei der Conservierung gleicht dem des vorstehenden Falles. Das Transplantat läßt alle Abschnitte einer Hinterextremität erkennen. Der Oberschenkel liegt ganz in der Augenhöhle; er beginnt am vorderen Augenwinkel und erstreckt sich über den hinteren hinaus unter die Kopfhaut. In der eigentlichen Augenhöhle bildet er eine an ihrer ganzen Längenausdehnung am Kopf festgewachsene rundliche Leiste ohne Pigment; an der festgewachsenen Kante scheint er pigmentiert zu sein, doch kann es sich hier auch um die über ihn etwas vorgewachsene Kopfhaut handeln. Der Unterschenkel setzt in sehr spitzem Winkel unter der Kopfhaut an den Oberschenkel an, er ist nach der Schnauze zu gerichtet; nur sein distales Drittel ist frei, im übrigen ist er der Länge nach mit dem Oberschenkel verwachsen. An der Außenseite des Winkels Ober-Unterschenkel findet sich auf letzterem Pigment, sonst ist dieser Abschnitt farblos, weiß. Der Fuß ist wieder nach hinten gerichtet, in spitzem Winkel zum Unterschenkel, und mit diesem zum größeren Teil der Länge nach verwachsen, nur die vier deutlichen Zehen sind frei. Diese sind pigmentiert, sonst ist der Fuß pigmentlos. Die Zehen sind nur durch seichte Furchen von einander getrennt. Das Transplantat wurde nicht aktiv bewegt; es war im Leben durchscheinend, im Unterschenkel schimmerte die Knorpelachse durch.

Die mikroskopische Untersuchung dieser drei Fälle ergab in großen Zügen folgendes:

Der rechte Nervus opticus fehlt. Er wird bei der Operation nicht entfernt, sondern bleibt in größter Ausdehnung erhalten. Für sein Fehlen ist also secundäre Atrophie in erster Linie verantwortlich zu machen. Am Gehirn finden sich die in der eingangs an zweiter Stelle namhaft gemachten Arbeit näher beschriebenen Spuren der Augenexstirpation. In der Beschaffenheit des Transplantats macht sich, abgesehen von der äußeren Form, ein wichtiger Unterschied bei den drei Tieren bemerkbar; das oben geschilderte zapfenförmige Transplantat enthält nämlich keine Muskeln.

Es ragt nur zum kleineren Teil über die Oberfläche hervor. Seine Achse wird gebildet von einem mehrfach gegliederten Knorpelstab, dessen proximales Ende bis an die knorpelige Schädelseitenwand heranreicht, ohne sie jedoch unmittelbar zu berühren. Außerdem findet sich nur normales lockeres Bindegewebe mit Gefäßen, aber keine Spur von Muskelfasern.

Die rechtsseitigen Augenmuskeln sind vorhanden. Der breite M. levator bulbi umgreift von unten das Transplantat in einer einigermaßen ähnlichen Weise, wie er normal den Bulbus oculi umfaßt.

In den beiden anderen Transplantaten finden sich außer einem gegliederten Knorpelskelett und Bindegewebe auch reichliche Muskeln, die dem transplantierten Bein selbst angehören. Die Nervenversorgung dieser Muskeln ließ sich noch nicht mit Sicherheit feststellen; ich lasse daher diese Frage noch offen. In unmittelbarster Nähe ziehen aber die Nerven der Orbitotemporalregion vorbei. Im distalen Gebiete der Transplantate vermochte ich in diesen Fällen keine Nerven nachzuweisen.

Fehlt ein Transplantat, so ist besonders interessant das Verhalten der Conjunctiva, die bei der Operation in größerem Umfange geschont wird. Sie macht nicht die normale Entwicklung durch, sondern bleibt trübe und enthält reichlich Pigment, wenn auch etwas weniger als die umliegende Körperhaut, auch bleibt sie etwas dichter als am normalen Auge.

Zu einem abschließenden Urteil sind die vorliegenden Ergebnisse noch nicht geeignet, doch zeigt gerade das ungleiche Verhalten des Transplantats, daß für eine Wiederholung und geeignete Variation der Versuche sich lohnende Aussichten eröffnen.

Ueber elektrische und magnetische Doppelbrechung.

IV.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. März 1913.

In meiner III. Notiz[1]) über den in der Ueberschrift genannten Gegenstand habe ich die optischen Erscheinungen untersucht, die bei Einwirkung eines Magnetfeldes auf ein Medium eintreten, das äolotrope Moleküle enthält, und dessen Elektronen gleichzeitig der direkten Wirkung des Feldes unterliegen. Die äolotrope Natur der Moleküle gibt im allgemeinen zu drei Eigenschwingungen für jedes Elektron Veranlassung, die ihrerseits im Spektrum einer durch das Medium hindurchgehenden Strahlung Tripel von Absorptionsstreifen liefern müssen. Bei der Diskussion der Formeln für die Einwirkung des Magnetfeldes habe ich mich dabei aus bestimmten Gründen auf den Fall beschränkt, „daß die Streifen ursprünglich durch absorptionsfreie Bereiche getrennt waren, und man nur Feldstärken betrachtet, bei denen jeder Streifen seiner Urlage näher bleibt als derjenigen eines anderen Streifens.“

In neuester Zeit hat nun Herr Sommerfeld[2]) eine Arbeit über die Emission eines Systemes von äolotrop gebundenen Elektronen im Magnetfelde veröffentlicht, welche außer dem von mir diskutierten (Grenz-)Fall, noch den zweiten Grenzfall untersucht, daß die Streifen durch das Feld um Beträge verschoben werden, die groß sind gegen die ursprünglichen Abstände der

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1912, p. 861.

2) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **40**, p. 748, 1913.

Streifen. Man kann die beiden extremen Fälle etwa charakterisieren 1) als den weiter Lagerung der ursprünglichen Streifen und Einwirkung relativ schwacher Felder und 2) als den enger Lagerung und relativ starker Magnetfelder.

Herr Sommerfeld sieht in einem System von der geschilderten Art ein Modell, welches das Verhalten gewisser Serienduplets und -triplets verständlich machen soll, die in starken Feldern normale Triplets liefern. Ich will hier nicht wiederholen, (was ich an andrer Stelle ausgeführt habe) warum ich eine solche Deutung nicht akzeptieren kann. Immerhin ist der zweite Grenzfall an sich von Interesse, und ich möchte meine Formeln um so mehr auch auf ihn anwenden, weil ich, wie schon öfter bemerkt, ganz allgemein die Berechnung des Absorptionsvorganges für fördernder halte, als diejenige des Emissionsvorganges; die letztere läßt von vorn herein gewisse Umstände außer Betracht, die auf die Erscheinungen Einfluß zu üben vermögen, und führt demgemäß leicht zu unrichtigen Resultaten.

In meiner letzten Notiz ist in Rechnung gezogen, daß, wenn auch vor Einwirkung des Magnetfeldes die Moleküle alle möglichen Orientierungen in gleicher Weise annehmen, durch das Magnetfeld eine Tendenz zur Parallelrichtung eintritt, mit der die Wärmebewegung der Moleküle sich ins Gleichgewicht setzt. Diese partielle Orientierung hat auf die Veränderung der Absorptionsstreifen durch das Feld nur sehr geringen Einfluß und mag daher bei der folgenden Diskussion eben jener Veränderung ignoriert werden.

Nehmen wir nur eine Art von Molekülen als vorhanden an, und sehen wir ab von deren Orientierung durch das Magnetfeld, so gelten nach meiner früheren Arbeit für die Funktionen

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{n}^2 - 1}{\mathfrak{n}^2 + 2} \tag{1}$$

(unter $\mathfrak{n}$ den komplexen Brechungsindex verstanden) die nachstehenden Beziehungen.

Parallel den Kraftlinien pflanzen sich zwei zirkular polarisierte Wellen fort mit Brechungsindizes, gegeben durch

$$\mathfrak{m}_\pm = \tfrac{1}{3} Ne^2 \int \frac{\frac{1}{2}(p_2 p_3 (1-\alpha^2) + \cdots) \mp R(p_1 \alpha^2 + \cdots)}{p_1 p_2 p_3 - R^2 (p_1 \alpha^2 + \cdots)} \, d\omega. \tag{2}$$

Die Punkte bezeichnen hier und weiterhin die zwei Glieder, die sich aus dem hingesetzten durch zyklische Vertauschung der α, β, γ und der Indizes 1, 2, 3 ergeben.

Normal zu den Kraftlinien schreitet eine parallel zu den Kraftlinien polarisierte Welle fort mit einem Brechungsindex, der sich aus $\mathfrak{m}_{\pm}$ leicht berechnet[1]); außerdem eine normal zu den Kraftlinien polarisierte, also ihnen parallel schwingende Welle, für welche gilt

$$(3) \qquad \mathfrak{m}_p = \tfrac{1}{3} Ne^2 \int \frac{(p_2 p_3 \alpha^2 + \cdots) - R^2}{p_1 p_2 p_3 - R^2 (p_1 \alpha^2 + \cdots)} \, d\omega.$$

Hierin ist N die Anzahl der betrachteten äolotropen Moleküle in der Volumeneinheit, e die Elektronenladung. p_1, p_2, p_3 sind die Konstituenten eines komplexen Tensortripels, das mit den Molekülen fest verbunden ist, α, β, γ ihre Richtungskosinus gegen die Kraftlinien. Es gilt

$$(4) \qquad p_j = k_j + i\nu h_j - m\nu^2, \qquad j = 1, 2, 3,$$

und sind hierin die k_j die Parameter der quasielastischen, h_j diejenigen der dämpfenden Kraft, die auf das Elektron wirken. m ist die träge Masse, ν die Frequenz des Elektrons. Ferner ist

$$R = -e\nu H/c,$$

unter H die wirkende magnetische Feldstärke verstanden. Das Integral ist zu nehmen über alle Elemente der Kugelfläche um das Molekül, in deren jedes die Richtung des Feldes fallen kann.

Um den von Herrn Sommerfeld verfolgten Fall zu erhalten sei gesetzt

$$(5) \qquad p_j = p + \pi_j, \qquad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0,$$

wobei

$$p = k + ih\nu - m\nu^2, \qquad k = \tfrac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3), \qquad h = \tfrac{1}{3}(h_1 + h_2 + h_3),$$

und es werden solche Feldstärken betrachtet, daß R groß ist gegen jedes der π_j, und zugleich solche Frequenzen, daß p sich ebenso verhält, wie R.

Beschränkt man sich dann auf die Glieder erster Ordnung in bezug auf die π_j, so ergibt eine einfache Umformung aus (2)

$$(6) \qquad \mathfrak{m}_{\pm} = \tfrac{1}{3} Ne^2 \int \frac{d\omega}{p \pm R - \frac{1}{2}(\pi_1 \alpha^2 + \pi_2 \beta^2 + \pi_3 \gamma^2)}.$$

Bezüglich der durch (3) gegebenen Funktion $\mathfrak{m}_p$ kommen für uns auch sehr kleine Werte p in Betracht; es ist also die An-

1) W. Voigt, l. c. p. 875.

näherung anders zu bilden, als vorstehend. Man erhält zunächst bei Erweiterung mit $p + (\pi_1 \alpha^2 + \pi_2 \beta^2 + \pi_3 \gamma^2)$

$$\mathfrak{m}_p = \tfrac{1}{3} N e^2$$

$$\int \frac{\begin{array}{c} p^3 + p\,(\pi_2 \pi_3 \alpha^2 + \cdots - (\pi_1 \alpha^2 + \cdots)^2) \\ + (\pi_1 \alpha^2 + \cdots)(\pi_2 \pi_3 \alpha^2 + \cdots) - R^2 (p + \pi_1 \alpha^2 + \cdots) \end{array}}{p^3 + p\,(\pi_2 \pi_3 + \cdots) + \pi_1 \pi_2 \pi_3 - R^2 (p + \pi_1 \alpha^2 + \cdots)} \cdot \frac{d\omega}{p + \pi_1 \alpha^2 + \cdots},$$

und hier erkennt man, daß selbst für verschwindendes p der erste Quotient unter dem Integral bei Vernachlässigung von π_j^2 neben R^2 mit Eins vertauscht werden kann.

Wir erhalten somit

$$\mathfrak{m}_p = \tfrac{1}{3} N e^2 \int \frac{d\omega}{p + \pi_1 \alpha^2 + \pi_2 \beta^2 + \pi_3 \gamma^2}. \tag{7}$$

Die Formel (6) und (7) sind nun zu diskutieren. Die Integrale darin haben die Form des Newtonschen Potentiales eines homogenen Ellipsoides auf dessen Zentrum, ein solches ist nämlich gegeben durch

$$\varphi = \int\int \frac{r^2\, dr\, d\omega}{r} = \tfrac{1}{2} \int \bar{r}^2\, d\omega,$$

wobei

$$\frac{1}{\bar{r}^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Aber die Ueberführung in die Normalform elliptischer Integrale bietet keinen Vorteil. Die Diskussion wird vielmehr auch hier, wie früher, direkt an die vorliegende Form angeknüpft, indem jedes Element des Integrales als die Wirkung eines elementaren Absorptionsstreifens gedeutet wird. Für jeden dieser Streifen bestimmt das Nullwerden des reellen Teiles des Nenners die Eigenfrequenz (resp. den Ort im Spektrum) für die Mitte des bez. Streifens; der imaginäre Teil mißt zugleich die Halbwertsbreite und die reziproke maximale Stärke.

Betrachten wir hiernach zunächst den Nenner des Ausdruckes (7) für $\mathfrak{m}_p$ und setzen darin, da wir annehmen, daß die Eigenfrequenzen ν_j des Elektrons, gegeben durch

$$\nu_j^2 = k_j/m, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{8}$$

einander nahe liegen:

$$\nu_j = \nu_0 + \mu_j, \qquad \nu = \nu_0 + \mu, \qquad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0, \tag{9}$$

außerdem auch

$$h_j/m = \nu_j'$$

so nimmt derselbe bei Beseitigung des irrelevanten Faktors $2m\nu_0$ die Form an

$$(10) \qquad (\mu_1 \alpha^2 + \mu_2 \beta^2 + \mu_3 \gamma^2 - \mu) + \tfrac{1}{2} i (\nu'_1 \alpha^2 + \nu'_2 \beta^2 + \nu'_3 \gamma^2).$$

Die den einzelnen $d\omega$, resp. den zugehörigen Werten α, β, γ, entsprechenden Eigenfrequenzen sind also gegeben durch

$$(11) \qquad \mu = \mu_1 \alpha^2 + \mu_2 \beta^2 + \mu_3 \gamma^2.$$

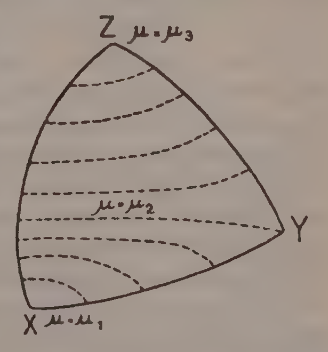
Ist die Bezeichnung so gewählt, daß $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$ (d. h. $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3$), so liegen die elementaren Absorptionsstreifen in dem Intervall

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3,$$

wobei μ_1 notwendig < 0 ist.

Indessen ist zu beachten, daß sie sich in diesem Intervall keineswegs mit gleicher Dichte verteilen.

Konstruiert man nämlich in einem Oktanten der Einheitskugel die Kurven $\mu =$ konst., so erhält man ein System wie es die nebenstehende Figur wiedergibt. Während also die Werte $\mu = \mu_1$ und $= \mu_3$ nur für die X- und Z-Axe eintreten, gilt der Wert $\mu = \mu_2$ längs einer Kurve durch die Y-Axe.



Hieraus erhellt, daß unvergleichlich mehr Flächenelemente $d\omega$ Werte μ in der Nähe von μ_2 liefern, als in der Nähe von μ_1 und von μ_3. Wenn also die drei Parameter ν'_1, ν'_2, ν'_3 von gleicher Größenordnung sind, werden wir schließen müssen, daß der Absorptionsstreifen in der p-Welle sich über das ganze Intervall $\mu_1 < \mu < \mu_3$ erstreckt, doch so, daß die stärkste Absorption in der Nähe der Frequenz $\mu = \mu_2$ liegt.

Den Nenner des Integrales (6) schreiben wir zunächst

$$(\tfrac{1}{2}(p_2 + p_3) \pm R)\,\alpha^2 + (\tfrac{1}{2}(p_3 + p_1) \pm R)\,\beta^2 + (\tfrac{1}{2}(p_1 + p_2) \pm R)\,\gamma^2,$$

also nach (8) bei

$$\mu \pm \frac{R}{2m\nu_0} = \mu',$$

und bei Fortlassung des Faktors $2m\nu_0$

$$(\tfrac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3)\,\alpha^2 + \cdots - \mu') + \tfrac{1}{4} i\,((\nu'_2 + \nu'_3)\,\alpha^2 + \cdots);$$

wegen $\mu^1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ ist dies auch gleich

$$-\left(\tfrac{1}{2}(\mu_1 \alpha^2 + \mu_2 \beta^2 + \mu_3 \gamma^2) + \mu'\right) + \tfrac{1}{4} i \left((\nu_2' + \nu_3')\alpha^2 + (\nu_3' + \nu_1')\beta^2 + (\nu_1' + \nu_2')\gamma^2\right).$$

Dieser Ausdruck hat ganz die Form von (10) und gestattet die analoge Diskussion.

Die den einzelnen $d\omega$, resp. den ihnen zugehörigen Werten α, β, γ entsprechenden Eigenfrequenzen sind darnach gegeben durch

$$(12) \qquad \mu' = -\tfrac{1}{2}(\mu_1 \alpha^2 + \mu_2 \beta^2 + \mu_3 \gamma^2).$$

Es erfüllen somit die elementaren Absorptionsstreifen das ganze Intervall

$$-\tfrac{1}{2}\mu_3 < \mu' < -\tfrac{1}{2}\mu_1, \qquad \text{wobei } \mu_1 < 0,$$

doch so, daß sie sich in der Gegend von $\mu' = -\frac{1}{2}\mu_2$ am dichtesten drängen; sind also wieder die ν_1', ν_2', ν_3' von gleicher Größenordnung, so wird das Maximum der Absorption bei $\mu' = -\frac{1}{2}\mu_2$, d. h. also

$$(13) \qquad \text{bei} \quad \mu = \pm \frac{R}{2m\nu_0} - \tfrac{1}{2}\mu_2$$

liegen. Da nun nach der Annahme das zweite Glied rechts klein gegen das erste ist, das erste aber die normale Verschiebung eines Absorptionsstreifens darstellt, überdies die p-Schwingung das Absorptionsmaximum bei $\mu = \mu_2$, also merklich in der Mitte zwischen den durch (13) gegebenen Orten aufweist, so ist die bei starken Feldern eintretende Erscheinung in der Tat einem normalen Triplet aus diffusen Linien gleichartig.

Dies ist dasselbe Resultat, das Herr Sommerfeld für den Emissionsvorgang abgeleitet hat.

Eine genaue Diskussion des Intensitätsverlaufes in jedem der durch (6) und (7) dargestellten Absorptionsstreifen ist umständlich und überflüssig, da Zeeman-Triplets mit derartig verbreiteten Komponenten bislang noch nirgends beobachtet sind.

Göttingen, im März 1913.

Molekularströmung und Temperatursprung.

Ein Beitrag zur kinetischen Theorie verdünnter Gase.

Von

H. Bolza, M. Born und Th. v. Kármán.

Vorgelegt in der Sitzung vom 22. Februar 1913.

Einleitung.

Die gewöhnliche kinetische Theorie der Gase berücksichtigt nur die Vorgänge im Innern ausgedehnter Gasräume. Daß die Erscheinungen vollkommen andere sind, sobald die Abmessungen der Gasräume kommensurabel oder gar klein gegen die mittlere freie Weglänge sind, ist seit den schönen Untersuchungen von Knudsen bekannt und in den Vordergrund des Interesses gerückt. Die theoretischen Untersuchungen dieser Erscheinungen gelingen nur unter Annahme spezieller Art über die Wechselwirkung zwischen den Gasmolekülen und den Wänden; so behandelt Herr Knudsen die Strömung eines verdünnten Gases durch eine Kapillare unter Voraussetzung diffuser Reflexion an den Wänden. Bei der einfachsten Theorie der Radiometerwirkungen wird angenommen, daß die Moleküle die Wand mit der der Temperatur der Wand entsprechenden Geschwindigkeit verlassen ohne Rücksicht auf ihre Geschwindigkeit vor dem Anprall. Ähnliche Annahmen macht man zur Erklärung des Temperatursprunges, der beim Übergang von Wärme aus einem verdünnten Gas in einen festen Körper auftritt.

Um die exakten Methoden der kinetischen Gastheorie auf diese Vorgänge anwenden zu können, greifen wir zunächst einen Fall heraus, der sich mathematisch leicht formulieren läßt und in dem das physikalisch Wichtige wiedergegeben wird, ohne daß wir besondere über die gewöhnlichen Stoßgesetze hinausgehende Annahmen machen müssen.

Dies ist die Strömung eines Gases in einem porösen Medium. Das Problem ist wesentlich identisch mit dem der Elektronenbewegung in Metallen und kann etwa mit der von H. A. Lorentz angegebenen Methode behandelt werden. Mit Hilfe dieser Analogie erhält man aus den Lorentzschen Formeln für den Elektronenstrom und den Wärmestrom unmittelbar die entsprechenden Beziehungen zwischen Gasstrom und Wärmestrom einerseits und Druck und Temperaturgefälle andrerseits. Überträgt man die so gewonnenen Resultate auf die Strömung in Kapillaren und auf den Wärmeübergang zwischen Platten im hohen Vakuum, so erhält man (bis auf Zahlenfaktoren) die einfachen Knudsenschen Formeln für die reine Molekularströmung und molekulare Wärmeleitung. Die Gesetze der Molekularströmung und der molekularen Wärmeleitung einerseits, der gewöhnlichen Gasdynamik und Wärmeleitung andrerseits erscheinen somit als zwei Grenzfälle einer allgemeinen Theorie, die in den folgenden Zeilen skizziert werden soll; dieselbe bietet auch die Möglichkeit weiterer Annäherungen von den beiden extremen Fällen aus. Am Schluß wollen wir zeigen, daß sich auch der Temperatursprung unserer Auffassung einordnen läßt, wenn man die feste Wand als poröses Material betrachtet, in dessen Hohlräume das Gas ein wenig eindringt (Adsorptionshypothese).

§ 1.
Strömung eines Gases durch ein festes Gitter.

Wir wollen die allgemeine Aufgabe folgendermaßen formulieren: Ein poröses Medium stellen wir uns vor unter dem Bilde eines Haufens ruhender, fester Körperchen, welche für die Rechnung kugelförmig angenommen werden. Die Gasmoleküle, welche sich in den Zwischenräumen bewegen, stoßen untereinander und mit den festen Kugeln zusammen. Es sei die Anzahl der festen Kugeln in der Volumeneinheit N^*, ihr Durchmesser σ^*; die entsprechenden Größen für die Gasmoleküle seien N und σ. Die Geschwindigkeit eines Gasmoleküls habe die Komponenten ξ, η, ζ. Es sei das Raumelement

$$dx\,dy\,dz = do,$$

das Geschwindigkeitselement

$$d\xi\,d\eta\,d\zeta = d\omega.$$

Die Anzahl der Gasmoleküle, deren Raumkoordinaten zwischen

$$\begin{gathered} x \text{ und } x + dx, \\ y \text{ und } y + dy, \\ z \text{ und } z + dz \end{gathered}$$

und deren Geschwindigkeitskomponenten zwischen

$$\xi \text{ und } \xi + d\xi,$$
$$\eta \text{ und } \eta + d\eta,$$
$$\zeta \text{ und } \zeta + d\zeta$$

liegen, sei:

$$F(\xi, \eta, \zeta, x, y, z)\, d\omega\, do.$$

Wir betrachten nur den stationären Zustand. Nach der Methode von Maxwell und Boltzmann zählt man ab, wieviele Moleküle durch Zusammenstoß in der Zeiteinheit in einen bestimmten Geschwindigkeitsbereich eintreten und wieviele aus diesem Bereich austreten. Es kommen dabei in Betracht die Zusammenstöße zwischen den Gasmolekülen untereinander und die Zusammenstöße mit den festen Kugeln. Stoßen zwei Gasmoleküle mit den Geschwindigkeiten ξ, η, ζ und ξ_1, η_1, ζ_1 so zusammen, daß die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte im Augenblicke des Zusammenstoßes die Richtungskosinusse l, m, n hat, so sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Zusammenstoß

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi + lW, \\ \eta' &= \eta + mW, \\ \zeta' &= \zeta + nW \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} \xi_1' &= \xi_1 - lW, \\ \eta_1' &= \eta_1 - mW, \\ \zeta_1' &= \zeta_1 - nW, \end{aligned}\right\}$$

wobei W den absoluten Betrag der Geschwindigkeit bedeutet, also

$$W = l(\xi_1 - \xi) + m(\eta_1 - \eta) + n(\zeta_1 - \zeta).$$

Dann ist nach Boltzmann der Überschuß derjenigen Gasmoleküle, die in den Geschwindigkeitsbereich $d\omega$ eintreten, über diejenigen, welche austreten,

$$1) \qquad \frac{\sigma^2}{2}\iint |W| \left\{ F'F_1' - FF_1 \right\} d\omega_1\, dk,$$

wobei die Akzente und Indizes bei F andeuten, daß man die entsprechenden oben definierten Argumente in die Verteilungsfunktion einzusetzen hat, und dk das Element der Einheitskugel bedeutet. Die Geschwindigkeitskomponenten eines Gasmoleküles nach dem Zusammenstoß mit einer festen Kugel sind:

$$\bar{\xi} = \xi - lV,$$
$$\bar{\eta} = \eta - mV,$$
$$\bar{\zeta} = \zeta - nV,$$

wobei

$$V = l\xi + m\eta + n\zeta$$

gesetzt ist. Alsdann findet man in analoger Weise für den Zuwachs in demselben Geschwindigkeitsbereich $d\omega$ in Folge der Zusammenstöße mit den festen Kugeln:

$$\tfrac{1}{2} N^* . \left(\frac{\sigma^* + \sigma}{2}\right)^2 \int |V| \{\bar{F} - F\} dk.$$

Durch eine einfache Transformation läßt sich dieser Ausdruck in den folgenden umformen:

$$2) \qquad N^* \left(\frac{\sigma^* + \sigma}{2}\right)^2 \pi r \left\{\frac{1}{4\pi} \int F(r\lambda,\ r\mu,\ r\nu)\, dk - F\right\},$$

wobei $r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ gesetzt ist und λ, μ, ν die Koordinaten eines Punktes der Einheitskugel, dk das zugehörige Flächenelement bedeuten. Die Summe der Ausdrücke 1) und 2) gibt bei fehlenden äußeren Kräften die Gesamtänderung der Anzahl der in dem betreffenden Geschwindigkeitsbereich $d\omega$ enthaltenen Moleküle. Im stationären Zustande muß dieser Zuwachs gleich der Anzahl der aus dem Volumenelement ein- und ausströmenden und mit der Geschwindigkeit ξ, η, ζ behafteten Moleküle sein. So erhält man die Bedingung

$$\frac{\sigma^2}{2} \int\int |W| \{F' F_1' - F F_1\} d\omega_1 dk +$$

$$3) \qquad + N^* . \left(\frac{\sigma^* + \sigma}{2}\right)^2 . \pi r \left\{\frac{1}{4\pi} \int F(r\lambda,\ r\mu,\ r\nu)\, dk - F\right\} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta.$$

Es ist dies eine nicht lineare Integralgleichung für F; zur Lösung dieser auch in der Elektronentheorie der Metalle maßgebenden Integralgleichung hat Lorentz allgemein ein Verfahren sukzessiver Approximation angegeben, wobei er die Annahme machte, daß die erste Näherung durch die Maxwellsche Verteilung gegeben sei. Hilbert hat für die analoge Gleichung der kinetischen Gastheorie ein strenges Verfahren ausgebildet, indem er die Lösung in der Form einer Reihe

$$4) \qquad F = \frac{\mathsf{A}}{\varkappa} + \mathsf{B} + \Gamma\varkappa + \cdots$$

darstellte, wobei $\varkappa$ eine charakteristische Länge des Systemes von der Größenordnung der sog. mittleren freien Weglänge ist[1]). Wir

1) Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.

werden uns dem Hilbertschen Verfahren anschließen; welche Größe aber als Entwicklungsparameter zu wählen ist, hängt von den physikalischen Umständen ab. Die obige Gleichung zur Bestimmung der Verteilungsfunktion umfaßt als Grenzfälle sowohl die gewöhnliche Gastheorie als auch die reine Molekularströmung Knudsens. Im ersten Falle kommt nur das erste Integral, im zweiten nur das zweite in Betracht. Auf den hinreichend bekannten Grenzfall der gewöhnlichen Gastheorie brauchen wir hier nicht einzugehen, vielmehr betrachten wir unmittelbar den entgegengesetzten Grenzfall, daß die Stöße der Gasmoleküle mit den festen Kugeln ungleich häufiger sind als ihre Stöße untereinander.

§ 2.

Die reine Molekularströmung.

Im Falle der reinen Molekularströmung ist das zweite (lineare) Integral maßgebend, das erste (quadratische) nur eine Korrektion. Als Entwicklungsparameter wählen wir die Größe

$$\varkappa = \frac{1}{\pi \cdot N^* \cdot \left(\frac{\sigma^* + \sigma}{2}\right)^2},$$

deren Nenner gleich derjenigen Fläche ist, welche die Gesamtheit der in der Volumeneinheit befindlichen festen Kugeln einem bewegten Moleküle entgegenstellt. $\varkappa$ ist also von der Größenordnung des mittleren Weges, den das Gasmolekül, ohne an eine feste Kugel anzustoßen, zurücklegen kann. Indem wir nun die Reihenentwicklung 4) in die Integralgleichung 3) einführen und die Glieder der rechten und linken Seite von gleicher Ordnung in $\varkappa$ gleich setzen, ergibt sich eine Reihe von linearen Integralgleichungen, für die Funktionen A, B, $\Gamma \ldots$, welche sukzessive gelöst werden sollen.

Die erste dieser Gleichungen ist identisch mit der Integralgleichung 3), wenn in dieser die rechte Seite $= 0$ gesetzt wird und hat die allgemeine Lösung:

$$\mathsf{A} = Ae^{-B(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)},$$

d. h. in allererster Näherung ergibt sich die Geschwindigkeitsverteilung nach Maxwell für ein ruhendes Gas. Die Konstanten A und B sind durch die Anzahl der Moleküle

$$N = \int F d\omega$$

und durch das mittlere Geschwindigkeitsquadrat

$$h = \frac{1}{N}\int F(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\,d\omega$$

bestimmt. Es wird dann die Verteilungsfunktion in erster Näherung:

$$F_0 = \left(\frac{3}{2\pi h}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot N \cdot e^{-\frac{3}{2h}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)},$$

wobei h und N Funktionen von x, y, z sind. Die Integralgleichung für die zweite Näherung lautet:

$$\begin{aligned}
5)\qquad & \frac{\sigma^2}{2}\int\int |W| \{ \mathsf{A}'\mathsf{B}_1' + \mathsf{A}_1'\mathsf{B}' - \mathsf{A}\mathsf{B}_1 - \mathsf{A}_1\mathsf{B} \} d\omega_1\,dk \\
& + r\left\{\frac{1}{4\pi}\int \mathsf{B}\,dk - \mathsf{B}\right\} = \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial x}\xi + \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial y}\eta + \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial z}\zeta \\
& = \mathsf{A}\,\frac{3}{2h}\left\{-\xi\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{h}{N}\frac{\partial N}{\partial x}\right)\right. \\
& -\eta\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{h}{N}\frac{\partial N}{\partial y}\right) - \zeta\left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{2}{3}\frac{h}{N}\frac{\partial N}{\partial z}\right) \\
& \left. + \xi r\,\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x} + \eta r^2\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y} + \zeta r^2\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial z}\right\}.
\end{aligned}$$

Die Bedingungen der Auflösbarkeit, die Hilbert in der kinetischen Gastheorie aufgedeckt hat, und die dort die hydrodynamischen Gleichungen liefern, sind hier identisch erfüllt, da die sichtbaren Geschwindigkeiten des Gases in erster Näherung verschwinden. Die allgemeine Lösung der Gleichungen 5) erhält man durch den Ansatz:

$$\begin{aligned}
6)\qquad \mathsf{B} = & \frac{3}{2h}\mathsf{A}\left\{\varphi_1\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{h}{N}\frac{\partial N}{\partial x}\right) + \varphi_2\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{h}{N}\frac{\partial N}{\partial y}\right)\right. \\
& \left. + \varphi_3\left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{2}{3}\frac{h}{N}\frac{\partial N}{\partial z}\right) + \varphi_4\cdot\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x} + \varphi_5\cdot\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y} + \varphi_6\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial z}\right\} + C_1\mathsf{A} + C_2\mathsf{A}r^2.
\end{aligned}$$

Die φ_i $(i = 1, 2, \ldots 6)$ sind Funktionen von ξ, η, ζ allein und genügen den sechs numerischen Integralgleichungen

$$7)\qquad \frac{\sigma^2}{2}\int\int |W|\,\mathsf{A}_1\{\varphi_1' + \varphi' - \varphi_1 - \varphi\}\,d\omega_1\,dk + r\left\{\frac{1}{4\pi}\int \varphi\,dk - \varphi\right\} = f,$$

wobei für f der Reihe nach die sechs Funktionen ξ, η, ζ, ξr^2, ηr^2, ζr^2 einzusetzen sind. Die beiden letzten Glieder der rechten Seite von 6) bilden die allgemeine Lösung des homogenen Teiles der Gl. 5).

In der Elektronentheorie, wie sie von Lorentz ausgeführt wurde, wird zunächst der Zusammenstoß der Elektronen untereinander vernachlässigt. Offenbar entspricht diesem Grenzfall in unserer Problemstellung die vollständige Vernachlässigung der Zusammenstöße der Gasmoleküle untereinander. Wird also das Doppelintegral in 7) vernachlässigt, so erhält man für die φ_i:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\xi}{r} \\ \varphi_2 &= -\frac{\eta}{r} \\ \varphi_3 &= -\frac{\zeta}{r} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \varphi_4 &= -\xi r \\ \varphi_5 &= -\eta r \\ \varphi_6 &= -\zeta r \end{aligned}\right\}.$$

Setzt man diese in (6) ein, so wird die Verteilungsfunktion in zweiter Näherung

$$\text{8)} \qquad F_1 = \frac{\mathsf{A}}{\varkappa} + \mathsf{B}.$$

Alsdann ist die mittlere Stromgeschwindigkeit gegeben durch die Formel

$$\text{9)} \qquad u = \frac{1}{N}\int F_1 \xi \, d\omega = -\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \varkappa \cdot h^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial x}\right\}$$

mit entsprechenden Formeln für v und w. Ebenso wird der Wärmestrom (die durch die Flächeneinheit transportierte Energie)

$$\text{10)} \qquad \begin{aligned} Q_x &= \frac{m}{2}\int F_1 \cdot \xi \cdot (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, d\omega \\ &= -Nm\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \varkappa \cdot h^{\frac{3}{2}} \left\{\frac{3}{2h}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial x}\right\} \end{aligned}$$

mit analogen Ausdrücken für Q_y und Q_z. Diese Formeln entsprechen genau den Lorentzschen Formeln der Elektronentheorie der Metalle, wenn man die elektrische Feldstärke = 0 setzt. Durch geeignete Spezialisierung können wir nun aus 9) und 10) die Gesetze der molekularen Strömung und der molekularen Wärmeleitung ableiten.

a) Ruhendes Gas mit Temperaturgefälle in der x-Richtung.

Die Bedingung $u = 0$ liefert

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\log h}{dx} + \frac{d\log N}{dx} = 0,$$

d. h.

$$N\sqrt{h} = \text{const.}$$

Wir setzen nun für die Dichte des Gases

$$\varrho = N . m;$$

für die Temperatur

$$T = \frac{m}{3k} \cdot h = \frac{M}{3R} \cdot h,$$

(k die Plancksche universelle Konstante, R die gewöhnliche Gaskonstante $\left(R = 831.10^5 \frac{\text{erg}}{\text{grad}}\right)$, M das Molekulargewicht), für den Druck

$$p = \tfrac{1}{3} \varrho h.$$

Alsdann erhalten wir

$$\varrho \sqrt{T} = \text{const.}$$

Wenn an zwei Stellen mit den Temperaturen T_1 und T_2 die Dichten ϱ_1 und ϱ_2 bezw. die Drucke p_1 und p_2 herrschen, so erhält man als Gleichgewichtsbedingung:

$$11)\qquad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad \text{oder} \quad \frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

Für den molekularen Wärmestrom liefert Gleichung 10)

$$Q_x = -\varrho \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \varkappa h^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = -\varrho \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{\varkappa}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3k}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot T^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Führen wir den Druck ein, so ergibt sich für die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit transportierte Wärmemenge

$$12)\qquad Q = -\tfrac{4}{3} \sqrt{\frac{2k}{m\pi}} \cdot \varkappa \cdot \frac{p}{\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Der analoge Fall des adiabtischen Vorganges, d. i. $Q = 0$, hat kein besonderes Interesse.

b) Strömung bei konstanter Temperatur.

Für die Geschwindigkeit erhalten wir aus 9):

$$u = -\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \varkappa \cdot h^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Mit Einführung des Druckgefälles und der Dichte erhält man für die pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit strömende Gasmenge

$$G = \varrho u = -\tfrac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \varkappa \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\,\frac{dp}{dx}. \tag{13}$$

§ 3.

Vergleich mit den Knudsenschen Formeln.

Unsere Formeln lassen sich unmittelbar auf Transpiration und Wärmetransport eines Gases durch einen porösen Körper anwenden. Knudsen macht auch selbst auf die Analogie mit der Elektronentheorie in Metallen aufmerksam [1]). Die Formeln sind offenbar nur stichhaltig, wenn die linearen Abmessungen der Poren klein sind gegen die mittlere freie Weglänge. Ist dies nicht mehr streng der Fall, so erhält man Korrektionen durch Heranziehung des quadratischen Integrales in der numerischen Integralgleichung. Dies läuft darauf hinaus, daß die Verteilungsfunktion lediglich durch die Zusammenstöße mit den festen Partikeln bestimmt wird und die Anzahl der gegenseitigen Zusammenstöße auf Grund dieser Verteilungsfunktion berechnet wird. Von nicht geringerem physikalischen Interesse ist aber auch der entgegengesetzte Grenzfall. Sind die Abstände der festen Kugeln gegen die mittlere Weglänge der Gasmoleküle groß, so hat man unmittelbar den Fall eines sich gleichmäßig bewegenden Kugelschwarmes, der von Smoluchowski berechnet wurde. (Millikans Versuch über fallende Öltropfen.)

Was die Knudsenschen Beobachtungen in Kapillaren anbelangt, so ist unsere Gleichgewichtsbedingung 11) identisch mit der von Knudsen aufgestellten. Um dagegen die Durchflußmenge aus Gl. 13) zu erhalten, muß man über $\varkappa$ verfügen. In der unmittelbaren Aufstellung der Theorie bedeutet $\varkappa$ etwa den mittleren Weg, den ein Gasmolekül ohne Zusammenstoß mit einer festen Kugel zurücklegen kann. Es zeigt sich nun, daß die Formel 13) mit der von Knudsen und Smoluchowski für eine kreisförmige Kapillare identisch ist, falls man $\varkappa$ gleich dem Durchmesser des Kreisquerschnittes setzt. Diese Größe spielt hier offenbar die Rolle der mittleren Weglänge, die ein Gasmolekül ohne Zusammenstoß mit der Wand zurücklegen kann. Die Strömung in weiteren Kapillaren oder bei

1) Vgl. Knudsen, Annalen der Physik, Bd. 31. S. 633.

mäßiger Verdünnung kann man nun ebenfalls von zwei Grenzfällen aus annähern. Die eine Korrektion erhalten wir dadurch, daß wir die Verteilungsfunktion der molekularen Strömung durch Berücksichtigung der Zusammenstöße der Moleküle untereinander korrigieren. Die Annäherung von der anderen Seite gewinnen wir dadurch, daß wir für das Innere der Kapillare die für die gewöhnliche Gastheorie gelieferte Annäherung annehmen und die Grenzbedingung zwischen Wand und Gas aufstellen.

Bezüglich der molekularen Wärmeleitung liefert die Formel 13) die Wärmemenge, die ein Gas in einem porösen Medium transportiert. Haben zwei Stellen in der Entfernung δ die Temperatur T_1 und T_2, so ist die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit transportierte Wärmemenge für den Wärmeübergang zwischen zwei parallelen Platten

14) $$Q = \tfrac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2k}{m\pi}}\cdot\frac{\varkappa}{\delta}\,\frac{p}{\sqrt{T}}\cdot(T_1 - T_2);$$

die Formel wird identisch mit der Knudsenschen, falls $\frac{\varkappa}{\delta} = 15/32$ gesetzt wird. Diese Frage läßt sich offenbar in dieser Weise nur qualitativ erledigen. Wir werden versuchen, das Problem der Wärmeleitung zwischen parallelen Platten von der anderen Seite anzunähern, indem wir durch Berücksichtigung der Grenzbedingung den Temperatursprung an den Platten berechnen.

§ 4.

Temperatursprung zwischen Gas und fester Wand.

Die in dem vorangegangenen Paragraphen entwickelte Theorie des porösen Körpers wollen wir auf die Grenzbedingung zwischen Gas und fester Wand anwenden. Wir nehmen an (Adsorptionshypothese), daß das Gas ein wenig in den Körper eindringt, als wenn dieser ein poröses Medium wäre. Alsdann können wir im Innern des porösen Mediums die oben berechnete Verteilungsfunktion und die Strömungsgleichungen ansetzen. Im freien Gase dagegen gilt in einiger Entfernung von der Wand die Verteilungsfunktion, die von der gewöhnlichen kinetischen Gastheorie mit Berücksichtigung der Wärmeleitung und Reibung entnommen wird. Zwischen beiden Bereichen wird in Wirklichkeit ein stetiger Übergang vorhanden sein. Bei mäßiger Verdünnung des Gases wird es aber offenbar zulässig sein, den stetigen Über-

gang durch eine sprunghafte Änderung zu ersetzen (wie es bei vielen anderen physikalischen Problemen geschieht), falls man nur die Stationarität der Normalkomponenten des Wärme- und Massenstromes postuliert. Für den Fall der Wärmeleitung im ruhenden Gas machen wir also folgenden Ansatz: Die Wand sei parallel zu der yz-Ebene, das Gas ruhe, und es sei nur ein Temperaturgefälle in der x-Richtung vorhanden. Die Verteilungsfunktion im freien Gasraum unterscheidet sich dann etwas von der Maxwellschen durch ein Glied, welches das Temperaturgefälle enthält; sie lautet für ein Gas mit n inneren Freiheitsgraden in zweiter Näherung

$$15)\quad F' = A' \cdot e^{-B'\left\{\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right\}} \cdot \left\{\frac{1}{\varkappa'} + \Phi(\xi, \eta, \zeta, p_1, \dots p_n)\frac{1}{h'^2}\frac{\partial h'}{\partial x}\right\},$$

wobei $p_1 \dots p_n$ die inneren Impulskomponenten, U ihre kinetische Energie, $\varkappa' = \dfrac{1}{\pi N'\left(\frac{\sigma'}{2}\right)^2}$ die mittlere freie Weglänge, h' das mittlere Quadrat der Translationsgeschwindigkeit und Φ eine Funktion der Geschwindigkeiten und inneren Impulse bedeuten. Φ ist durch eine der Gleichung 7) analoge Integralgleichung bestimmt und ist eine in ξ ungerade Funktion. Setzt man

$$U = \alpha_1 p_1^2 + \cdots \alpha_n p_n^2$$

so hängen A' und B' mit der Molekülzahl N' und dem Geschwindigkeitsquadrat h' bezw. der Temperatur T' so zusammen

$$16)\quad \begin{cases} N' = A \cdot \dfrac{2^{\frac{3}{2}} . \pi^{\frac{n+3}{2}}}{B'^{\frac{n+3}{2}} . m^{\frac{3}{2}} . \sqrt{\alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_n}}, \\ \dfrac{1}{B'} = \dfrac{mh'}{3} = kT'. \end{cases}$$

Infolge der modifizierten Verteilung wird durch den Gasraum eine Wärmemenge transportiert, deren Betrag pro Flächeneinheit und Zeiteinheit durch das Integral

$$17)\quad \int\!\!\int\!\!\int \cdots \int F' \left\{\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) + U\right\} \cdot \xi \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \, dp_1 \dots dp_n =$$
$$= -\frac{m}{3k} \cdot \lambda \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial T'}{\partial x}$$

gegeben ist, wobei

$$18)\qquad \frac{m}{3k}\cdot\lambda = -\frac{A'}{h'^3}\cdot\int e^{-B'\left\{\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right\}}$$

$$\Phi(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ p_1\cdots p_n)\cdot\xi\cdot\left\{\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta\,dp_1\cdots dp_n$$

gesetzt ist; das Integral ist zu erstrecken über den vollen Geschwindigkeitsraum. Dagegen ist es klar, daß in ruhenden Gasen der Mittelwert der Geschwindigkeit verschwindet. Es muß daher das Integral

$$19)\qquad \int\!\!\int\!\!\int\ldots\int e^{-B'\left\{\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right\}}\cdot\Phi\cdot\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,dp_1\cdots dp_n = 0$$

sein.

Für das Innere der Wand wollen wir annehmen, daß zunächst keine Gasströmung stattfindet, woraus nach 9) folgt, daß

$$20)\qquad \frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

ist. Weiter soll vorausgesetzt werden, daß die eigene Wärmeleitung des festen Körpers, die auf anderen Mechanismen beruht (etwa Elektronen), unendlich groß ist gegen die des Gases in den Poren. Dann ist auch $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ zu setzen, woraus nach 20) auch $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$ folgt. Demnach ist die Verteilungsfunktion im Innern der Poren nichts als die Maxwellsche

$$21)\qquad F = \frac{A}{\varkappa}e^{-B\left\{\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right\}},$$

wo $\frac{A}{\varkappa}$ und B ebenso mit N und h zusammenhängen, wie $\frac{A'}{\varkappa'}$ und B' mit N' und h'.

Die Grenzbedingungen stellen wir folgendermaßen auf: die parallel und nahe der Wand gelegene Ebene $x = 0$ sei die Grenze zwischen den beiden Zuständen, die den Verteilungsfunktionen F und F' entsprechen. Will man den Gas- und Wärmestrom durch diese Grenze berechnen, so hat man als Verteilungsfunktion an der Grenze selbst für die von der Wand nach dem Gas passierenden Moleküle die Verteilungsfunktion F, für die in umgekehrter Richtung passierenden Moleküle die Funktion F' zu nehmen. Man erhält in dieser Weise:

$$22)\left\{\begin{aligned} u_0 &= \int\limits_{\xi<0} F\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dp_1 \dots dp_n + \int\limits_{\xi>0} F'\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dp_1 \dots dp_n \\ Q_0 &= \int\limits_{\xi<0} F\xi \cdot \left\{\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right\} d\xi \dots dp_n + \\ &\quad + \int\limits_{\xi>0} F'\xi \left\{\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+U\right\} d\xi \dots dp_n, \end{aligned}\right.$$

wobei die Integrale bezüglich der Variablen ξ nur von $-\infty$ bis 0 bezw. 0 bis $+\infty$ zu erstrecken sind. Rechnet man diese Integrale über den Halbraum aus, so bemerkt man, daß zu der ersten Gleichung wegen 19) die Korrektion der Verteilungsfunktion F' nichts beiträgt. In der zweiten Gleichung liefert sie ein Glied vom Betrag $\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{3k} \cdot \lambda \cdot \frac{\partial h'}{\partial x}$, weil Φ eine in ξ ungerade Funktion ist. Man erhält in dieser Weise für $x = 0$

$$23)\left\{\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{\sqrt{6\pi}}(N\sqrt{h} - N'\sqrt{h'}), \\ Q_0 &= m \cdot \frac{\frac{n}{2}+2}{3^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2\pi}} \left(Nh^{\frac{3}{2}} - N'h'^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{6k}\lambda \cdot \frac{\partial h'}{\partial x}\right). \end{aligned}\right.$$

Im stationären Zustande müssen diese Ausdrücke gleich dem Gas- bezw. Wärmestrom durch einen beliebigen Querschnitt des Gases sein. Nun ist im Inneren des Gases:

$$u_i = 0; \quad Q_i = \frac{m}{3k}\lambda \cdot \frac{\partial h'}{\partial x}.$$

Setzt man demgemäß

$$u = u_i; \quad Q = Q_i,$$

so erhält man

$$24)\left\{\begin{aligned} & N\sqrt{h} - N'\sqrt{h'} = 0, \\ & m \cdot \frac{\frac{n}{2}+2}{3^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\pi}} \left(Nh^{\frac{3}{2}} - N'h'^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{6k}\lambda \frac{\partial h'}{\partial x}\right) = \frac{m}{3k}\lambda \frac{\partial h'}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

Durch Elimination von N ergibt sich

$$m \cdot \frac{\frac{n}{2}+2}{3^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\pi}} \cdot N'\sqrt{h'}\,(h-h') = \frac{m}{6k} \cdot \lambda \cdot \frac{\partial h'}{\partial x}$$

oder, wenn man Temperatur und Dichte bezw. Druck einführt:

$$T' - T = \gamma \frac{\partial T'}{\partial x},$$

wobei

26) $$\gamma = \frac{\sqrt{2\pi}}{n+4} \cdot \frac{\lambda M^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\varrho' \sqrt{T'}}$$

oder

$$\gamma = \frac{\sqrt{2\pi}}{n+4} \cdot \frac{\lambda}{p'} \sqrt{\frac{MT'}{R}}$$

$\left(\frac{R}{M} = \frac{k}{m}\right.$, R die Gaskonstante in Erg, M das Molekulargewicht$\left.\right)$.

Man sieht leicht, daß dieser Ausdruck von γ direkt ein Vielfaches der freien Weglänge des Gases F' ist. Nach der elementaren Theorie der Wärmeleitung drückt sich nämlich der Koeffizient λ durch l (mittlere freie Weglänge des Gases F') folgendermaßen aus:

$$\lambda = \frac{3+n}{6} \cdot k \cdot N' \sqrt{h'}\, l.$$

Setzt man dies ein, so ergibt sich

27) $$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{n+3}{n+4} \cdot l.$$

In der folgenden Tabelle sind die aus 26) berechneten Werte von $\gamma p'$ zusammengestellt, welche Größe für dasselbe Gas und für dieselbe mittlere Temperatur konstant sein sollte, und zwar für diejenigen drei Gase, für die Herr Lasareff[1]) vor einiger Zeit durch direkte Messung die Größe des Temperatursprunges bestimmt hat. Da Herr Lasareff die Beobachtungstemperatur angibt, so haben wir abgerundete Werte für die Wärmeleitfähigkeiten (aus Landolt-Börnstein) genommen. Der Druck ist in Atmosphären ausgedrückt:

Gas	λ	$\gamma p'$ ber.	$\gamma p'$ beobachtet (Lasareff)
H	$3{,}5 \cdot 10^{-4}$	$1{,}68 \cdot 10^{-5}$	$13{,}0$ bis $14{,}5 \cdot 10^{-5}$
Luft	$5{,}5 \cdot 10^{-5}$	$1{,}02 \cdot 10^{-5}$	$1{,}34 \ldots\ldots 1{,}96 \cdot 10^{-5}$
CO_2	$4 \cdot 10^{-5}$	$0{,}67 \cdot 10^{-5}$	$0{,}80 \ldots\ldots 1{,}22 \cdot 10^{-5}$

1) Vergl. Lasareff, Annalen der Physik Bd. 37, S. 233.

Die Tabelle zeigt, daß bei Luft und Kohlensäure der Temperatursprung der Größenordnung nach durch unsere Formel richtig wiedergegeben wird. Der berechnete Wert ist immer zu klein, bei Wasserstoff ist die Abweichung sehr erheblich. Ein Grund für die Abweichung liegt offenbar darin, daß der Übergang zwischen den beiden Zustandsgebieten in Wirklichkeit stetig ist und daß die ideale Grenzfläche nicht genau mit der Endfläche der Wand zusammenzufallen braucht. So ist es auch zu verstehen, daß die Abweichung desto größer ausfallen muß, je größer die mittlere Weglänge ist. Bei Wasserstoff wird durch diesen Umstand offenbar die ganze Theorie hinfällig.

Alle diese Ansätze sollen von einem von uns (Bolza) ausführlicher bearbeitet werden. Es ist z. B. klar, daß man die Gleitung eines strömenden Gases längs einer Wand in derselben Weise behandeln kann, wie den Fall des Temperatursprunges.

Unser Ziel war, zu zeigen, was die Theorie ohne besondere Annahmen über die Art der Reflexion der Moleküle an der Wand — wie sie von Knudsen und Smoluchowski gemacht werden — leistet. Wie man sieht, gelangt man in dieser Weise zu Resultaten, die zunächst höchstens der Größenordnung nach mit der Erfahrung übereinstimmen. Die Theorie muß also verbessert werden, doch es mag dahingestellt bleiben, ob man auf die Einführung der „Akkomodation“ zwischen Wand und Gas doch noch verzichten und durch weitere Entwicklung der exakten Theorie (weitere Annäherungen, Berücksichtigung der Schwingungen der festen Moleküle) den Tatsachen gerecht werden kann.

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen.

XXVI.

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Februar 1913.

Über das Verhalten von Carvoxim und von Eucarvoxim gegen freien Wasserstoff bei Gegenwart von colloidalem Palladium.

[Mitbearbeitet von Alan R. Albright und Rud. Klein.]

Es ist lange bekannt, daß Carvon (I) als α-β-ungesättigtes Keton bei der Einwirkung von nascierendem Wasserstoff an der dem Carbonyl benachbarten Doppelbindung leicht Wasserstoff addiert, um in Dihydrocarvon (II) überzugehen, während die in der Seitenkette stehende Bindung unter diesen Bedingungen nicht angegriffen wird. Könnte man die Wirkung der Konjugation in irgend einer Weise ausschalten und damit die Neigung des Wasserstoffs sich in α-β-Stellung zum CO zu addieren zurückdrängen, so hätte man Aussicht bei Anwendung der Paal'schen Reductionsmethode, die in jeder Lage befindliche Doppelbildungen zu lösen vermag, unter geeigneten Versuchsbedingungen vom Carvon aus direkt auch zum Carvotanaceton (III) zu gelangen.

I. Carvon $C_{10}H_{14}O$

II. Dihydrocarvon $C_{10}H_{16}O$

III. Carvotanaceton $C_{10}H_{16}O$.

Daß man die Paal'sche Methode zur erschöpfenden Reduction des Carvons, d. h. zur Darstellung des Tetrahydrocarvons mit Vorteil benutzen kann, habe ich schon vor längerer Zeit gezeigt [1]).

Die abgeänderten Bedingungen, die Skita für Ausführung der Reduction vorschlägt (Anwendung von Palladiumchlorid) sind ebenso brauchbar für den Zweck und Vavon [2]) giebt an, bei Verwendung von Platinschwarz eine stufenweise Reduction des Carvons erzielt zu haben, die im ersten Schritt zu Carvotanaceton führen soll. Damit wäre das angedeutete Problem bereits gelöst und zugleich die sehr merkwürdige Tatsache — die Vavon nicht besonders hervorhebt — constatiert, daß nascierender Wasserstoff das Carvon-Molekül an anderer Stelle zuerst angreift als freier Wasserstoff bei Anwesenheit eines Platinmetalls. Auch bei dem Verfahren von Paal oder von Skita gelingt es bekanntlich partielle Reductionen zu verwirklichen.

Daß man bei diesen partiellen Reductionen von freiem Carvon leicht zu reinen Präparaten kommen kann, ist aber a priori nicht wahrscheinlich. Beimengungen von noch unreduciertem Carvon oder von schon weitergehend reduciertem, also von Tetrahydrocarvon, werden voraussichtlich auftreten und sind — wenigstens nach hier gemachten Erfahrungen — auch tatsächlich nicht zu vermeiden. Da aber alle in betracht kommenden Verbindungen flüssig sind und ähnlich sieden, ist eine Trennung recht schwer.

Ganz unabhängig von Vavon und noch ohne Kenntnis von dessen Resultaten, habe ich schon vor längerer Zeit Versuche anstellen lassen, die von der Voraussetzung ausgingen, daß man die leichte Reducierbarkeit der conjugierten Doppelbindung im Carvon vielleicht dadurch stark herabdrücken würde, daß man die Carbonyl-Gruppe in die Oxim-Gruppe abwandelt und daß es so gelingen könne, die in der Seitenkette stehende Aethylenbindung leichter zu lösen, als die im Ring befindliche.

Über die Resultate dieser Versuche soll im Folgenden berichtet werden.

Unterwirft man Carvoxim bei Gegenwart von colloidalem Palladium der Reduction mit freiem Wasserstoff und beschränkt die Wasserstoffzufuhr soweit, daß auf 1 Mol. Oxim nur 1 Mol. H_2 aufgenommen werden kann, so erhält man nicht Dihydrocarvoxim,

1) Annal. 381, 64 (1911).
2) C. rend. 153, 68 (1911); Centralbl. 1911, II. 551.

sondern das Oxim des *Carvotanacetons* und zwar *in einer bis dahin nicht bekannten Modification*. Beschränkt man die Wasserstoffzufuhr nicht in geeigneter Weise, so schreitet der Reductionsprozeß — unter reichlicher Bildung nachher zubesprechender *Nebenproducte* — bis zum *Tetrahydrocarvoxim* fort. Auch die Begleiterscheinungen, die man während des Verlaufs des Reductionsprocesses beobachten kann, verdienen große Beachtung. Während nämlich die Festlegung des Sauerstoffatoms des Carvons durch Abwandlung ins Oxim die Reducierbarkeit der benachbarten Aethylenbindung beeinträchtigt, tritt deren Einfluß auf die Angreifbarkeit der *Oximgruppe selbst* in die Erscheinung. Bei der Reduction von *Carvoxim* bilden sich nämlich stets auch *basische* Producte (selbst Ammoniak), während bei der Reduction von *Dihydrocarvoxim solche basische Nebenproducte kaum auftreten*: man gelangt dabei vielmehr recht glatt zum *Tetrahydrocarvoxim*. Außerdem hat sich herausgestellt, daß die Bedingungen der Concentration, unter denen man das Oxim mit Wasserstoff belädt und die Beschaffenheit des Katalysators auf den Verlauf der Reduction von Einfluß sind.

Entsprechend interessante Resultate wurden bei der Reduction von *Eucarvoxim* erhalten, das man unter geeigneten Versuchsbedingungen in ein ganz neues *Dihydroeucarvoxim* (und Dihydroeucarvon), sowie in ein neues *Tetrahydroeucarvoxim* überführen kann. Das Nähere ergiebt sich aus den im Folgenden zu besprechenden experimentellen Befunden.

I. Reduction des Carvoxims.

Werden 10 gr *Carvoxim* in Methylalkohol gelöst und mit 0,1 gr in Wasser gelöstem colloidalem Palladium (nach *Paal*) geschüttelt, das vorher mit Wasserstoff gesättigt war, so erfolgt die Wasserstoffabsorption mit ganz außerordentlicher Schnelligkeit. Die ersten 100 ccm Wasserstoff wurden z. B. bei einem Versuch innerhalb 50 Sekunden aufgenommen. Die Aufnahme verlangsamt sich dann allmählich und kommt nach einigen Stunden ganz zum Stillstand. Destilliert man nun den Methylalkohol im Wasserbad ab, so bemerkt man das Auftreten reichlicher Mengen Ammoniak. Wird der Rückstand mit Aether aufgenommen und der Aether dann abdestilliert, so hinterbleibt ein rötlich gefärbtes, nicht zum Erstarren neigendes Oel, das ein Gemisch verschiedener Substanzen

enthält und zwar wesentlich Tetrahydrocarvon, Carvacrylamin und etwas Oxim (wahrscheinlich Tetrahydrocarvoxim).

Auf die direkte Isolierung des Oxims, das sich beim Destillieren bei höherer Temperatur zersetzt, wurde verzichtet. Die beiden anderen Bestandteile konnten aus einer größeren Menge (ca. 35 gr) des öligen Products durch Destillation unter vermindertem Druck herausgearbeitet werden.

Die ersten bei der Destillation unter 11^{mm} zwischen 115—119° übergehenden Bestandteile hatten Carvon-artigen Geruch und lieferten ein nach dem Umkrystallisieren bei 185—188° schmelzendes Semicarbazon und ein bei 99° schmelzendes Oxim, das analysiert wurde:

0.1824 gr gaben 0.4728 CO_2 und 0.1850 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{18}NOH$	Gefunden
C – 70.94	70.69
H – 11.32	11.40.

Damit ist die Anwesenheit von Tetrahydrocarvon in dem Reductionsproduct nachgewiesen, dessen Bildung nicht auffallend ist, denn wenn sich das angewandte Oxim hydrolytisch während der Reduction spaltet, so muß — gemäß den früher mitgeteilten Versuchen (l. c.) — die Entstehung von Tetrahydrocarvon bei dem Proceß erwartet werden.

Die zweite unter 11^{mm} innerhalb 127° bis 140° siedende Fraction (bei höherer Temperatur trat Zersetzung ein) besaß basischen Charakter. Mit überschüssiger concentrierter Salzsäure versetzt erstarrte sie zu einem Chlorhydrat, das nach dem Reinigen bei 202° schmolz.

Die aus dem Chlorhydrat wieder in Freiheit gesetzte Base siedete bei 240° und zeigte den Charakter einer aromatischen Base (Diazotierbarkeit).

Es unterliegt keinem Zweifel, daß man es mit Carvacrylamin zu tun hat.

Die Entstehung dieser Base ist wohl nur so zu erklären, daß die — wie schon bemerkt — sehr energisch verlaufende Reductionsreaction *an der Oximgruppe* ansetzt. Auf der einen Seite erfolgt Hydrolyse unter Bildung von Ammoniak und hydriertem Carvon, auf der anderen Seite wird das Oxim unter Sauerstoffentziehung zu einer Iminbase reduciert, die sich ganz analog zu Carvacrylamin umlagert, wie man Carvacrol aus Carvon sich bilden sieht. Folgende Formeln verdeutlichen den Prozeß:

CH_3		CH_3		CH_3
$:NOH$	→	$:NH$	→	$—NH_2$
$CH_3.C:CH_2$		$CH_3.C:CH_2$		CH_3CHCH_3
Carvoxim		Zwischenproduct		Carvacrylamin.

Den für unseren Fall all zu lebhaften Reactionsverlauf, der bei der Anwendung des Paal'schen Verfahrens einsetzt, galt es nun zu mäßigen. Das zeigte sich durchführbar, wenn als Katalysator statt nach Paal bereitetes colloidales Palladium Chlorpalladium bei Gegenwart von Gummiarabicum (Methode Skita) benutzt wurde. Bei Anwendung des Skita'schen Reagens verläuft die Reaction langsamer und läßt sich leicht in die gewünschten Bahnen lenken, wenn man den zu reducierenden Carvoximlösungen die richtige Verdünnung giebt. Arbeitet man nämlich mit concentrierten methylalkoholischen Lösungen, bei Gegenwart von nur wenig Wasser und beschränkt die Wasserstoffzufuhr nicht, so bildet sich (wie bei dem erstbeschriebenen Verfahren) viel Ammoniak und Tetrahydrocarvon (bezw. Tetrahydrocarvoxim). Wählt man aber bestimmte Versuchsbedingungen (verdünnte wäßrig-alkoholische Lösungen), so bleibt die Reduction von selbst auf halbem Wege stehen, bezw. verlangsamt sich sehr stark. Unterbricht man sie dann, so findet man in den Reactionsproducten nunmehr ein neues dihydriertes Carvoxim (Carvotanacetoxim) vor. Zweckmäßig ist es natürlich, die aufgenommene Wasserstoffmenge zu messen und den Versuch abzubrechen, wenn 1 Molekül Wasserstoff absorbiert ist.

Mit Umgehung der Beschreibung sehr vieler Einzelversuche, die angestellt werden mußten, um dies Resultat zu erreichen, seien lediglich die Versuchsbedingungen hier angegeben, die zum Ziele führen.

0,1 gr Palladiumchlorür, gelöst in 70 ccm Wasser werden mit 3 ccm Gummiarabikumlösung versetzt und 10 gr Carvoxim, gelöst in 200 ccm Methylalkohol hinzugegeben. Nach Beendigung der Wasserstoffaufnahme wird der Alkohol auf dem Wasserbad abdestilliert und der Rückstand sich selbst überlassen. Es scheiden sich sehr bald (neben etwas öligen Bestandteilen) gut ausgebildete Krystalle aus. Diese werden abgesaugt und mehrfach aus Methylalkohol umkrystallisiert.

Die Krystalle bilden dann schöne durchsichtige Prismen, die bei 66—67° schmelzen.

0.1811 gr gaben 0.4793 CO_2 und 0.1615 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{16}NOH$	Gefunden
C — 71.79	72.17
H — 10.26	9.98.

Der Schmelzpunkt dieses Oxims stimmt mit keinem der bekannten Oxime eines Ketons $C_{10}H_{16}O$ der Carvonreihe überein, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

Dihydrocarvoxim	(aktiv)	88—89°
„	(inaktiv)	115—116°
Carvenonoxim		91°
Carvotanacetoxim	(aktiv)	75—76°
„	(inaktiv)	92—93°
Neues Oxim	(aktiv)	66—67°.

Das bei 66—67° schmelzende Oxim ist optisch aktiv. Bei einer vorläufigen Bestimmung wurde in 4,5 prozentiger methylalkoholischer Lösung $[\alpha]_D = +18,66°$ gefunden.

Um die Natur des dem Oxim zu Grunde liegenden Ketons zu ermitteln, wurde es durch Erwärmen mit verdünnter Schwefelsäure zerlegt und das gewonnene Keton in das Semicarbazon verwandelt. Das aus Methylalkohol umkristallisierte Präparat hatte den Schmelzpunkt 173°, was mit dem des aktiven Carvotanacetons übereinstimmt, dessen charakteristisches Verhalten[1]) (Dimorphismus) es auch aufwies.

Das aus dem Semicarbazon regenerierte freie Keton zeigte folgendes Verhalten:

Siedepunkt 229,5°, $d_{20} = 0.9376$, $n_D = 1.4813$, $M = 46.13$.

Das stimmt mit den für Carvotanaceton gefundenen Werten[2]). Wurde dies Keton nun wieder oximiert, so erhielt man nicht das bei 66—67° schmelzende Oxim zurück, sondern ein Oxim vom Schmelzpunkt 75—76°, was dem Schmelzpunkt des bekannten aktiven Carvotanacetoxims also entspricht. Die Analyse dieses Oxims ergab:

0.1165 gr gaben 0.3078 CO_2 und 0.1097 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{16}NOH$	Gefunden
C — 71.79	72.04
H — 10.26	10.54.

---

1) Annal. **336**, 36, (1904).

2) Annal. **336**, 39, (1904).

Es kann darnach gar keinem Zweifel unterliegen, daß man es hier mit Carvotanaceton zu tun hat und daß das bei 66—67° schmelzende Oxim als eine neue stereoisomere Modification seines Oxims zu betrachten ist, das man wohl bei Reduction von Carvoxim, nicht aber unter den üblichen Bedingungen der direkten Oximierung des freien Ketons erhalten kann. Ganz analogen Erscheinungen begegnet man ja auch sonst, wie ich neulich am Beispiel des Pinocamphonoxims gezeigt habe[1]). Gelegentlich eines der mannigfaltigen mit dem Carvoxim vorgenommenen Reductionsversuche, bei dem eine größere Menge Wasser als in der oben angegebenen Vorschrift, in der Flüssigkeit enthalten war, wurde übrigens statt des bei 66—67° schmelzenden Oxims, das bei 75° schmelzende gewöhnliche Carvotanacetonoxim unter den Reductionsproducten aufgefunden.

Nachdem die obigen Feststellungen gemacht waren, ließ sich leicht nachweisen, daß man Carvoxim auch bei Anwendung des Paal'schen Katalysators zu dem bei 66° schmelzenden Oxim $C_{10}H_{16}NOH$ reducieren kann, wenn man die Wasserstoffzufuhr unterbricht, sobald etwa 1 Molekül Wasserstoff absorbiert ist. Das Oxim ist aber weniger leicht herauszuarbeiten, weil beim Reducieren nach Paal sich in diesem Fall stets eine größere Menge basischer Nebenproducte (Carvacrylamin) bildet, als bei Anwendung des Verfahrens nach Skita. Daß sich das so verhält wurde außerdem durch einen besonderen Versuch festgestellt, bei dem je 7,5 Carvoxim einmal nach Paal, das andere Mal nach Skita unter entsprechenden Bedingungen reduciert und die dabei entstandenen Mengen Carvacrylamin annähernd bestimmt wurden, was in Folge der großen Schwerlöslichkeit des Carvacrylaminchlorhydrats in concentrierter Salzsäure unschwer möglich ist. Bei der angegebenen Grammzahl Carvoxims konnten nun bei Anwendung des Paal'schen Verfahrens 2,5 gr, bei Anwendung des Skita'schen Verfahrens nur 0,2 gr Carvacrylaminchlorhydrat aus dem Reductionsproduct isoliert werden, woraus folgt, daß die Beschaffenheit des Katalysators für den Reactionsverlauf von nicht unerheblicher Bedeutung ist.

Ebenso muß die eingangs schon erwähnte Tatsache noch einmal hervorgehoben werden, daß wenn man Dihydrocarvoxim unter den angegebenen Bedingungen reduciert, sehr glatt Tetrahydrocarvoxim sich bildet, ohne daß merkliche Mengen Ammoniak oder organische Basen auftreten.

---

1) Annal. **389**, 186 (1912).

Nach den gemachten Feststellungen drängte sich die Frage auf, ob es nicht möglich sei, auch mit Hülfe der üblichen chemischen Reductionsmethoden an Carvoxim Wasserstoff so anzulagern, daß man, sei es zum Dihydrocarvoxim oder zum Carvotanacetoxim käme. Alle nach dieser Richtung angestellten Versuche sind bisher aber resultatlos verlaufen. Carvoxim wurde teils in alkoholischer, teils in feuchter ätherischer Lösung mit Natrium oder mit Calcium unter verschiedenen Bedingungen reduciert, ohne daß der Zweck erreicht werden konnte. Das Oxim wurde sogleich bis zu Dihydrocarvylamin reduciert, zum Teil auch hydrolisiert, nie aber konnte in dem Reactionsproduct ein anderes Oxim als unangegriffenes Carvoxim aufgefunden werden.

II. Reduction des Eucarvoxims.

Wenn man reines bei 106° schmelzendes Eucarvoxim mit freiem Wasserstoff reduciert, so hängt es, ebenso wie beim Carvoxim, von den Versuchsbedingungen ab, was für Endproducte man erhält.

Im allgemeinen kann man sagen, daß die Reduction bei Anwendung concentrierter methylalkoholischer Lösungen des Oxims schneller und weitergehend verläuft als bei Anwendung verdünnter. Löst man z. B. 5 gr Eucarvoxim in 50—60 ccm Methylalkohol bei Anwesenheit von 0,05—0,1 gr colloidalem Palladium (Paal) und 10 ccm Wasser, so erfolgt die Wasserstoffaufnahme anfangs sehr schnell und nach einigen Stunden ist die theoretisch für Bildung von Tetrahydroeucarvoxim berechnete Wasserstoffmenge ziemlich aufgenommen. Es bildet sich etwas Ammoniak und Base, aber nicht in dem Maße, wie bei der Anwendung von Carvoxim. Das Hauptproduct der Reduction stellt Tetrahydroeucarvoxim in einer bis dahin nicht bekannten krystallisierten Modifikation vor. Da diese Verbindung gegen Wärme empfindlich ist und beim Überschmelzen die Krystallisationsfähigkeit leicht einbüßt, ist es, um die Verbindung aus dem Reactionsproduct heraus zu arbeiten ratsamer, statt den überschüssigen Alkohol durch Destillation zu entfernen, mit Wasser zu verdünnen, auszuäthern und das Lösungsmittel unter vermindertem Druck verdunsten zu lassen. Es erstarrt der Rückstand dann zu einer Krystallmasse, die von öligen Bestandteilen abgesaugt wird. Nach dem Umkrystallisieren aus wässerigem Methylalkohol erhält man leicht wollige Nadeln, die bei 56—57° schmelzen. Das Präparat ist schwer verbrennlich, die Analyse läßt aber keinen Zweifel darüber, daß Tetrahydroeucarvoxim vorliegt.

0.2098 gr gaben 0.5449 CO_2 und 0.2077 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{18}NOH$	Gefunden
C – 70.94	70.82
H – 11.32	11.08.

Aus dem Oxim wurde das Keton durch Erwärmen mit Schwefelsäure regeneriert und dann an Semicarbazid gebunden. Das Semicarbazon, das so erhalten wurde, ließ sich durch Krystallisation in die beiden früher beschriebenen characteristischen Modificationen[1]) vom Schmelzpunkt 191—192 und 161—163° zerlegen. Das aus dem Semicarbazon zurückgewonnene Tetrahydroeucarvon zeigte folgende Eigenschaften: Siedep. 207°, d_{20} = 0.906, n_D = 1.4553.

Berechnet für $C_{10}H_{18}O$	Gefunden
M = 46.22	46.15.

Die angegebenen Constanten stimmen gut mit denen überein, die neulich für ein bei der direkten Reduction von Eucarvon erhaltenes Tetrahydroeucarvon ermittelt wurden[2]), nämlich Siedep. 208°, d_{20} = 0.9065, n_D = 1.4554, M = 46.13.

Bisher ist es nicht gelungen, beim Oximieren des regenerierten reinen Tetrahydroeucarvons das krystallisierte, bei 56—57° schmelzende Oxim zurückzuerhalten, es entstand dabei immer nur ein öliges Oxim. Man hat wohl also die Existenz zweier stereoisomerer Modificationen anzunehmen, wie sie in ähnlichen Fällen auch beobachtet sind (s. o.).

Wird Eucarvoxim gelinde reduciert, so kann man zum Dihydroeucarvoxim gelangen. Dazu eignet sich z. B. folgende Versuchsanordnung. 5 gr Oxim werden in 90 ccm Methylalkohol gelöst und mit 0.1 gr Palladiumchlorid, 7 ccm Wasser und 3 ccm 1 %iger Gummiarabikumlösung in einer Wasserstoffatmosphäre durchgeschüttelt, bis keine merkliche Wasserstoffabsorption mehr stattfindet bezw. bis 2H Atome aufgenommen sind. Die Verarbeitung des Products erfolgt, wie beim Carvoxim angegeben ist. Man erhält als Reductionsproduct eine leicht erstarrende Masse, die nach genügendem Umkrystallisieren bei 122—123° schmilzt und in Alkohol wesentlich schwerer lößlich ist, als Tetrahydroeucarvoxim.

0.1962 gr gaben 0.5162 CO_2 und 0.1775 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{16}NOH$	Gefunden
C – 71.79	71.76
H – 10.26	10.12.

1) Annal. **339**, 108 (1905).

2) Annal. **381**, 68 (1911). Die älteren Angaben über die physikalischen Eigenschaften [Annal **339**, 108 (1905)] des Tetrahydroeucarvons, für deren Bestim-

Aus dem bei 122—123° schmelzenden Oxim wurde das Keton in Freiheit gesetzt und dann an Semicarbazid gebunden.

Das Semicarbazon schmolz bei 195—197°, bei schnellem Erhitzen bei 202°. Das aus dem Semicarbazon durch Erwärmen mit Schwefelsäure regenerierte Keton $C_{10}H_{16}O$ hatte folgende Eigenschaften:

Siedepunkt 213—214°, $d_{21} = 0.9325$, $n_D = 1.4790$.

Berechnet für $C_{10}H_{16}OF$	Gefunden
M = 45.82	46.22.

0.1633 gr gaben 0.4733 CO_2 und 0.1560 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{16}O$	Gefunden
C – 78.88	79.06
H – 10.60	10.69.

Beim Oximieren konnte aus diesem Präparat leicht das hoch (122—123°) schmelzende, erst beschriebene Oxim zurückgewonnen werden.

Von den bisher erhaltenen „Dihydroeucarvon"-Präparaten weicht das aus dem festen Oxim gewonnene ganz wesentlich ab.

Baeyer[1]) erhielt Dihydroeucarvon aus Dihydroeucarveol, das durch Reduction von Eucarvon mit Natrium in alkoholischer Lösung dargestellt war. Er giebt als Kennzeichen für das Keton an: Siedepunkt 86—88° unter 14mm. Oxim ölig. Semicarbazon Schmelzpunkt 189—191°. Nitrosoderivat Schmelzpunkt 119—120° bezw. 121—124°.

Klages und Kraith[2]) fanden für ein nach Bayers Vorschrift dargestelltes Präparat

Siedep. 86—87° unter 16mm, 202—203° unter gew. Druck. $d_{20} = 0.927$, $n_D = 1.46978$.

Ich konnte später zeigen[3]), daß bei dem von Baeyer eingeschlagenen Verfahren aus Eucarvon neben ungesättigtem Dihydroeucarveol zu etwa 17 % auch gesättigte Tetrahydro-Verbindung entsteht. Wie die angegebenen Constanten zeigen, hat das Präparat von Klages und Kraith wohl von der höher hydrierten Verbindung enthalten[4]). Was Dichte und Brechungsver-

---

mung ein augenscheinlich noch nicht ganz reines Präparat vorlag, bedürfen demnach der Correctur.

1) Ber. 27, 1922 (1899), 28, 646.

2) Ber. 32, 2563 (1899).

3) Annal. 339, 107 (1905).

4) Auch Anwesenheit von Dihydrocarvon ist wohl nicht ganz ausgeschlossen.

mögen anbetrifft, so weisen die in Betracht kommenden Präparate folgende Abstufungen auf:

	Eucarvon	Dihydroeucarvon	Tetrahydroeucarvon
	$C_{10}H_{14}O$	$C_{10}H_{16}O$	$C_{10}H_{18}O$
d	0.9520	0.9325	0.9065
n_D	1.5048	1.4790	1.4554

und in der Carvon-Reihe findet man:

	Carvon	Dihydrocarvon	Tetrahydrocarvon
d	0.957	0.928	0.9040
n_D	1.4975	1.4717	1.4554.

Bemerkenswert ist beiläufig die große Übereinstimmung von Dichte und Brechungsexponent beim Tetrahydroeucarvon und Tetrahydrocarvon. Im Siedepunkt unterscheiden sich beide Ketone dagegen um 12—13°.

Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, daß das aus dem bei 122—123° schmelzenden Oxim gewinnbare Dihydroeucarvon verschieden ist von dem nach dem Baeyer'schen Verfahren durch Reduction aus Eucarvon direkt herstellbaren. Den Grund dafür sieht man auch ein, wenn man von der von mir aufgestellten Eucarvon-Formel

```
        CH3
        |
        C
      //  \
    HC     CO
    |      |
    HC     CH2
    ||     |
    HC ——— C(CH3)2
```

ausgeht. Bei der Reduction mit Natrium in alkoholischer Lösung wird, wie ich früher gezeigt habe[1]), die Bildung eines der beiden Ketone:

```
I.      CH3                     II.      CH3
        |                                |
        CH                               CH
      /    \                           /    \
   H2C      CO                       HC      CO
    |       |                        ||      |
    HC      CH2        oder          HC      CH2
    ||      |                        |       |
    HC ——— C(CH3)                   H2C ——— C(CH3)2
```

zu erwarten sein, jedenfalls aber die conjugiert zum Carbonyl

1) Annal. 339 (1905) 94.

liegende Aethylenbindung verschwinden. Wird dagegen Eucarvoxim mit freiem Wasserstoff reduciert und übt dabei die Oximgruppe einen entsprechend schützenden Einfluß auf die benachbart liegende Aethylenbindung aus, wie es nunmehr beim Carvoxim nachgewiesen ist, so wird ein Dihydroeucarvon der Formel III

```
III.      CH3
           |
           C
          // \
        HC    CO
        |     |
       H2C    CH2
        |     |
       H2C————C(CH3)2
```

resultieren.

Daß nun dem aus dem bei 122—123° schmelzenden Oxim bereiteten Dihydroeucarvon wirklich letztere Formel III zukommt, ist durch folgende Versuche schon so gut wie sicher erwiesen.

Wird das Keton der Oxydation mit Chromsäure unterworfen, so erhält man in guter Ausbeute eine zweibasische, in Wasser und anderen Lösungsmitteln sehr lösliche und daher schwer zu reinigende, gegen 80° schmelzende Säure, deren Silbersalz zur Analyse kam.

0.1678 gr gaben 0.0930 Ag.

0.2012 „ „ 0.1807 CO_2 und 0.0582 H_2O und 0.1115 Ag.

Berechnet für $C_8H_{12}O_4Ag_2$		Gefunden
C — 24.74	—	24.50
H — 3.12	—	3.24
Ag — 55.64	55.41	55.44.

Daß die Säure $C_8H_{14}O_4$ eine Dimethyladipinsäure vorstellt, zeigte das Verhalten ihres Kalksalzes, das mit Natronkalk gemischt und im Wasserstoffstrom der trockenen Zersetzung unterworfen ein Keton $C_7H_{12}O$ lieferte, dessen Semicarbazon bei 182—183° schmolz und bei der Analyse folgende Werte gab:

0.1274 gr gaben 0.2656 CO_2 und 0.1027 H_2O.

Berechnet für $C_7H_{12}N.NHCONH_2$	Gefunden
C — 56.75	56.88
H — 8.94	9.02.

Mit Benzaldehyd condensierte sich dies Dimethylcyklopentanon leicht zu einer in gelben Nadeln krystallisierenden, bei 139° schmelzenden Dibenzylidenverbindung.

Die angegebenen Eigenschaften stimmen mit denen des β, β-Dimethylcyklopentanons und der zugehörigen β, β-Dimethyladipinsäure überein, die früher als Abbauproducte des Trimethyl (1, 3, 3)-cyklohexanon (5) von Wallach und Scheunert[1]) erhalten wurden.

Mit der Entstehung dieser Verbindungen ist aber die Konstitution des neuen Dihydroeucarvons festgestellt, denn nur die unter III aufgeführte Verbindung kann bei der Oxydation unter Entstehung von β, β-Dimethyladipinsäure zerfallen. Obige Formel erklärt völlig befriedigend den Vorgang, wie ein Blick auf das folgende Schema zeigt:

```
        CH3
         |
         C
       //  \
     HC     CO                 HO2C     CO2H
     |      |        →          |        |       + CH3CO2H
    H2C    CH2                 H2C      CH2
     |      |                   |        |
    H2C——C(CH3)2               H2C——C(CH3)2.
```

1) Annal. **324**, 109, (1902).

Bestimmung fundamentaler Sternörter aus Höhendurchgangsbeobachtungen.

Von

R. Trümpler.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. März 1913 durch E. Wiechert.

Die Zeit- und Breitenbestimmung aus Beobachtungen verschiedener Sterne in der gleichen, zunächst unbekannten Zenitdistanz (Methode der gleichen Höhen) ist zwar schon sehr lange bekannt (Gauß 1808), sie ist aber erst im letzten Viertel des vergangenen Jahrhunderts zu praktischer Verwendung gekommen. Die Weiterentwicklung der Methode hat dann in der Hauptsache zwei verschiedene Richtungen eingeschlagen. Einerseits wurden durch Auswahl geeigneter Sternpaare Zeit- und Breitenbestimmung getrennt und die unbekannte Zenitdistanz eliminiert; andererseits führte die Beschränkung auf eine einzige Zenitdistanz zu den eigentlichen Höhendurchgangsbeobachtungen. Bei dieser letzteren Methode, von der im Folgenden allein noch die Rede ist, werden die Durchgänge durch einen bestimmten Höhenkreis für eine größere Zahl von Sternen in verschiedenen Azimuten beobachtet und aus diesen Durchgangszeiten durch Ausgleichung Polhöhe, Uhrkorrektion und Zenitdistanz des Höhenkreises bestimmt. Die Beobachtungsweise erfordert also ein Instrument, das um eine vertikale Achse drehbar ist, während die optische Achse des Fernrohres in jedem Azimut dieselbe Zenitdistanz anzeigt oder sich auf dieselbe reduzieren läßt. Diese Bedingungen können zwar schon durch ein Universalinstrument oder Zenitteleskop realisiert werden, dessen Fernrohr mit einem guten Niveau fest verbunden ist; es sind aber zur Erreichung einer möglichst vollkommenen Konstanz der Zenitdistanz mit Vorteil auch eine Reihe von Spezialinstrumenten kon-

struiert worden wie das Almukantar von Chandler[1]), die Nadirinstrumente von Beck[2]), das Circumzenithal von Nušl und Frič[3]) und das Astrolabe à prisme von Claude und Driencourt[4]). Besonders das letztgenannte Instrument hat infolge seiner Handlichkeit und der Einfachheit der Beobachtungsweise vielfach Verwendung gefunden.

Die meisten Arbeiten über Höhendurchgangsbeobachtungen berücksichtigen nur deren Anwendung zur geographischen Ortsbestimmung oder stellen dieselbe in den Vordergrund; doch hat bereits Chandler mit seinem Almukantar nachgewiesen, daß sich die Methode auch zur Bestimmung von Sternörtern eignet. In neuester Zeit wiederum hat W. E. Cooke[5]) auf die Heranziehung von Höhendurchgangsbeobachtungen zur fundamentalen Ortsbestimmung von Fixsternen hingewiesen. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, die Anwendungsmöglichkeit der Methode nach dieser Richtung hin näher zu untersuchen, das vorgeschlagene Beobachtungsverfahren dann durch eine mit einem Prismenastrolab ausgeführte Versuchsserie zu illustrieren und auf seine Leistungsfähigkeit hin zu prüfen.

§ 1. Die Grundgleichungen zur Berechnung von Höhendurchgangsbeobachtungen.

Die Beobachtung der Uhrzeit U des Durchganges eines Sterns durch einen Höhenkreis liefert eine Gleichung zwischen den scheinbaren Sterncoordinaten α, δ einerseits und der wahren Zenitdistanz des Höhenkreises z', der Polhöhe φ und der Uhrkorrektion u andererseits. Für diese Beziehung kommen vor allem zwei Formeln der sphärischen Trigonometrie in Betracht. Setzen wir

$$t = U + u - \alpha$$

so lauten dieselben:

---

1) S. C. Chandler, The Almucantar. Annals of the Astr. Observatory of Harvard College vol. XVII, 1887.

2) Verschiedene Publikationen in A. N. Bd. 126 pg. 385, Bd. 130 pg. 81, Bd. 136 pg. 225, Bd. 140 pg. 119, Bd. 159 pg. 133.

3) F. Nušl et J. J. Frič, Etude sur l'appareil circumzénithal, und Deuxième étude sur l'appareil circumzénithal, Bulletin international de l'Académie des sciences de Bohême 1903 und 1906.

4) A. Claude et L. Driencourt, Description et usage de l'Astrolabe à prisme Paris 1909.

5) W. E. Cooke, A proposed new method in fundamental astronomy, Observatory XXXIV pg. 366 1911 und Fundamental Astronomy, a suggestion, Monthly Notices LXXI pg. 725 1911.

1a) $$\cos z' = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

1b) $$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-\varphi)\sin(s-\delta)}{\cos s \cos(s-z')}} \quad \text{wo } s = \frac{\varphi+\delta+z'}{2}$$

U spielt darin die Rolle der Beobachtungsgröße, $\alpha, \delta;\ z', \varphi, u$ sind im allgemeinsten Falle die gesuchten Unbekannten.

Da unter z' die wahre Zenitdistanz verstanden ist, die auch noch die Refraktion enthält, so kann diese bei einer längeren Beobachtungsserie nicht mehr als konstant angenommen werden infolge der Refraktionsänderungen durch Temperatur- und Luftdruckschwankungen. Wenn Z die scheinbare Zenitdistanz des Instrumentes bedeutet, r_0 die mittlere Refraktion für Z und für Normalwerte von Temperatur und Luftdruck, dr die Änderung der Refraktion beim Übergang zu den beobachteten Werten derselben, so ist

$$z' = Z + r_0 + dr$$

Statt der von Temperatur und Luftdruck abhängigen wahren Zenitdistanz z' führen wir nun die auf die mittlere Refraktion reduzierte konstante Zenitdistanz

$$z = Z + r_0$$

durch die Substitution

$$z' = z + dr$$

als Unbekannte ein.

Auch die Uhrkorrektion ist zunächst mittels des abendlichen Uhrganges auf eine bestimmte Sternzeitepoche zu reduzieren. Bei der im Folgenden durchgeführten Ableitung der Formeln ist angenommen, daß der Uhrgang mit genügender Genauigkeit bekannt und an die Uhrzeiten U bereits angebracht worden sei.

Für die 5 Unbekannten wird man in der Regel gute Näherungswerte besitzen; man ersetzt dann dieselben durch die differentiellen Verbesserungen $d\alpha, d\delta;\ dz, d\varphi, du$ der Näherungswerte $\alpha_0, \delta_0;\ z_0, \varphi_0\ u_0$. Für die neuen Unbekannten wird die durch die Beobachtung gelieferte Beziehung linear; sie läßt sich aus jeder der beiden Grundgleichungen 1a) und 1b) ableiten.

a) Im ersteren Falle [1]) werden auf der rechten Seite von Gleichung 1a) die Näherungswerte und das beobachte U eingesetzt;

---

1) Entsprechend der in: Albrecht, Formeln u. Hilfstafeln zur geographischen Ortsbestimmung, 4. Aufl. Leipzig 1908 pg. 78 gegebenen Reduktionsmethode.

dieselbe liefert dann die Zenitdistanz ζ, in der die Beobachtung stattgefunden hätte, wenn die Näherungswerte richtig wären.

$$\cos\zeta = \sin\varphi_0 \sin\delta_0 + \cos\varphi_0 \cos\delta_0 \cos t_0 , \quad t_0 = U + u_0 - \alpha_0$$

Die Änderung $d\zeta$, die ζ wegen der Verbesserung der Näherungswerte erleidet, erhält man durch Differentiation von 1 a). Es muß dann $\zeta + d\zeta$ der wahren Zenitdistanz $z' = z_0 + dz + dr$ gleich sein.

$$z + dz + dr = \zeta - \frac{\partial z}{\partial t} d\alpha + \frac{\partial z}{\partial \delta} d\delta + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial z}{\partial t} du$$

oder

2) $$\underline{A d\alpha + D d\delta + dz - P d\varphi - A du = l}$$

wo
$$A = \frac{\partial z}{\partial t} = 15 \sin a \cos\varphi_0 = 15 \sin q \cos\delta_0$$

$$D = -\frac{\partial z}{\partial \delta} = \cos q$$

$$P = \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \cos a$$

[a = Azimut, q = parallaktischer Winkel für den Durchgang durch die Zenitdistanz z_0].

Dies ist die gesuchte lineare Beziehung zwischen den Verbesserungen der Unbekannten, und der Beobachtungswert l findet sich aus

3 a) $$l = \zeta - z_0 - dr$$

b) Zu derselben Gleichung 2) gelangt man, wenn von Gleichung 1 b) ausgegangen und aus ihr die den Näherungswerten entsprechende Sternzeit ϑ_0 abgeleitet wird.

$$\vartheta_0 = \alpha_0 + t_0, \ \operatorname{tg}\frac{t_0}{2} = \pm\sqrt{\frac{\sin(s_0 - \varphi_0)\sin(s_0 - \delta_0)}{\cos s_0 \cos(s_0 - z_0)}}, \quad s_0 = \frac{\varphi_0 + \delta_0 + z_0}{2}$$

Die wirkliche Sternzeit der Beobachtung $\vartheta_0 + d\vartheta$ muß gleich sein der sich aus Beobachtung und Uhrkorrektion ergebenden:

$$U + u_0 + du = \vartheta_0 + d\alpha + \frac{\partial t}{\partial \delta} d\delta + \frac{\partial t}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial t}{\partial z}(dz + dr)$$

Nach Multiplikation mit $A = \frac{\partial z}{\partial t}$ erhalten wir wiederum Gleichung 2), da

$$\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \delta} = -\frac{\partial z}{\partial \delta} = D \text{ und } \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \varphi} = -\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -P,$$

nur gewinnt man jetzt für l den Ausdruck

3b) $$l = A(U + u_0 - \vartheta_0) - dr$$

Beide Verfahren unterscheiden sich also nur in der Berechnungsweise der Größe l aus der beobachteten Uhrzeit und den Näherungswerten.

Für die Zenitdistanz des Instrumentes, die bei Spezialinstrumenten wie beim Prismenastrolab sehr nahe konstant ist, besitzt man stets einen guten Näherungswert; bei Beobachtungen auf einer festen Sternwarte ist dasselbe auch für die Polhöhe der Fall; nur für die Uhrkorrektion hat man den Näherungswert für jeden Abend neu zu bestimmen. Dies wird bei der Reduktionsmethode b) sehr erleichtert dadurch, daß u_0 in der trigonometrischen Formel 1b) nicht vorkommt und sich nachträglich aus den Differenzen $\vartheta_0 - U$ leicht ableiten läßt.

Bei der Anwendung der Höhendurchgangsbeobachtungen zur Zeit- und Breitenbestimmung auf Stationen muß eine der beiden Formeln 1a) oder 1b) für jeden einzelnen Stern mit siebenstelligen Logarithmen durchgerechnet werden, was einen ganz erheblichen Arbeitsaufwand erfordert. Gerade bei Beobachtungsreihen auf festen Sternwarten aber, wie sie hier ins Auge gefaßt werden, fällt dieser Übelstand weg, da sich die trigonometrische Rechnung dann durch eine geeignete Tafel umgehen läßt. Wenn für alle Durchgangsbeobachtungen nur eine einzige Zenitdistanz benützt wird (wie beim Prismenastrolab $Z = 30^0$), so enthält die Gleichung 1b) auf der rechten Seite nur eine einzige Variable δ; sie gestattet also, für die konstanten Werte φ_0 und z_0 durch eine Tafel t als Funktion von δ darzustellen. Aus einer solchen Tafel[1]), die nach δ in Intervallen von 10′ fortschreitet, kann man mit ersten und zweiten Differenzen t auf $0^s.001$ genau interpolieren; nur in der Nähe des Meridianes müssen die Intervalle etwas enger gewählt werden. Für konstante Polhöhe und Zenitdistanz sind auch die Koeffizienten A, D, P der Gleichung 2) nur von der Deklination abhängig und können in die Tafel mit aufgenommen werden. Bei Benützung der Tafel ist das Rechnungsverfahren b) dann sehr einfach. Man entnimmt mit der Deklination des Sternes aus derselben den Stundenwinkel t_0 und durch Addition oder Subtraktion von der Rektaszension liefert dieser die Sternzeit ϑ_0, die in Gleichung 3b) einzusetzen ist.

In die genannte Tafel hat man mit der scheinbaren De-

1) Für Göttingen ist eine solche Tafel gerechnet worden.

klination des Sterns einzugehen; wenn der Stern aber im gleichen Jahre öfters beobachtet wird, so genügt es in den meisten Fällen, ϑ_0 für den mittleren Sternort auszurechnen und die Reduktion auf den scheinbaren Ort $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ durch differentielle Korrekturen an dieses ϑ_{0m} anzubringen.

4) $$\vartheta_0 = \vartheta_{0m} + \Delta\alpha + \frac{D}{A}\Delta\delta$$

Die tägliche Aberration braucht bei der Berechnung des scheinbaren Ortes nicht berücksichtigt zu werden, denn setzen wir in die obige Formel ihre Werte ein:

für $\Delta\alpha$: $+0^s.021 \cos\varphi \cos(\vartheta - \alpha) \sec\delta$

für $\Delta\delta$: $+15 \times 0.021 \cos\varphi \sin(\vartheta - \alpha) \sin\delta$

und beachten die Bedeutung von $D = \cos q$ und $A = 15 \sin q \cos\delta$, so erhalten wir:

$$\Delta\vartheta = \frac{0^s.021 \cos\varphi}{\sin q \cos\delta}\left[\sin q \cos(\vartheta - \alpha) + \cos q \sin(\vartheta - \alpha) \sin\delta\right]$$

Der Ausdruck in der Klammer ist gleich $\sin a \cos z$; ferner ist $\sin q \cos\delta = \sin a \cos\varphi$ und die an ϑ_0 anzubringende Korrektion für die tägliche Aberration geht dadurch über in:

5) $$\Delta\vartheta = +0^s.021 \cos z$$

Sie ist also in derselben Zenitdistanz für alle Sterne konstant und kann direkt an die aus den Beobachtungen erhaltene Uhrkorrektion angebracht werden, die um diesen Betrag zu vergrößern ist.

Eine besondere Untersuchung verlangt die Frage, welche Gewichte den Beobachtungen in verschiedenen Azimuten erteilt werden sollen. Während die Sterne in der Nähe des ersten Vertikales sich in Höhe rasch bewegen, verläuft die Bewegung in der Nähe des Meridianes nahezu horizontal und besitzt nur eine geringe Vertikalkomponente. Dementsprechend werden auch die Durchgangszeiten verschieden genau beobachtet. Wenn man nicht von einer empirischen Bestimmung dieser Gewichte ausgehen will, so wird die plausibelste Annahme die sein, daß die Genauigkeit der Durchgangsbeobachtung der Bewegungsgeschwindigkeit des Sterns in Zenitdistanz proportional sei. D. h. der mittlere Fehler der Zenitdistanzbeobachtung, mit dem die Beobachtungsgröße l der Gleichung 2) behaftet ist, ist in allen Azimuten gleich, und man kann den Gleichungen 2) für alle Sterne dasselbe Gewicht 1 erteilen. Es sei hier schon vorweggenommen, daß in der Beobachtungsreihe mit dem Prismenastrolab sich diese

Annahme über die Beobachtungsgenauigkeit vollständig bestätigt hat. Allerdings ließ das Instrument nur eine geringe Vergrößerung (45fach) zu, und bei stärkerer Vergrößerung dürfte in der Nähe des Meridianes die Zenitdistanz etwas genauer beobachtet werden als in der Nähe des ersten Vertikales.

§ 2. Über die Bestimmung der Abendkonstanten und der Sterncoordinaten.

Das bisher auseinandergesetzte Reduktionsverfahren gestattet uns, als Resultat jeder Höhendurchgangsbeobachtung eine Gleichung 2) zwischen den gesuchten Unbekannten aufzustellen. Eine Beobachtungsserie liefert dann ein System solcher Gleichungen, auf dessen Auflösung nach den Unbekannten wir nun einzugehen haben.

Beim Problem der geographischen Ortsbestimmung werden im Allgemeinen die Verbesserungen der aus Jahrbüchern oder Sternkatalogen entnommenen Sternpositionen vernachlässigt, so daß die Gleichungen nur noch 3 Unbekannte enthalten:

6) $$dz - Pd\varphi - Adu = l$$

Aus dem Gleichungssystem jedes Beobachtungsabends werden die 3 Unbekannten durch Ausgleichung bestimmt. Claude und Driencourt[1]) schlagen dafür ein graphisches Verfahren vor, das aber bei einer großen Zahl von Beobachtungen kaum eine genügende Berücksichtigung aller Einzelwerte gestattet. Sicherer ist jedenfalls die strenge Auflösung der Gleichungen 6) nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Etwas anders verhält es sich mit der Aufgabe, bei fester Aufstellung des Instrumentes aus Höhendurchgangsbeobachtungen Verbesserungen der Sterncoordinaten zu gewinnen. Hier enthalten die Beobachtungsgleichungen alle 5 Unbekannten. Diese zerfallen in 3 Gruppen:

1) Zu jedem Stern gehören 2 unbekannte Coordinatenverbesserungen $d\alpha$, $d\delta$.

2) Für jeden Beobachtungsabend sind 2 Abendkonstanten du und dz zu bestimmen.

3) $d\varphi$ ist nach Anbringung der Polhöhenschwankung als absolute Konstante zu behandeln. Wenn die Polhöhe des Beobachtungsortes bereits mit genügender Genauigkeit bekannt ist, so kann diese Unbekannte wegfallen.

Es wird von der Konstruktion des Instrumentes abhängen und

1) S. Anmerkung 4) pg. 2.

zuerst einer sorgfältigen Prüfung zu unterziehen sein, ob auch die Instrumentalzenitdistanz Z als absolute Konstante betrachtet werden darf. Nun tritt aber bei der Bildung der wahren Zenitdistanz noch die Refraktion hinzu, und zur Elimination von Unsicherheiten in der Berechnung derselben ist es vorteilhafter dz für jeden Abend getrennt zu bestimmen.

Angenommen, die Gesamtheit der Beobachtungen verteile sich auf n Sterne und m Beobachtungsabende, dann kommen in dem System der Gleichungen 2): $2n$ Unbekannte der ersten Gruppe vor, $2m$ der zweiten und außerdem $d\varphi$. Eine vollständige Auflösung des Systems nach allen Unbekannten ist nicht möglich, da die Gleichungen nicht alle unabhängig sind und die Zahl der Unbekannten stets die der unabhängigen Gleichungen übersteigt. Man wird daher am besten in der Weise vorgehen, daß man die Unbekannten der ersten Gruppe von den übrigen trennt und letztere (die Abendkonstanten und die Polhöhe) ähnlich wie beim Problem der geographischen Ortsbestimmung durch Anschluß an ein System von Katalogpositionen der Sterne aufsucht. Ist z. B. ein bestimmtes Sternprogramm an mehreren Abenden vollständig durchbeobachtet worden, so vernachlässigt man zunächst die Coordinatenverbesserungen $d\alpha$ und $d\delta$ und hat dann für jeden Abend ein System von Gleichungen 6) durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate nach den 3 Unbekannten dz, $d\varphi$, du aufzulösen; die Polhöhenwerte der verschiedenen Abende können nach Anbringung der Polhöhenschwankung noch zu einem Mittel vereinigt werden. Da die Abendkonstanten von den benützten Werten der Sterncoordinaten abhängen, so vermag dieses Verfahren direkt nur die Aufgabe zu lösen, innerhalb einer bestimmten Gruppe von Sternen die relativen Positionsverbesserungen der einzelnen Sterne in Bezug auf das Ausgangssystem der Gruppe zu bestimmen.

Wie bereits gezeigt, lassen sich für die Unbekannten leicht sehr genaue Näherungswerte finden, so daß die gesuchten Verbesserungen nur noch einige Zehntel Bogensekunden betragen; es genügt dann, bei der Ausgleichung die Koeffizienten der Fehlergleichungen und deren Produkte mittels des Rechenschiebers auf 2 Stellen genau auszurechnen.

Die aus der Ausgleichung gefundenen Werte der Abendkonstanten dz, $d\varphi$, du setzt man in Gleichung 2) ein und schreitet zur Ableitung der Coordinatenverbesserungen. Die Beobachtungsgleichung nimmt dadurch die vereinfachte Form an

7) $$A d\alpha + D d\delta = \lambda \quad \text{wo } \lambda = l - dz + P d\varphi + A du.$$

Während jede Meridianbeobachtung direkt eine der beiden Sterncoordinaten bestimmt, gibt eine einzelne Höhendurchgangsbeobachtung nur eine Beziehung zwischen beiden Coordinaten an. Nun passiert jeder Stern bei seiner täglichen Bewegung den Höhenkreis zweimal, einmal im Osten und einmal im Westen. Während die Zahlenwerte der Koeffizienten A und D bei konstanter Zenitdistanz und Polhöhe für jeden Stern konstant sind, ist das Vorzeichen von A beim ersten Durchgange negativ, beim zweiten positiv und dasjenige von D bleibt das gleiche. Man kann also alle Beobachtungen des östlichen, sowie alle des westlichen Durchganges je zu einem Mittel λ_0 und λ_w vereinigen, denen die beiden Gleichungen entsprechen:

$$-A d\alpha + D d\delta = \lambda_0$$
$$+A d\alpha + D d\delta = \lambda_w$$

Wenn sich die Beobachtungen eines Sterns auf beide Durchgänge verteilen, so ist es möglich, die beiden Coordinaten $d\alpha$ und $d\delta$ getrennt zu bestimmen. Sie ergeben sich aus den Gleichungen:

8) $$d\alpha = \frac{\lambda_w - \lambda_0}{2A}, \qquad d\delta = \frac{\lambda_w + \lambda_0}{2D}$$

Die Genauigkeit der Rektaszensions- und Deklinationsbestimmung hängt von den Koeffizienten A und D ab.

Drückt man nun die Rektaszensionsverbesserung statt in Zeitmaß in Großkreisbogen aus, um sie mit der Deklinationsverbesserung vergleichbar zu machen:

$$d\alpha' = 15\, d\alpha \cos\delta$$

und führt den entsprechenden Faktor A' ein durch

$$A' d\alpha' = A d\alpha, \quad A' = \sin q.$$

Wenn einer einzelnen Beobachtung das Gewicht 1 erteilt wird und n_0 Beobachtungen des östlichen Durchganges und n_w des westlichen vorliegen, so sind die Gewichte der daraus abgeleiteten Rektaszensions- und Deklinationsverbesserungen resp.

9) $$G_{\alpha'} = 4\,\frac{n_0 \cdot n_w}{n_0 + n_w}\, A'^2$$
$$G_\delta = 4\,\frac{n_0 \cdot n_w}{n_0 + n_w}\, D^2$$

Dabei ist unter Berücksichtigung der Bedeutung von A' und D:

$$G_{\alpha'} + G_\delta = 4\,\frac{n_0 \cdot n_w}{n_0 + n_w}$$

Bei der Bestimmung von Rektaszensionen und Deklinationen aus Höhendurchgangsbeobachtungen in einer einzigen Zenitdistanz sind die Gewichte jeder der beiden Coordinaten bei gleicher Zahl der Beobachtungen noch abhängig von der Deklination des Sterns; aber so, daß die Summe der beiden Gewichte nur durch die Beobachtungszahlen der beiden Durchgänge bedingt wird.

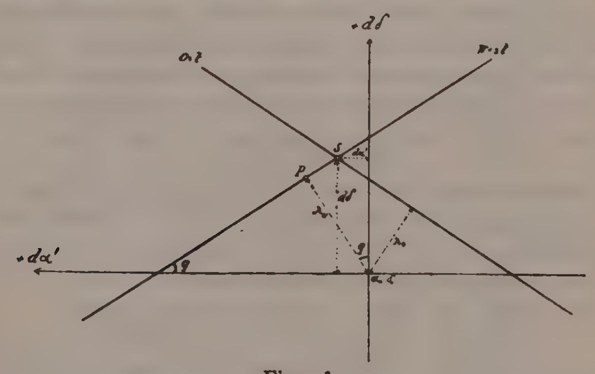
Wenn man sich jedoch nicht auf eine einzige Zenitdistanz beschränkt, sondern die Durchgänge sich auf mehrere Höhenkreise erstrecken, so varieren die Koeffizienten A' und D für denselben Stern. Jede Zenitdistanz liefert für die Coordinatenverbesserungen ein Gleichungspaar 7) mit verschiedenen Koeffizienten, und mit diesen ändern sich zum Teil auch die Einflüsse von Beobachtungs- und Instrumentalfehlern auf die einzelnen Coordinaten. Während man bei einer Zenitdistanz in gewissen Deklinationen nur für eine der beiden Coordinaten ein genügendes Gewicht erhält, um dem Beobachtungswert derselben eine wirkliche Bedeutung beizumessen, ergibt in der Regel dann eine der anderen Zenitdistanzen für die andere Coordinate ein größeres Gewicht, so daß aus den Durchgängen durch die verschiedenen Höhenkreise beide Coordinaten mit genügender Sicherheit hervorgehen. Immerhin wird man, um nicht der Vorteile verlustig zu gehen, welche gerade die konstante Zenitdistanz der Höhendurchgangsbeobachtungen bietet, sich auf ganz wenige geeignet gewählte Höhenkreise beschränken; z. B. die der 3 Zenitdistanzen 30°, 45°, 60°, für welche im folgenden Täfelchen die Koeffizienten A' und D für die Polhöhe 47° 30′ gegeben sind.

δ	$\pm A'$			D		
	$z = 30°$	$z = 45°$	$z = 60°$	$z = 30°$	$z = 45°$	$z = 60°$
− 10°			+ 0.27			+ 0.96
0			+ 0.52			+ 0.85
+ 10		+ 0.46	+ 0.64		+ 0.88	+ 0.76
+ 20	+ 0.36	+ 0.66	+ 0.72	+ 0.94	+ 0.74	+ 0.70
+ 30	+ 0.71	+ 0.78	+ 0.76	+ 0.70	+ 0.63	+ 0.65
+ 40	+ 0.88	+ 0.85	+ 0.78	+ 0.47	+ 0.52	+ 0.63
+ 50	+ 0.98	+ 0.90	+ 0.77	+ 0.23	+ 0.42	+ 0.64
+ 60	+ 1.00	+ 0.94	+ 0.71	− 0.06	+ 0.35	+ 0.70
+ 70	+ 0.89	+ 0.96	+ 0.40	− 0.45	+ 0.30	+ 0.91
+ 80		+ 0.94			+ 0.32	

Die Bedeutung der Koeffizienten A' und D läßt sich leicht geometrisch anschaulich machen. Eine einzelne Beobachtung eines Sterns legt dessen Ort auf der Kugel noch nicht fest, sondern bestimmt nur einen geometrischen Ort für denselben. Bei Höhendurchgangsbeobachtungen wird dieser geometrische Ort durch einen Kleinkreis mit dem momentanen Zenit als Mittelpunkt und der Zenitdistanz als sphärischem Radius gebildet. Betrachtet man nur den Teil des geometrischen Ortes, der in unmittelbarer Nähe des Sterns liegt, so kann er auf kurze Strecke als Gerade dargestellt werden. Die Gleichung dieser Geraden in dem die Kugel berührenden ebenen System rechtwinkliger Coordinaten $d\alpha' = d\alpha \cos \delta$, $d\delta$ mit dem Näherungswert des Sternortes als Ursprung ist dann durch Gleichung 7) gegeben. Diese geht nach Einsetzen der Werte der Koeffizienten über in

$$\sin q \, d\alpha' + \cos q \, d\delta = \lambda$$

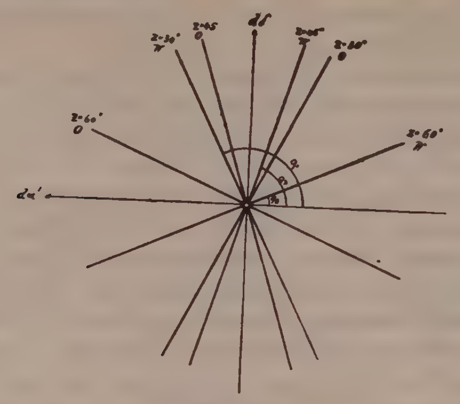
A' und D sind also nichts anderes als die Bestimmungsstücke des Winkels q zwischen der gesuchten Geraden und den Coordinatenachsen, und die Beobachtungsgröße λ stellt den Abstand der Geraden vom Näherungsort dar. Die Geraden der östlichen und der westlichen Durchgangsbeobachtung sind in Bezug auf die δ Achse symmetrisch und ihr Schnittpunkt liefert den beobachteten Sternort S (Fig. 1).



Figur 1.

Wenn Beobachtungen beider Durchgänge in verschiedenen Zenitdistanzen vorliegen, so erhält man eine ganze Reihe von Geraden, die sich in verschiedenen Richtungen schneiden und bei fehlerfreien Beobachtungen durch denselben Punkt gehen. In Fig. 2 sind als Beispiel die Richtungen der Bestimmungsgeraden

der Zenitdistanzen 30°, 45°, 60° für die Deklination 70° und die Polhöhe 47° 30′ gezeichnet.



Figur 2.

Sind für einen Stern nur Beobachtungen eines **einseitigen Höhendurchganges** erhalten worden, so liefern dieselben in ihrem Mittel nur eine einzige Gleichung 7) oder geometrisch gesprochen nur eine einzige Bestimmungsgrade und gestatten direkt weder die Ableitung eines verbesserten Sternortes noch die einer einzelnen Coordinate. Der Beobachtung würde jeder Punkt der Bestimmungsgeraden genügen. Wenn man von einem guten Näherungswert des Sternortes ausgeht, so wird man als verbesserten Ort am ehesten den Punkt P der Geraden wählen, für den der **Abstand vom Näherungsort ein Minimum** wird. Durch Heranziehung dieser Minimumsbedingung:

$$d\alpha'^2 + d\delta^2 = \text{Min}$$

zu der Beobachtsungsgleichung $A'd\alpha' + Dd\delta = \lambda$, werden $d\alpha'$ und $d\delta$ dann eindeutig bestimmt. Aus der Fig. 1 (Gerade des westlichen Durchganges), in der sie die Coordinaten des Punktes P darstellen, ersieht man ihre Werte sofort:

$$10)\qquad \begin{aligned} d\alpha' &= \lambda \sin q\,, \quad d\alpha = \tfrac{1}{15}\,\lambda \sin q \sec \delta \\ d\delta &= \lambda \cos q \end{aligned}$$

Auf diesem Wege ist es möglich, auch einen einseitigen Höhendurchgang zur Verbesserung des angenommenen Sternortes auszuwerten. Daß der so bestimmte Punkt P im Sinne der Beobachtung wirklich eine Verbesserung bedeutet, läßt sich leicht erkennen; denn da der wahre Ort des Sterns auf der Geraden liegt, ist dieser dem verbesserten Ort stets näher als dem Ausgangsort.

§ 3. Das Beobachtungsinstrument.

Die im Folgenden mitgeteilte Beobachtungsreihe ist im Winter 1910/11 auf der kgl. Sternwarte in Göttingen ausgeführt worden. Sie sollte einen Anhaltspunkt dafür liefern, in wie weit sich das Prismenastrolab von Claude und Driencourt zur Anwendung auf die im Vorigen entwickelte Methode eignet. Das Prismenastrolab, das mir von Prof. Ambronn zur Verfügung gestellt wurde, ist von Sartorius in Göttingen [1]) gebaut und entspricht in den Hauptteilen dem von Claude und Driencourt [2]) beschriebenen Typus Jobin. Das Fernrohr des Instrumentes von 50 cm Brennweite und 4.7 cm Objektivöffnung gestattet bei Gesichtsfeldbeleuchtung die Beobachtung von Sternen bis zur Größe 5.5; die benützte Okularvergrößerung war eine 45 fache. Der Quecksilberhorizont von 10 cm Durchmesser besteht aus einer amalgamierten Kupferschale, dessen schwach vertiefter Boden mit einer ziemlich dünnen Quecksilberschicht überzogen wurde. Zum Schutz gegen Wind und Feuchtigkeitsniederschlag wurden Horizont und Prisma mit einem Gehäuse aus Pappe umgeben, das nur Öffnungen für die eintretenden Strahlen frei läßt. Ruhe und Schärfe der reflektierten Bilder waren sehr befriedigend, so daß diese bei der Beobachtung sich von den direkten Bildern in keiner Weise unterschieden. Versuchsweise wurde ferner das von Claude und Driencourt eingeführte gleichseitige Glasprisma mit totaler innerer Reflexion ersetzt durch zwei um 60^0 gegen einander geneigte Spiegel. Als Spiegelträger diente das ursprüngliche Glasprisma, dessen beide reflektierenden Flächen versilbert worden waren, indem es so vor dem Objektiv angebracht wurde, daß die Prismenkante dem Objektiv zugekehrt war. Der Strahlengang ist in Fig. 3 veranschaulicht. Die Zenitdistanz der Beobachtung ist durch

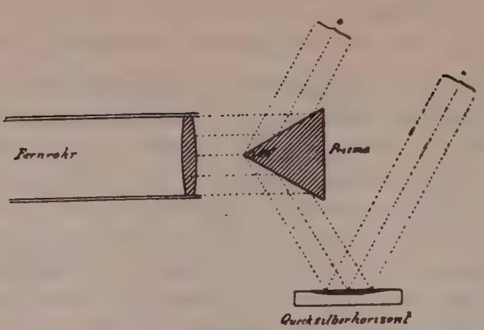
$$Z = 90 - P$$

gegeben, wo P den Prismenwinkel bedeutet, der sehr nahe 60^0 betrug. Die Helligkeit der Sternbilder erlitt bei dieser Änderung des Instrumentes keine merkliche Einbuße. Während das total reflektierende Prisma nur Beobachtungen in der Zenitdistanz 30^0 zuläßt, können Prismen mit äußerer Reflexion bei Änderung des Prismenwinkels P auch für andere Zenitdistanzen hergestellt werden.

---

1) Beschreibung in Preisliste A 22 der Firma Sartorius, Göttingen, Ausgabe 1910, pg. 44 a.

2) A. a. O. pg. 40—52.



Figur 3.

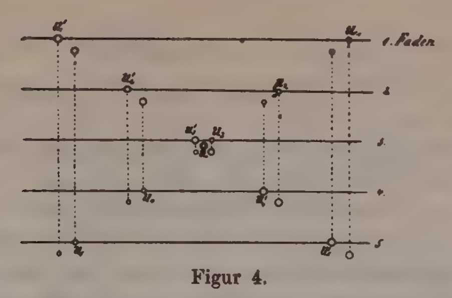
§ 4. Das Beobachtungsverfahren.

Die Methode von Claude und Driencourt, die mit dem Prismenastrolab nur den Moment des Zusammentreffens des direkten und des im Quecksilberhorizont reflektierten Bildes beobachten, liefert für die einzelne Beobachtung eine zu geringe Genauigkeit, um sie zur Messung von Fixsternpositionen verwenden zu können. Ich versuchte nun die Genauigkeit dadurch zu erhöhen, daß ich außer dem Moment des Zusammentreffens auch Durchgänge beider Bilder durch ein Netz horizontaler Fäden zur Beobachtung heranzog. Das Fadennetz bestand aus einem vertikalen Mittelfaden und 5 horizontalen Fäden in gleichen Abständen. Zur Gesichtsfeldbeleuchtung diente eine kleine seitlich angebrachte Öllampe.

Für Beobachtung von Fadendurchgängen muß das Fernrohr so eingestellt werden, daß die Begegnung der beiden Bilder, die sich im Gesichtsfeld in umgekehrter Richtung bewegen, etwas unterhalb oder oberhalb des Mittelfadens stattfindet. Die Durchgänge des reflektierten und des direkten Bildes durch symmetrisch zur Mitte liegende Fäden erfolgen dann nicht gleichzeitig, sondern wenige Sekunden nach einander. Bezeichnen wir die Durchgangszeiten des direkten Bildes durch die Fäden 1 ... 5 mit $U_1 \ldots U_5$, die entsprechenden des reflektierten Bildes mit $U'_1 \ldots U'_5$ und den Moment der Begegnung beider Bilder mit U_0, so ist die Reihenfolge der Fadendurchgänge bei einem westlichen Durchgange beispielsweise die folgende:

$$U_1, U'_5; \quad U_2, U'_4; \quad U_3, U_0, U'_3; \quad U_4, U'_2; \quad U_5, U'_1.$$

In Figur 4 ist die Lage der beiden Bilder für jeden dieser Momente dargestellt. Die nur durch ein Komma getrennten Zeiten folgen in einem Intervall von wenigen Sekunden auf einander.



Figur 4.

In den durch ein Semikolon angedeuteten längeren Pausen wurde das Instrument in Azimut nachgeführt, so daß die Durchgänge stets in der Nähe des vertikalen Mittelfadens stattfanden. Die Fadenschiefe war bei Beginn der Beobachtungen so gut berichtigt worden, daß es wegen der geringen Abweichungen der Durchgangsstellen vom Mittelfaden nicht nötig war, eine Korrektur für dieselbe anzubringen. Die Registrierung der Fadendurchgänge erfolgte mittels Taster auf einem Fueßschen Spitzenchronographen. Die Registrieruhr, eine Halbsekundenpendeluhr von Hawelk, wurde bei jeder Sternbeobachtung mit dem Chronometer Bröcking 1101 verglichen, das als eigentlicher Zeitmesser diente.

§ 5. Das Beobachtungsprogramm.

Das Beobachtungsprogramm bestand aus einer Serie von 65 Sternen; durch nachträgliche Vertauschung einiger Sterne wuchs dann deren Zahl auf 72. Mittels einer Tafel waren für diese angenähert Stundenwinkel, Sternzeit und Azimut des Durchganges durch die Zenitdistanz 30° für die Polhöhe von Göttingen vorausberechnet worden, wie sie zur Einstellung des Instrumentes gebraucht wurden. Die Sterne sind so ausgewählt, daß sich die Beobachtungen gleichmäßig auf die 4 Azimutquadranten verteilen, wodurch eine möglichst große Unabhängigkeit in der Bestimmung von Polhöhe, Uhrkorrektion und Zenitdistanz erzielt wird. Ohne die Dauer des Programms allzusehr auszudehnen, konnten nur für 2 Sterne: η Tauri [No. 39, 70] und 27 Tauri [No. 40, 71] die beiden Durchgänge darin aufgenommen werden. An 3 Abenden gelang die Durchbeobachtung des größten Teiles des Programmes, an 2 Abenden wurde wegen wechselnder Bewölkung nur je eine Hälfte erhalten; auf die überwiegende Mehrzahl der Sterne entfallen demnach 4 Beobachtungen. Die Gesamtzahl der beobachteten Durchgänge beträgt 255.

§ 6. Die Reduktion der Beobachtungen.

Der erste Schritt der Reduktionsarbeit besteht darin, **aus den beobachteten Fadenantritten den Moment des Höhendurchganges abzuleiten.** Wie aus Fig. 4 ersichtlich ist, gibt z. B. das Mittel der Zeiten U_1 und U'_5 den Moment an, in dem der Abstand der beiden Bilder gleich ist der Entfernung des 1. und 5. Fadens. Die zu dieser Lage der Bilder gehörige scheinbare Zenitdistanz ist dann um die halbe Distanz der beiden Fäden größer oder kleiner als die dem Zusammenfallen der beiden Bilder entsprechende, auf welche sich der Höhendurchgang beziehen soll. Über die Stabilität des Instrumentes wird dabei nur die Voraussetzung gemacht, daß dieses in der wenige Sekunden betragenden Zwischenzeit zwischen U_1 und U'_5 unverändert bleibe. Wenn wir in analoger Weise für alle Paare zusammengehöriger Fadenantritte die Mittel bilden, so entsprechen diesen bei einem westlichen Durchgange die Zenitdistanzen:

Zeit:	Zenitdistanz:
$\frac{U_1 + U'_5}{2}$	$Z - f_{1,5}$
$\frac{U_2 + U'_4}{2}$	$Z - f_{2,4}$
$\frac{U_3 + U'_3}{2}$	Z
U_0	Z
$\frac{U_4 + U'_2}{2}$	$Z + f_{2,4}$
$\frac{U_5 + U'_1}{2}$	$Z + f_{1,5}$

$f_{1,5}$ resp. $f_{2,4}$ bedeutet die halbe Distanz zwischen dem 1. und 5. resp. dem 2. und 4. Faden. Beim östlichen Durchgange ist nur die Reihenfolge der Fadenantritte umgekehrt. Diese 6 Zeiten sind zunächst alle auf die Zenitdistanz Z zu reduzieren und dann zu einem Mittel zu vereinigen.

Zur Bestimmung der anzubringenden Fadenreduktionen haben wir aus Gleichung 1a) die Korrektion ΔU der Beobachtungszeit zu suchen, welche der Änderung der Zenitdistanz um ΔZ entspricht. Wir entwickeln zu diesem Zwecke ΔU nach Potenzen von ΔZ

$$\Delta U = \Delta t = \frac{dt}{dz}\Delta Z + \frac{d^2 t}{dz^2}\frac{\Delta Z^2}{2} + \frac{d^3 t}{dz^3}\frac{\Delta Z^3}{6} + \cdots$$

$$\frac{dt}{dz} = t' = \frac{1}{\cos\varphi \sin a}$$

$$\frac{d^2 t}{dz^2} = t'' = -t'(t' \operatorname{cotg} t - \operatorname{cotg} z)$$

$$\frac{d^3 t}{dz^3} = t''' = +t''(2t' \operatorname{cotg} t - \operatorname{cotg} z) + t'\left(\frac{1}{\sin^2 t} t'^2 - \frac{1}{\sin^2 z}\right)$$
$$= +t'(t'^2 - 1) - 3t'.t'' \operatorname{cotg} t.$$

Setzen wir für $\varDelta Z$ die Fadendistanz f ein und drücken $\varDelta U$ und f in Zeitsekunden aus, so gewinnt das Resultat folgende Form:

$$\varDelta U = C_1 f - C_2 f^2 + C_3 f^3 \pm \cdots$$

$$C_1 = \frac{1}{\cos\varphi \sin a}$$

$$C_2 = \frac{15 \sin 1''}{2} C_1 (C_1 \operatorname{cotg} t - \operatorname{cotg} z)$$

$$C_3 = \frac{(15 \sin 1'')^2}{6} C_1 (C_1^2 - 1) + 15 \sin 1'' C_1 C_2 \operatorname{cotg} t.$$

Für kleine Azimute und Stundenwinkel konvergiert die Reihe schlecht. Bei den benützten Fadendistanzen verbürgten indessen diese 3 ersten Glieder für alle Azimute, die größer als 15° sind, eine Genauigkeit von ± 0."01. Für die Glieder 2. und 3. Grades, die ebenfalls nur in kleinen Azimuten merkliche Beträge annahmen, wurden für die beiden Fadendistanzen $f_{1,5}$ und $f_{2,4}$ Täfelchen berechnet, aus denen diese mit dem Argument der Deklination zu entnehmen waren. Die Reduktion der Beobachtungszeiten wird durch folgendes Schema dargestellt, wobei das Glied 3. Grades, das stets dasselbe Vorzeichen wie das lineare Glied besitzt und nur in ganz wenigen Fällen berücksichtigt zu werden brauchte, weggelassen ist.

Westlicher Durchgang	Östlicher Durchgang
$\frac{U_1 + U_5'}{2} + C_1 f_{1,5} + C_2 f_{1,5}^2$	$\frac{U_5 + U_1'}{2} + C_1 f_{1,5} - C_2 f_{1,5}^2$
$\frac{U_2 + U_4'}{2} + C_1 f_{2,4} + C_2 f_{2,4}^2$	$\frac{U_4 + U_2'}{2} + C_1 f_{2,4} - C_2 f_{2,4}^2$
$\frac{U_3 + U_3'}{2}$	$\frac{U_3 + U_3'}{2}$
U_0	U_0
$\frac{U_4 + U_2'}{2} - C_1 f_{2,4} + C_2 f_{2,4}^2$	$\frac{U_2 + U_4'}{2} - C_1 f_{2,4} - C_2 f_{2,4}^2$
$\frac{U_5 + U_1'}{2} - C_1 f_{1,5} + C_2 f_{1,5}^2$	$\frac{U_1 + U_5'}{2} - C_1 f_{1,5} - C_2 f_{1,5}^2$

[Azimut und Stundenwinkel sind bei der Bildung von C_1 und C_2 stets positiv gerechnet].

Man könnte die Rechnung noch vereinfachen dadurch, daß man das Mittel der ersten und letzten sowie das der zweiten und vierten Beobachtung bildet, aus dem je das Glied erster Ordnung herausfällt. Zur Kontrolle der einzelnen Fadendurchgänge und im Interesse der sicheren Ableitung ihrer Genauigkeit wurde indes die Reduktion der Einzelwerte vorgezogen. Das Mittel dieser 6 reduzierten Werte liefert die Uhrzeit U des Höhendurchganges.

Die Fadendistanzen erhält man aus den Beobachtungen selbst durch Subtraktion der entsprechenden Durchgangszeiten:

$$f_{1,5} = \frac{1}{2C_1}\left[\frac{U_5 + U'_1}{2} - \frac{U_1 + U'_5}{2}\right]$$
$$f_{2,4} = \frac{1}{2C_1}\left[\frac{U_4 + U'_2}{2} - \frac{U_2 + U'_4}{2}\right].$$

Die benützten Werte der Fadendistanzen:

$$f_{1,5} = 22^s.195$$
$$f_{2,4} = 11.378$$

sind aus einem Teil des Beobachtungsmateriales abgeleitet. Ein kleiner Fehler derselben hat übrigens bei vollständigen Beobachtungen auf das Mittel U keinen Einfluß. Eigentlich müßte man bei der Reduktion der Fadendurchgänge auch eine Korrektur für die Änderung der Refraktion anbringen, die der Änderung der Zenitdistanz um f entspricht. Wenn die Fadendistanzen aber aus den Beobachtungen selbst abgeleitet sind, so enthalten sie den Einfluß der Refraktion bereits, der zur Folge hat, daß die resultierenden Werte etwas zu groß sind.

Aus den Abweichungen der 6 reduzierten Durchgangszeiten von ihrem Mittel U wurde für jeden Stern der mittlere Fehler μ eines Fadenantrittes berechnet. Diese mittleren Fehler sind zunächst in erster Linie von der Bewegungsgeschwindigkeit des Sterns in Zenitdistanz abhängig, sie wurden daher durch Multiplikation mit $15\frac{dz}{dt} = 15 \sin a \cos \varphi$ auf die Zenitdistanz übertragen und dann für Azimutintervalle von 20° in Mittel zusammengefaßt.

(S. Tabelle auf folgender Seite.)

Die mittleren Fehler verraten nur ganz schwach die zu erwartende Tendenz zu einer etwas größeren Genauigkeit in der Nähe des Meridianes, wo die Sterne sich in Zenitdistanz am langsamsten

Mittlerer Fehler eines Fadenantrittes.

Azimut	M. F. der Beobachtungszeit	M. F. der Zenitdistanz	Zahl der Beob.
20— 40	$\pm 0^s.092 \frac{1}{\cos\varphi \sin a}$	$\pm 1''.38$	40
40— 60	± 0.107	± 1.60	40
60— 80	± 0.103	± 1.54	30
80—100	± 0.096	± 1.44	37
100—120	± 0.098	± 1.47	29
120—140	± 0.092	± 1.37	48
140—170	± 0.079	± 1.18	29
Mittel	$\pm 0^s.096 \frac{1}{\cos\varphi \sin a}$	$\pm 1''.44$	253

bewegen. Jedenfalls sind die Unterschiede so klein, daß sie wie schon eingangs erwähnt keine Berücksichtigung durch verschiedene Gewichtsverteilung für die Gleichungen 2) erfordern. Aus dem mittleren Fadenantrittsfehler ergibt sich bei einer vollständigen Beobachtung für das Mittel U der beobachteten Antritte ein m. F. von $\pm 0^s.029 \frac{1}{\sin a \cos\varphi}$ oder $\pm 0''.44$ in Zenitdistanz.

Zum Vergleich sei auch aus der von Albrecht [1]) bei Meridianbeobachtungen gefundenen Formel für den mittleren Fehler eines Fadenantrittes bei der Tasterregistriermethode:

$$\mu = \pm \sqrt{0.07^2 + \left(\frac{4.7}{v}\right)^2 \sec^2\delta}$$

der m. F. eines Höhendurchganges abgeleitet. Man hat darin für den reziproken Wert der Bewegungsgeschwindigkeit des Sterns gegenüber dem Fadennetz statt $\sec\delta$: $\frac{1}{\sin a \cos\varphi}$ und für die Vergrößerung v den Wert 45 einzusetzen und erhält als Extremwerte

$$a = 0 \qquad \mu = \pm 0^s.104 \frac{1}{\sin a \cos\varphi} \text{ resp. } \pm 1''.56$$

$$a = 90 \qquad \pm 0.113 \qquad \pm 1.69.$$

Diese stimmen sehr nahe mit dem aus den Beobachtungen gewonnenen Wert überein.

Als Näherungswerte für die Rektaszensionen und Deklinationen α_0, δ_0 aller Programmsterne wurden die Positionen des General-

1) Formeln und Hilfstafeln, pg. 21.

kataloges von Boß[1]) [P. G. C.] nach Übertragung auf Äquinoktium und Epoche 1910.0 benützt; sie sind nebst Nummer und Helligkeitsangabe des Kataloges in Tafel 1 enthalten. Die Berechnung der Beobachtungsgröße l von Gleichung 2) aus den Durchgangszeiten U erfolgte nach dem in § 1 angegebenen Verfahren, dessen einzelne Schritte nochmals kurz zusammengestellt und dann durch ein Beispiel illustriert seien.

1. Aus einer für die Näherungswerte der Polhöhe von Göttingen $\varphi_0 = 51^0 31' 48''.0$ und der wahren Zenitdistanz $z_0 = 30^0 0' 48''.17$ berechneten genauen Tafel der Stundenwinkel, wird mit der mittleren Deklination δ_{om} : t_{om} entnommen. Dieselbe Tafel enthält auch die Koeffizienten P und A der Gleichung 2), aus der diese für jeden Stern interpoliert werden.

2. Die Sternzeit des Höhendurchganges für den mittleren Sternort folgt aus:

$$\vartheta_{om} = \alpha_{om} \pm t_{om} \begin{cases} \mathrm{W} \\ \mathrm{O} \end{cases}$$

3. Zur Berechnung des scheinbaren Ortes für jeden Beobachtungsabend dienten die Eigenbewegungen des Boßschen Kataloges und die Tageskonstanten f, g, h, i, G, H des Berliner Jahrbuches unter Berücksichtigung der kurz periodischen Glieder mittels f', g', G'. Diese Reduktion wurde direkt an die Sternzeit ϑ_{om} angebracht nach Formel 4).

4. Aus den Differenzen der beobachteten und berechneten Durchgangszeiten (U und ϑ_0) wird ein Näherungswert für die Uhrkorrektion u_0 und den stündlichen Uhrgang Γ_0 abgeleitet. Dann ist

$$l' = A[U + u_0 + \Gamma_0(\vartheta - 2^h) - \vartheta_0].$$

5. Anbringung einer Verbesserung Δz der angenäherten Zenitdistanz z_0 und der Refraktionskorrektion dr für Luftdruck und Temperatur

$$l = l' - \Delta z - dr.$$

Zur Berechnung von dr wurden kleine Tafeln mit der Temperatur und dem Luftdruck als Argumenten benützt, die unter Zugrundlegung der Konstanten von Albrechts Formeln und Hilfstafeln konstruiert worden waren.

Der Barometerstand war je bei Beginn und Ende einer Beobachtungsserie abgelesen und für die Zwischenzeit linear inter-

---

1) L. Boß, Preliminary General Catalogue of 6188 stars for the Epoch 1900. Washington 1910.

poliert worden. Die Lufttemperaturablesungen mit einem Schleuderthermometer erfolgten während der Beobachtungen in Intervallen von etwa ½ Stunde und wurden durch eine Kurve ausgeglichen.

Beispiel der Reduktion.

1910 XII 5 No. 12 β Pegasi W

				$C_1 f$	$C_2 f^2$	U	v	v^2
U_1:	$0^h 28^m 56^s.38$	$\frac{U_1 + U_5'}{2}$:	$0^h 28^m 58^s.98$	$+49^s.29$	$+0^s.13$	$0^h 29^m 48^s.40$	$-0^s.01$	0.0001
U_5':	29 1.58							
U_2:	20.47	$\frac{U_2 + U_4'}{2}$:	29 23.00	+25.27	+0.03	.30	−0.11	121
U_4':	25.52							
U_3:	45.79	$\frac{U_3 + U_3'}{2}$:	48.30			.30	−0.11	121
U_0:	48.46	U_0 :	48.46			.46	+0.05	25
U_3':	50.82							
U_4:	30 11.27	$\frac{U_4 + U_2'}{2}$:	30 13.72	−25.27	+0.03	.48	+0.07	49
U_2':	16.18							
U_5:	34.61	$\frac{U_5 + U_1'}{2}$:	37.67	−49.29	+0.13	.51	+0.10	100
U_1':	40.73							

Mittel $U = 0^h 29^m 48^s.41$ $[v^2] = 0.0417$

1) $\delta_{om} = 27^\circ 35' 39''.49$

$t_{om} = 1^h 36^m 26^s.117$ $\frac{D}{A} = 0.1276$

2) $\alpha_{om} = 22^h 59^m 24^s.573$

$\vartheta_{om} = 0^h 35^m 50^s.690$

3) $\Delta\alpha = +1.757$ $\Delta\delta = +23''.03$

$\frac{D}{A} \Delta\delta = +2.938$

$\vartheta_0 = 0^h 35^m 55^s.38$

4) $u_0 = +6^m 6^s.80$ $\Gamma_0 = +0^s.10$

$\Gamma_0 (\vartheta - 2^h) = - \; 0.14$

$U + u_0 + \Gamma(\vartheta - 2^h) - \vartheta_0 = - \; 0^s.31$

$l' = - \; 2''.09$

5) $\Delta z = - \; 2''.50$

$dr = + \; 0.42$

$l = - \; 0''.01$

m. F. eines einzelnen U: $\pm \sqrt{\frac{[v^2]}{5}} = \pm 0^s.091$

m. F. eines Fadenantrittes: $\pm 0^s.091 \sqrt{2} = \pm 0^s.129$

$= \pm 0^s.058 \frac{1}{\sin a \cos \varphi} = \pm 0''.87.$

Tafel 1.

Progr.-No.	Boß P. G. C. Nr.	Stern	Größe	Durch-gang	Sternort n. Boß P. G. C. f. 1910.0 α	δ	Beobachtung $A'\,d\alpha' + D\,d\delta = \lambda'$			Zahl der Beobacht.	Beob. Coordinatenverb. dα	Gew.	dδ	Gew.
6	5344	6 Cephei	4m.6	W	20h 43m 7s.111	57° 15′ 23″.23	+ 0.98 dα′	+ 0.20 dδ	= + 0″.03	3	+ 0s.004	2.9	+ 0″.01	0.1
2	5431	ξ Cygni	3.9	W	21 1 39.386	43 34 5.97	+ 0.86	+ 0.51	+ 0.22	2	+ 0.019	1.5	+ 0.11	0.5
14	5480	α Cephei	2.4	W	16 25.948	62 12 14.45	+ 1.00	+ 0.07	— 0.53	4	— 0.076	4.0	— 0.04	0.0
16	5532	β Cephei	3.3 :	W	27 30.202	70 9 55.75	+ 0.98	— 0.19	— 0.65	4	— 0.126	3.9	+ 0.12	0.1
19	5594	11 Cephei	4.9	W	40 36.419	70 53 48.71	+ 0.98	— 0.22	— 0.58	4	— 0.116	3.8	+ 0.13	0.2
15	5609	π² Cygni	4.4	W	43 28.001	48 53 33.82	+ 0.92	+ 0.40	— 0.33	4	— 0.030	3.4	— 0.13	0.6
25	5714	ζ Cephei	3.6	W	22 7 43.793	57 45 26.42	+ 0.98	+ 0.19	— 0.16	4	— 0.020	3.9	— 0.03	0.1
13	5746	1 Lacertae	4.3	W	12 2.730	37 18 0.28	+ 0.76	+ 0.65	+ 0.45	4	+ 0.028	2.3	+ 0.29	1.7
29	5807	δ Cephei	var.[2])	W	25 49.593	57 57 15.41	+ 0.98	+ 0.18	— 0.21	4	— 0.026	3.9	— 0.04	0.1
21	5810	6 Lacertae	4.5	W	26 36.023	42 39 42.31	+ 0.85	+ 0.53	+ 0.37	4	+ 0.028	2.9	+ 0.20	1.1
28	5837	9 Lacertae	4.8	W	33 40.399	51 4 48.71	+ 0.94	+ 0.35	— 0.36	4	— 0.032	3.5	— 0.13	0.5
11	5865	η Pegasi	3.0	W	38 46.886	29 45 0.58	+ 0.58	+ 0.81	+ 0.48	4	+ 0.021	1.4	+ 0.39	2.6
12	5940	β Pegasi	var.[3])	W	59 24.573	27 35 39.49	+ 0.51	+ 0.86	+ 0.18	4	+ 0.007	1.0	+ 0.15	3.0
33	5966	π Cephei	4.6	W	23 5 1.927	74 54 3.00	+ 0.91	— 0.41	— 0.56	5	— 0.130	4.2	+ 0.23	0.8
5	6005	τ Pegasi	4.6	W	16 10.846	23 14 50.82	+ 0.28	+ 0.96	— 0.47	1	— 0.009	0.1	— 0.45	0.9
4	6024	υ Pegasi	4.6	W	20 53.132	22 54 30.12	+ 0.25	+ 0.97	+ 0.57	3	+ 0.010	0.2	+ 0.55	2.8
37	6071	λ Androm.	3.8	W	33 9.279	45 58 13.63	+ 0.89	+ 0.46	+ 1.11	4	+ 0.095	3.2	+ 0.51	0.8
35	6078	γ Cephei	3.4	W	35 38.740	77 7 48.19	+ 0.83	— 0.55	— 0.77	4	— 0.191	2.8	+ 0.42	1.2
27	10	α Androm.	2.0	W	0 3 43.972	28 35 36.69	+ 0.54	+ 0.84	— 0.03	4	— 0.001	1.2	— 0.02	2.8
52	12	β Cassiop.	2.2	W	4 22.097	58 39 12.07	+ 0.99	+ 0.17	+ 0.09	4	+ 0.012	3.9	+ 0.02	0.1
41	43	ϑ Androm.	4.5	W	12 23.171	38 10 54.87	+ 0.78	+ 0.63	— 0.35	2	— 0.023	1.2	— 0.22	0.8
56	103	κ Cassiop.	4.2	W	27 52.544	62 26 6.70	+ 1.00	+ 0.07	+ 0.35	1	+ 0.050	1.0	+ 0.02	0.0
34	130	ε Androm.	4.5	W	33 47.781	28 49 23.44	+ 0.55	+ 0.83	+ 0.19	5	+ 0.008	1.5	+ 0.16	3.5
36	132	δ Androm.	3.4	W	34 30.723	30 22 6.91	+ 0.60	+ 0.80	— 0.30	4	— 0.014	1.4	— 0.24	2.6
26	164	ζ Androm.	4.2	W	42 33.914	23 46 39.61	+ 0.32	+ 0.95	— 0.33	4	— 0.008	0.4	— 0.31	3.6
60	168	η Cassiop.[1]).	3.6	W	43 39.053	57 20 18.30	+ 0.98	+ 0.20	+ 0.36	3	+ 0.043	2.9	+ 0.07	0.1
51	175	ν Androm.	4.6	W	44 50.737	40 35 19.85	+ 0.82	+ 0.58	+ 0.21	4	+ 0.015	2.7	+ 0.12	1.3
62	193	υ¹ Cassiop.	5.1	W	49 39.080	58 29 8.27	+ 0.98	+ 0.17	— 0.08	2	— 0.010	1.9	— 0.01	0.1
64	200	υ² Cassiop.	4.9	W	51 17.761	58 41 41.86	+ 0.99	+ 0.17	+ 0.18	2	+ 0.023	1.9	+ 0.03	0.1
59	257	φ Androm.	4.2	W	1 4 16.364	46 45 43.60	+ 0.90	+ 0.44	+ 0.36	3	+ 0.031	2.4	+ 0.16	0.6
50	259	β Androm.	2.1	W	4 41.330	35 8 36.85	+ 0.72	+ 0.69	+ 0.37	4	+ 0.022	2.1	+ 0.26	1.9
67	264	ϑ Cassiop.	4.5	W	5 36.879	54 40 17.02	+ 0.96	+ 0.26	+ 0.40	3	+ 0.044	2.8	+ 0.10	0.2
44	271	τ Piscium	4.6	W	6 41.991	29 36 43.14	+ 0.58	+ 0.82	+ 0.44	4	+ 0.019	1.3	+ 0.36	2.7

3	421	α Triang.	3.4	O		47	56.845	29	8	26.50	— 0.56	+ 0.83	— 0.23	4	+ 0.010	1.2	— 0.19	2.8
20	477	α Arietis	2.0	O	2	2	5.796	23	2	13.95	— 0.26	+ 0.97	— 0.02	4	+ 0.001	0.3	— 0.02	3.7
65	517	γ Triang.	4.1	W		11	57.554	33	25	52.75	+ 0.68	+ 0.73	+ 0.54	3	+ 0.030	1.4	+ 0.39	1.6
18	620	35 Arietis	4.7	O		38	9.987	27	19	28.44	— 0.50	+ 0.87	— 0.57	4	+ 0.021	1.0	— 0.50	3.0
61	643	41 c Arietis	3.5	W		44	40.958	26	53	24.06	+ 0.48	+ 0.88	— 0.37	1	— 0.014	0.2	— 0.32	0.8
10	646	17 Persei	4.8	O		45	57.897	34	41	23.36	— 0.71	+ 0.70	+ 0.56	4	— 0.032	2.0	+ 0.39	2.0
1	781	2 Camelop.	4.4	O	3	21	46.295	59	37	38.76	— 0.99	+ 0.14	+ 0.94	1	— 0.123	1.0	+ 0.13	0.0
8	795	σ Persei	4.7	O		24	13.394	47	41	6.60	— 0.91	+ 0.42	— 0.64	4	+ 0.058	3.3	— 0.27	0.7
9	817	ψ Persei	4.4	O		30	5.325	47	53	38.35	— 0.90	+ 0.42	— 0.37	4	+ 0.033	3.3	— 0.16	0.7
24	844	o Persei	3.8	O		38	40.283	32	0	12.98	— 0.64	+ 0.77	— 0.28	4	+ 0.014	1.6	— 0.22	2.4
38	852	17 Tauri	3.8	O		39	31.688	23	49	51.26	— 0.32	+ 0.95	— 0.22	4	+ 0.005	0.4	— 0.21	3.6
7	858	5 H. Camelop.	4.7	O		40	50.459	71	3	21.70	— 0.98	— 0.22	+ 0.31	4	— 0.062	3.8	— 0.07	0.2
69	865	23 Tauri	4.2	W		40	58.901	23	40	6.35	+ 0.31	+ 0.95	— 0.34	4	— 0.008	0.4	— 0.32	3.6
39	869	η Tauri	2.8	O		42	7.905	23	49	38.62	— 0.32	+ 0.94	— 0.05	4	**+ 0.041**	0.8	**+ 0.14**	7.2
70				W							+ 0.32	+ 0.94	+ 0.31	4				
40	877	27 Tauri	3.7	O		43	48.475	23	46	43.47	— 0.32	+ 0.95	— 0.17	4	**— 0.015**	0.7	**— 0.25**	6.2
71				W							+ 0.32	+ 0.95	— 0.30	3				
7	967	μ Persei	4.3	O	4	8	17.063	48	10	52.91	— 0.91	+ 0.41	+ 0.02	4	— 0.002	3.3	+ 0.01	0.7
30	999	54 Persei	5.2	O		14	33.782	34	21	0.11	— 0.70	+ 0.71	+ 0.42	2	— 0.023	1.0	+ 0.30	1.0
54	1107	τ Tauri	4.3	O		36	50.488	22	47	5.48	— 0.24	+ 0.97	+ 0.50	4	— 0.009	0.2	+ 0.48	3.8
23	1161	7 Camelop.	4.5	O		50	4.098	53	36	32.07	— 0.96	+ 0.29	+ 0.27	4	— 0.029	3.7	+ 0.08	0.3
22	1185	10 β Camelop.	4.2	O		55	24.441	60	18	42.19	— 0.99	+ 0.12	0.00	4	0.000	3.9	0.00	0.1
31	1187	ε Aurigae	var. 4)	O		55	30.478	43	41	27.21	— 0.86	+ 0.51	+ 0.10	4	— 0.008	3.0	+ 0.05	1.0
42	1235	19 H. Camel.	5.2	O	5	7	42.302	79	7	46.73	— 0.70	— 0.72	+ 0.07	4	— 0.018	1.9	— 0.05	2.1
32	1246	α Aurigae	0.0	O		10	2.303	45	54	26.33	— 0.89	+ 0.46	— 0.01	4	+ 0.001	3.2	0.00	0.8
53	1304	β Tauri	1.6	O		20	36.106	28	31	55.71	— 0.54	+ 0.84	+ 0.48	4	— 0.020	1.2	+ 0.40	2.8
45	1429	τ Aurigae	4.6	O		42	56.286	39	9	4.34	— 0.79	+ 0.61	— 0.34	4	+ 0.023	2.5	— 0.21	1.5
47	1439	υ Aurigae	5.1	O		44	54.087	37	16	49.89	— 0.76	+ 0.65	— 0.47	4	+ 0.030	2.3	— 0.30	1.7
46	1442	ν Aurigae	4.2	O		45	15.085	39	7	22.32	— 0.79	+ 0.61	— 0.41	4	+ 0.027	2.5	— 0.25	1.5
43	1478	β Aurigae	1.8	O		52	55.631	44	56	20.94	— 0.87	+ 0.48	+ 0.11	4	— 0.009	3.1	+ 0.05	0.9
49	1482	ϑ Aurigae	2.6	O		53	35.043	37	12	25.20	— 0.76	+ 0.65	— 0.07	4	+ 0.004	2.3	— 0.05	1.7
63	1565	ϰ Aurigae	4.5	O	6	9	38.613	29	31	54.99	— 0.58	+ 0.82	— 0.17	2	+ 0.008	0.7	— 0.14	1.3
68	1763	ϑ Gemin.	3.6	O		46	51.516	34	4	13.63	— 0.70	+ 0.72	+ 0.43	1	— 0.024	0.5	+ 0.31	0.5
55	1758	24 H. Camelop.	4.9	O		46	57.301	77	5	37.14	— 0.84	— 0.55	+ 0.61	4	— 0.152	2.8	— 0.33	1.2
48	1776	15 Lyncis	4.5	O		49	29.236	58	32	29.98	— 0.99	+ 0.17	+ 0.47	4	— 0.059	3.9	+ 0.08	0.1
74	1840	τ Gemin.	4.5	O	7	5	24.757	30	23	36.47	— 0.60	+ 0.80	— 0.67	1	+ 0.028	0.4	— 0.54	0.6
66	1841	63 Aurigae	5.1	O		5	28.008	39	28	5.12	— 0.80	+ 0.60	+ 0.26	1	— 0.018	0.6	+ 0.16	0.4
58	1928	21 Lyncis	4.6	O		19	55.671	49	23	27.50	— 0.92	+ 0.39	— 0.64	1	+ 0.060	0.8	— 0.25	0.2
57	2010	24 Lyncis	5.0	O		35	23.898	58	55	18.39	— 0.99	+ 0.16	+ 0.25	4	— 0.032	3.9	+ 0.04	0.1
72	2247	o Urs. maj.	3.4	O	8	22	47.795	61	1	11.40	— 1.00	+ 0.10	+ 0.02	4	— 0.003	4.0	0.00	0.0
73	2290	π Urs. maj.	4.8	O		32	21.488	64	38	35.07	— 1.00	0.00	+ 0.32	4	— 0.050	4.0	0.00	0.0

1) Hellere Komponente. 2) 3.7—4.9. 3) 2.2—2.7. 4) für 1910: 3m.3 nach Ludendorff A. N. 192 pg. 389.

Die Beobachtungswerte l sind in den Kolonnen 2—6 von Tafel 2 gegeben.

§ 7. Die Resultate der Abendkonstanten.

Wegen der Verwendung eines Chronometers als Beobachtungsuhr konnte der abendliche Uhrgang nicht aus dem täglichen abgeleitet werden, sondern es mußten zu seiner Bestimmung die Beobachtungen selbst herangezogen werden. Es tritt dann zu den gesuchten Abendkonstanten dz, $d\varphi$, du als weitere Unbekannte die Verbesserung $d\Gamma$ des angenommenen Uhrganges. Diese 4 Abendkonstanten wurden unter Vernachlässigung der Rektaszensions- und Deklinationsverbesserungen der Boßschen Sternörter aus den Beobachtungen durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Die Fehlergleichungen, die für alle Sterne gleiches Gewicht erhielten, haben die Form:

$$dz - Pd\varphi - Adu - A(\vartheta - 2^{h})\,d\Gamma = l.$$

Aus den bei der Ausgleichung übrig bleibenden Fehlern wurde für jeden Abend der mittlere Fehler ε der Gewichtseinheit berechnet, der sich aus den Fehlern der Beobachtung und denen der angenommenen Sternpositionen zusammensetzt.

XII 5	$\varepsilon = \pm 0''.61$	Zahl der Beob.: 61
13	± 0.63	65
21	± 0.58	37
23	± 0.68	30
28	± 0.73	62
	Mittel: ± 0.65	Total 255

Die Resultate der Abendkonstanten sind in den folgenden Täfelchen zusammengestellt.

Wahre Zenitdistanz der Beobachtung.

Datum	Resultat der Ausgleichung	Gewicht	v	Mittl. Lufttemp.	Mittl. Luftdruck
1910				°	
XII 5	30° 0′ 45″.77	60	+ 0″.07	− 0.4	740.8 mm
13	.58	65	− 0.12	+ 3.9	742.5
21	.76	36	+ 0.06	− 0.5	755.1
23	.72	29	+ 0.02	+ 0.7	751.6
28	.72	61	+ 0.02	− 6.6	753.4

Die Abweichungen v der Einzelwerte von ihrem Mittel ergeben als m. F. der Gewichtseinheit $\pm 0''.59$, einen kleineren Betrag als das direkt gefundene ε. Trotz der großen Temperaturunterschiede ist also die Übereinstimmung der Abendwerte eine bessere, als die Genauigkeit der Beobachtungen erwarten ließe; auch zeigt das Verhalten der v keine Abhängigkeit von Temperatur oder Luftdruck. Es schien daher in diesem Falle erlaubt, für die Reduktion den Mittelwert der Zenitdistanz zu benützen unter Vernachlässigung eventueller kleiner Refraktionsanomalien.

Mittelwert der wahren Zenitdistanz	$z = 30^0\ 0'\ 45''.70$	Gewicht 251
Mittlere Refraktion	$r_0 = \qquad 33.17$	
Instrumentalzenitdistanz	$Z = 30\ \ 0\ \ 12.53$	
Prismenwinkel	$P = 59\ \ 59\ \ 47.47$	$\pm 0''.04$

Der angegebene mittlere Fehler ist aus ε abgeleitet. Aus einem einzelnen Abend mit 65 Beobachtungen ergibt sich entsprechend die Zenitdistanz mit einem m. F. von $\pm 0''.08$.

Die gefundene gute Konstanz der Instrumentalzenitdistanz steht im Gegensatz zu den Erfahrungen von Nušl und Frič [1]), welche zuerst bei ihrem Circumzenithal ein ähnliches an den äußeren Flächen versilbertes Prisma verwendet hatten und für dasselbe eine starke Veränderlichkeit der Zenitdistanz mit der Temperatur fanden. Sie erklärten diese durch Änderungen der Fokussierung infolge von Temperaturschwankungen und die dadurch bedingte Verstellung des Okulares. Vielleicht ist die hier erreichte Konstanz dem Umstande zu verdanken, daß weder Fokussierung noch Okularstellung während der ganzen Beobachtungsreihe je verändert worden waren; auch scheint die Fokussierung des benützten Instrumentes nicht merklich von der Temperatur abhängig zu sein, denn es ließen sich keinerlei Unterschiede in der Schärfe der Bilder bei den extremen Temperaturen wahrnehmen.

(S. Tabelle über Polhöhe auf Seite 28.)

Der in der 4. Kolonne angegebene Betrag der Polhöhenschwankung ist den Resultaten des internationalen Breitendienstes [2]) entnommen. Wenn man aus den Abweichungen v berechnet, ist der m. F. der Gewichtseinheit $\pm 0''.84$ etwas größer als ε; die Abendwerte der mittleren Polhöhe stimmen also unter einander nicht ganz so gut überein, als die Beobachtungsgenauigkeit es verlangen

1) Etude sur l'appareil circumzénithal pg. 51.

2) Th. Albrecht, Provisorische Resultate des Internat. Breitendienstes auf dem Nordparallel in der Zeit von 1910.0—1911.0. A. N. 188 pg. 265.

Tafel 2.

Progr.-Nr.	l					Δλ		λ					λ Mittel	Korrekt. f. Hellig-keitsgl.
	XII 5	XII 13	XII 21	XII 23	XII 28	XII 21	XII 23	XII 5	XII 13	XII 21	XII 23	XII 28		
1	—	+0″68	—	—	—	—	—	—	+0″91	—	—	—	+0″91	+0″03
2	+0″71	+0.43	—	—	—	—	—	+0″27	+0.08	—	—	—	+0.18	+0.04
3	−0.16	−0.39	—	+0″22	−0″96	—	+0″52	+0.10	−0.16	—	+0″22	−0″85	−0.17	−0.06
4	—	+0.32	—	+1.21	+0.83	—	+0.42	—	+0.17	—	+1.19	+0.81	+0.72	−0.15
5	−0.10	—	—	—	—	—	—	−0.32	—	—	—	—	−0.32	−0.15
6	—	+0.33	—	+0.49	+0.52	—	+0.06	—	+0.04	—	+0.40	+0.33	+0.26	−0.23
7	−0.22	−0.09	—	+0.49	+0.76	—	+0.22	−0.03	+0.04	—	+0.45	+0.75	+0.30	+0.01
8	−1.16	−1.27	—	−0.40	−0.81	—	+0.45	−0.83	−1.01	—	−0.40	−0.71	−0.74	+0.10
9	−0.62	−0.88	—	−0.50	−0.37	—	+0.03	−0.31	−0.62	—	−0.49	−0.27	−0.42	+0.05
10	−0.16	+0.38	—	+0.80	+0.09	—	+0.47	+0.12	+0.62	—	+0.83	+0.22	+0.45	+0.11
11	+0.13	−0.10	—	+0.65	+0.44	—	+0.44	−0.17	−0.35	—	+0.59	+0.32	+0.10	+0.38
12	−0.01	−0.63	—	+0.12	−0.31	—	+0.39	−0.32	−0.87	—	+0.06	−0.41	−0.38	+0.56
13	+1.24	+0.03	—	+1.40	+0.55	—	+0.67	+0.92	−0.26	—	+1.30	+0.38	+0.58	−0.13
14	−0.47	−0.45	—	−0.99	−1.77	—	−0.02	−0.67	−0.67	—	−1.09	−1.96	−1.10	+0.57
15	+0.49	+0.30	—	−0.24	−0.29	—	−0.23	+0.21	+0.02	—	−0.37	−0.49	−0.16	−0.17
16	−0.58	−0.78	—	−0.96	−0.53	—	−0.22	−0.73	−0.95	—	−1.06	−0.70	−0.86	+0.21
17	+0.10	−0.26	—	−0.43	−0.13	—	−0.34	+0.32	−0.05	—	−0.37	−0.01	−0.03	+0.05
18	−1.25	−1.44	—	−0.33	+0.10	—	+0.34	−1.15	−1.30	—	−0.27	+0.23	−0.62	+0.05
19	+0.02	+0.27	—	−1.15	+0.11	—	−0.93	−0.09	+0.12	—	−1.26	−0.05	−0.32	−0.26
20	+0.55	−0.30	—	−0.31	−0.44	—	−0.20	+0.57	−0.24	—	−0.27	−0.35	−0.07	+0.05
21	+0.18	+0.97	—	+0.37	+1.68	—	−0.33	−0.06	+0.72	—	+0.22	+1.49	+0.59	−0.22
22	−0.50	−0.93	—	+0.22	+0.75	—	+0.24	−0.37	−0.79	—	+0.27	+0.81	−0.02	+0.02
23	−0.22	−0.19	—	+0.73	+0.02	—	+0.54	−0.08	−0.03	—	+0.82	+0.13	+0.21	+0.06
24	+0.09	−0.83	—	−0.88	+0.11	—	−0.61	+0.18	−0.69	—	−0.78	+0.26	−0.26	−0.02
25	+0.07	+0.40	—	+0.08	−1.14	—	+0.32	−0.08	+0.20	—	−0.08	−1.34	−0.32	+0.16
26	+0.37	−0.06	—	−0.80	−0.18	—	−0.54	+0.23	−0.18	—	−0.87	−0.25	−0.27	−0.06
27	−0.44	−1.22	—	−0.06	−0.72	—	+0.67	−0.60	−1.39	—	−0.19	−0.85	−0.76	+0.73
28	−0.28	−0.04	—	+0.21	+0.77	—	+0.16	−0.43	−0.25	—	+0.01	+0.55	−0.03	−0.33
29	−0.06	+0.31	—	−0.03	+0.10	—	0.00	−0.18	+0.22	—	−0.21	−0.11	−0.10	−0.11
30	—	−0.19	—	—	+0.41	—	—	—	−0.06	—	—	+0.57	+0.26	+0.16
31	+0.50	+0.64	—	−0.29	−0.53	—	−0.51	+0.57	+0.78	—	−0.14	−0.38	+0.21	−0.11
32	+0.50	+0.46	—	+0.85	+0.11	—	+0.24	+0.56	+0.59	—	+1.00	+0.25	+0.60	−0.61
33	−0.21	−0.39	−0″70	−0.38	−0.12	−0″18	−0.03	−0.22	−0.48	−0″54	−0.52	−0.28	−0.41	−0.15
34	+0.17	+0.71	−0.72	+1.09	+0.80	−0.78	+0.74	+0.06	+0.57	−0.32	+0.94	+0.59	+0.37	−0.18

35	− 0.91	− 0.53	− 0.37	—	− 1.67	+ 0.62	—	− 0.91	− 0.60	− 0.26	—	− 1.81	− 0.90	+ 0.13
36	− 0.06	− 0.76	− 1.52	—	+ 0.20	− 0.63	—	− 0.14	− 0.01	− 1.10	—	+ 0.04	− 0.53	+ 0.23
37	+ 1.54	+ 1.05	+ 0.26	—	+ 1.19	− 0.34	—	+ 1.50	+ 0.89	+ 0.74	—	+ 0.96	+ 1.02	+ 0.09
38	+ 0.60	− 0.99	− 0.16	—	− 0.18	− 0.16	—	+ 0.53	− 0.96	− 0.41	—	− 0.06	− 0.22	0.00
39	+ 0.91	− 0.14	− 0.21	—	− 0.58	− 0.38	—	+ 0.84	− 0.11	− 0.46	—	− 0.46	− 0.05	0.00
40	+ 0.47	− 0.43	− 0.72	—	+ 0.18	− 0.78	—	+ 0.40	− 0.40	− 0.98	—	+ 0.30	− 0.17	0.00
41	—	+ 0.21	− 0.78	—	—	− 0.23	—	—	+ 0.06	− 0.33	—	—	− 0.14	− 0.21
42	+ 0.64	+ 0.43	+ 0.54	—	− 0.73	+ 0.23	—	+ 0.64	+ 0.42	+ 0.38	—	− 0.78	+ 0.16	− 0.09
43	+ 1.40	+ 0.26	+ 0.19	—	+ 0.25	− 0.71	—	+ 1.35	+ 0.34	− 0.31	—	+ 0.41	+ 0.45	− 0.34
44	+ 0.11	+ 0.93	+ 0.07	—	+ 1.46	− 0.28	—	+ 0.10	+ 0.82	+ 0.41	—	+ 1.30	+ 0.66	− 0.22
45	− 0.65	− 0.69	− 0.09	—	+ 0.04	− 0.08	—	− 0.75	− 0.63	− 0.55	—	+ 0.22	− 0.43	+ 0.09
46	− 0.20	− 0.78	+ 0.08	—	− 0.52	+ 0.10	—	− 0.30	− 0.72	− 0.38	—	− 0.34	− 0.44	+ 0.03
47	− 0.90	− 1.02	+ 0.45	—	− 0.79	+ 0.69	—	− 0.99	− 0.96	0.00	—	− 0.62	− 0.64	+ 0.17
48	+ 0.15	+ 0.54	+ 0.63	—	+ 0.69	− 0.13	—	+ 0.06	+ 0.57	+ 0.25	—	+ 0.80	+ 0.42	+ 0.05
49	+ 0.88	− 0.05	+ 0.08	—	− 0.06	− 0.43	—	+ 0.74	− 0.01	− 0.34	—	+ 0.13	+ 0.13	− 0.20
50	− 0.59	− 0.25	− 0.33	—	− 0.67	+ 0.43	—	− 0.54	− 0.35	+ 0.04	—	− 0.88	− 0.43	+ 0.80
51	+ 0.95	− 0.49	+ 0.34	—	+ 0.85	+ 0.18	—	+ 1.04	− 0.48	+ 0.69	—	+ 0.62	+ 0.47	− 0.26
52	− 0.56	− 1.04	− 0.39	—	− 0.49	+ 0.46	—	− 0.46	− 1.12	− 0.11	—	− 0.73	− 0.60	+ 0.69
53	+ 1.44	+ 0.47	+ 0.93	—	+ 0.14	− 0.03	—	+ 1.29	+ 0.49	+ 0.62	—	+ 0.32	+ 0.68	− 0.20
54	+ 0.28	+ 0.02	+ 0.70	—	+ 1.23	+ 0.06	—	+ 0.16	0.00	+ 0.56	—	+ 1.33	+ 0.51	− 0.01
55	+ 0.76	+ 1.00	+ 0.66	—	+ 0.48	− 0.13	—	+ 0.71	+ 0.97	+ 0.52	—	+ 0.45	+ 0.66	− 0.05
56	—	—	+ 0.22	—	—	0.00	—	—	—	+ 0.42	—	—	+ 0.42	− 0.07
57	− 0.26	+ 0.56	+ 1.58	—	− 0.96	+ 1.18	—	− 0.48	+ 0.55	+ 1.30	—	− 0.77	+ 0.15	+ 0.10
58	—	—	− 0.39	—	—	0.00	—	—	—	− 0.73	—	—	− 0.73	+ 0.09
59	+ 0.37	+ 0.42	—	—	+ 0.71	—	—	+ 0.54	+ 0.37	—	—	+ 0.44	+ 0.45	− 0.09
60	—	+ 0.48	− 0.35	—	+ 0.57	− 0.36	—	—	+ 0.43	− 0.14	—	+ 0.32	+ 0.20	+ 0.16
61	—	—	− 0.72	—	—	0.00	—	—	—	− 0.54	—	—	− 0.54	+ 0.17
62	+ 0.18	—	+ 0.12	—	—	− 0.04	—	+ 0.37	—	+ 0.31	—	—	+ 0.34	− 0.42
63	—	− 0.43	—	—	− 0.20	—	—	—	− 0.45	—	—	0.00	− 0.22	+ 0.05
64	+ 0.72	—	− 0.04	—	—	− 0.40	—	+ 0.91	—	+ 0.15	—	—	+ 0.53	− 0.35
65	—	+ 1.01	− 0.15	—	+ 0.93	− 0.53	—	—	− 0.97	+ 0.07	—	+ 0.70	+ 0.58	− 0.04
66	+ 0.37	—	—	—	—	—	—	+ 0.09	—	—	—	—	+ 0.09	+ 0.17
67	—	− 0.16	+ 0.96	—	+ 1.10	+ 0.53	—	—	− 0.19	+ 1.15	—	+ 0.83	+ 0.60	− 0.20
68	+ 0.10	—	—	—	—	—	—	+ 0.48	—	—	—	—	+ 0.48	− 0.05
69	− 0.10	− 1.50	+ 0.61	—	− 0.17	+ 0.97	—	− 0.03	− 1.52	+ 0.71	—	− 0.26	− 0.28	− 0.06
70	− 0.24	+ 0.11	− 0.06	—	+ 0.01	+ 0.06	—	− 0.17	+ 0.09	+ 0.04	—	− 0.09	− 0.03	+ 0.34
71	—	− 0.37	− 0.41	—	− 0.34	+ 0.06	—	—	− 0.39	− 0.30	—	− 0.44	− 0.38	+ 0.08
72	+ 0.70	− 0.27	+ 0.61	—	− 0.38	+ 0.35	—	+ 0.47	− 0.32	+ 0.41	—	− 0.26	+ 0.08	− 0.06
73	+ 0.50	− 0.20	+ 0.44	—	+ 0.66	+ 0.01	—	+ 0.26	− 0.25	+ 0.25	—	+ 0.77	+ 0.26	+ 0.06
74	− 0.36	—	—	—	—	—	—	− 0.72	—	—	—	—	− 0.72	+ 0.05

Polhöhe.

Datum	Resultat der Ausgleichung	Gewicht	Reduktion auf mittl. Polhöhe	Mittlere Polhöhe	v	Ausgegl. Moment. Polhöhe
1910				51° 31′		51° 31′
XII 5	51° 31′ 48″.07	22	— 0″.20	47″.87	+ 0″.02	48″.05
13	47.83	24	— 0.16	47.67	— 0.18	48.01
21	47.80	15	— 0.14	47.66	— 0.19	47.99
23	48.31	10	— 0.13	48.18	+ 0.33	47.98
28	48.08	23	— 0.10	47.98	+ 0.13	47.95

würde; doch gestattet die kleine Zahl der Beobachtungsabende kein sicheres Urteil über das Auftreten systematischer Abendfehler der Polhöhe.

Der Mittelwert für die Polhöhe des Beobachtungspfeilers ist

$$\varphi = 51^\circ\, 31'\, 47.85 \pm 0''.07$$

der m. F. desselben ist wiederum aus ε abgeleitet; dem Resultat eines einzelnen vollständigen Beobachtungsabendes [Gewicht 23] kommt in entsprechender Weise ein m. F. von $\pm 0''.14$ zu. Die Polhöhenbestimmungen der Sternwarte Göttingen werden üblicher Weise auf den Gaußischen Punkt bezogen, von dem der Beobachtungspfeiler 107.8 Meter östlich und 2.8 Meter nördlich liegt[1]); die Reduktion auf denselben beträgt demnach $-0''.09$.

Mittlere Polhöhe des Gaußischen Punktes der Sternwarte Göttingen $\varphi = 51^\circ\, 31'\, 47''.76 \pm 0''.07$

für die Epoche 1910.96 im Deklinationssystem des P. G. C. von Boß.

Uhrkorrektionen
von Chronometer Bröcking 1101.

Datum 1910	Näherungswerte der Reduktion $u_0 + \Gamma_0(\vartheta - 2^h)$	Resultat der Ausgleichung $u + \Gamma(\vartheta - 2^h)$ 1. Ausgleichung	2. Ausgleichung
XII 5	$+ 6^m\, 6^s.80 + 0^s.10\ (\vartheta - 2^h)$	$+ 6^m\, 6^s.811 + 0^s.084\ (\vartheta - 2^h)$	
13	+ 6 30.30 + 0.13	+ 6 30.519 + 0.122	
21	+ 6 52.40 + 0.17	+ 6 52.347 + 0.182	$+ 6^m\, 52^s.338 + 0^s.184\ (\vartheta - 2^h)$
23	+ 6 57.30 + 0.15	+ 6 57.296 + 0.136	+ 6 57.318 + 0.158
28	+ 7 10.40 + 0.02	+ 7 10.420 + 0.022	

1) Nach gütiger Mitteilung von Prof. Ambronn.

Um diese Uhrkorrektionen in absolute zu verwandeln ist noch die Korrektion für tägliche Aberration $+0^s.018$ zu denselben zu addieren. Für einen vollständigen Abend [65 Beobachtungen] ist der

m. F. einer Uhrkorrektion u: $\pm 0^s.011$
m. F. des stündlichen Uhrganges Γ: ± 0.008.

Im weiteren wurden die λ nach Gleichung 7) berechnet, indem für die wahre Zenitdistanz der gefundene Mittelwert, für die Polhöhe die ausgeglichenen Momentanpolhöhen in der letzten Kolonne der Polhöhentafel und für die Uhrkorrektionen und Uhrgänge die aus der Ausgleichung resultierenden Werte benützt wurden. Bevor indes die definitive Ableitung der Rektaszensions- und Deklinationsverbesserungen in Angriff genommen werden konnte, mußte für die beiden Abende XII 21 und XII 23, an denen nur je das halbe Beobachtungsprogramm zur Ausführung gelangte, die Berechnung der Uhrkorrektionen und Uhrgänge einer zweiten Näherung unterworfen werden. Da die gesuchten Positionsverbesserungen der Sterne sich auf das System der Boßschen Örter aller Programmsterne beziehen sollen, so müssen auch die Abendkonstanten auf dieses ganze System bezogen sein. Dies ist für die Zenitdistanz und Polhöhe sehr nahe der Fall, deren Mittelwerte auf je 4 Beobachtungen aller Programmsterne beruhen. An den 3 nahezu vollständigen Beobachtungsabenden werden auch die Uhrkorrektionen und Uhrgänge durch eine weitere Näherung kaum merklich geändert werden. Es braucht also einzig für die beiden genannten Abende mit verbesserten Sternörtern eine zweite Ausgleichung für u und Γ vorgenommen zu werden. Das Verfahren ist folgendes: Durch Mittelbildung ist aus den λ der 5 Abende eine provisorische Verbesserung der Sternposition λ_p zu gewinnen; diese wird an den λ der beiden Abende angebracht

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_p \quad \text{[Tafel 2 Kolonne 7 und 8]}$$

Der zweiten Ausgleichung liegen dann die Fehlergleichungen

$$\Delta\lambda = A du' + A(\vartheta - {}^h) d\Gamma$$

zu grunde. Ihre Resultate, die zur definitiven Ableitung der λ dienten, sind in der Tabelle der Uhrkorrektionen angeführt. Nachdem die λ [Tafel 2 Kolonne 9—14] für alle Abende auf dasselbe System bezogen, wurden sie für jeden Stern zu einem Mittel [Tafel 2 Kolonne 15] vereinigt.

§ 8. Die Helligkeitsgleichung.

Es war noch zu untersuchen, ob die Beobachtungen mit systematischen, von der Sternhelligkeit abhängigen Fehlern behaftet sind. Zu diesem Zwecke sind die Sterne nach ihrer Größe in Gruppen geordnet und in jeder Gruppe für die östlichen und westlichen Durchgänge getrennt die Mittel der λ gebildet worden, welche die Abweichungen der beobachteten Sternörter von den für Helligkeitsgleichung bereits korrigierten Sternpositionen des Boß'schen Kataloges darstellen.

Größe	λ_0	λ_w	$\frac{\lambda_w - \lambda_0}{2}$	$\frac{\lambda_w + \lambda_0}{2}$
0—3^m	+0″.29	−0″.55	−0″.42	−0.13
3—4	−0.01	−0.20	−0.10	−0.10
4—5.2	0.00	+0.22	+0.11	+0.11

Die Zahlen sprechen deutlich für die Existenz einer Helligkeitsgleichung, doch ergeben die West-Durchgänge einen größeren Betrag für dieselbe als die Ost-Durchgänge. Diese Erscheinung läßt sich durch die Annahme erklären, daß die Helligkeitsgleichung sich aus zwei Gliedern zusammensetzt, deren erstes den beobachteten Durchgangszeiten anhaftet, während das zweite auf die Beobachtungszenitdistanz einwirkt. Der Einfluß des ersten Gliedes auf die λ besitzt für Ost- und West-Durchgänge entgegengesetztes, der des letzteren gleiches Vorzeichen. Der Verlauf des ersten Gliedes wird daher angenähert durch die Differenzen $\frac{\lambda_w - \lambda_0}{2}$ dargestellt, der des zweiten Gliedes durch $\frac{\lambda_w + \lambda_0}{2}$.

Für das erste Glied wählen wir die bei Meridianbeobachtungen gefundene Form des Einflusses der Sternhelligkeit auf Durchgangsbeobachtungen, nach welcher jeder Fadenantritt um einen der Sterngröße proportionalen Zeitbetrag zu früh oder zu spät beobachtet wird, unabhängig von der Bewegungsgeschwindigkeit des Sterns gegenüber dem Faden. Die Durchgangszeit ist also um den Betrag

$$\varDelta U = (m - m_0) h_1$$

zu verbessern, wo mit h_1 der Proportionalitätsfaktor bezeichnet werden soll. Für das zweite Glied setzen wir ebenfalls Proportionalität mit der Sterngröße voraus, die wirkliche Beobachtungszenitdistanz ist dann um

$$\varDelta z = (m - m_0)\, h_2$$

größer als die angenommene mittlere. Die beiden Koeffizienten h_1 und h_2 wurden aus den λ durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Die Fehlergleichungen sind analog zu Gleichung 6) gebildet unter Einsetzung der Ausdrücke für $\varDelta U$ und $\varDelta z$ und des Näherungswertes $m_0 = 4.0$

$$-A\,(m - 4.0)\, h_1 + (m - 4.0)\, h_2 + k = \lambda$$

Die Unbekannte k ist mit eingeführt, um daraus eine Verbesserung von m_0 abzuleiten. Bei der Ausgleichung waren die veränderlichen Sterne 29 und 31 ausgeschlossen worden, und die Fehlergleichungen, deren λ auf weniger als 3 Beobachtungen beruhte, hatten halbes Gewicht erhalten.

Die Ausgleichung lieferte die Resultate

$$h_1 = -0^s.0316 \pm 0^s.0065$$
$$h_2 = +0''.140 \pm 0''.051$$

Der Näherungswert $m_0 = 4.0$ bedarf keiner Verbesserung. Der Faktor h_1 gibt die zu erwartende Wirkung der Helligkeitsgleichung wieder, daß die Fadenantritte der hellen Sterne zu früh beobachtet werden; sein Betrag ist aber im Vergleich zu den für Meridianinstrumente bisher gefundenen [nach Boß[1]) im Mittel $+0^s.007$] sehr groß. Dieser Umstand läßt sich wohl durch die kleinen Dimensionen des Fernrohres und zum Teil vielleicht durch die Beugungswirkung der horizontalen Prismenkante erklären. Der durch den Faktor h_2 bedingte Effekt des zweiten Gliedes besteht darin, daß helle Sterne in einer kleineren Zenitdistanz beobachtet werden, als schwache Sterne. Da dieses Glied in allen Azimuten unverändert bleibt, muß es seinen Ursprung in der Bilderzeugung des Instrumentes haben. Man könnte es als instrumentelle Helligkeitsgleichung bezeichnen im Gegensatz zum 1. Glied das eine persönliche Helligkeitsgleichung darstellt. Die Ursache dieses Fehlers ist in der Halbierung des Objektives durch die horizontale Prismenkante zu suchen. Bei der Bisektion durch den Faden ist jedes der beiden Beugungsbildchen des Sterns nicht mehr symmetrisch zum Faden und eine Veränderung der Helligkeit wird daher die Schätzung der Bisektion verändern. Der dadurch hervorgerufene Fehler beeinflußt die Beobachtung des direkten und die des reflektierten Bildes in demselben Sinne und geht somit auch in das Resultat ein.

---

1) Preliminary General Catalogue, Introduction pg. XIII.

Die Gesamtkorrektur der Beobachtungen für Helligkeitsgleichung ist für die einzelnen Sterne in der letzten Kolonne von Tafel 2 gegeben. Durch deren Anbringung sind die definitiven Verbesserungen λ' der Sternpositionen erhalten worden.

$$\lambda' = \lambda - 0^s.0316\, A\, (m - 4.0) - 0''.140\, (m - 4.0).$$

§ 9. Beobachtete Verbesserungen der Sterncoordinaten.

Wie bereits in § 2 auseinandergesetzt worden ist, bestehen die Resultate der Durchgangsbeobachtungen in je einer Gleichung zwischen den Coordinatenverbesserungen für jeden Durchgang. Diese Gleichungen sind in der Form

$$A' d\alpha' + D d\delta = \lambda', \quad \text{wobei } d\alpha' = 15\, d\alpha \cos\delta$$

in Spalte 8 der Tafel 1 wiedergegeben.

Eine direkte Ableitung der $d\alpha$ und $d\delta$ selbst ist nur für die in beiden Durchgängen beobachteten Sterne η Tauri und 27 Tauri möglich; für die übrigen Sterne lassen sich Verbesserungen der einzelnen Coordinaten nur unter Heranziehung der in § 2 erwähnten Minimumsbedingungen nach den Formeln 10) berechnen Durch Addition der so gewonnenen $d\alpha$ und $d\delta$ (Tafel 1, Kolonne 10 und 12) zu den Rektaszensionen und Deklinationen des Boßschen Kataloges erhält man die beobachteten Coordinaten. Die beigefügten Gewichte (Tafel 1, Kolonne 11 und 13) sind für die beiden Sterne η Tauri und 27 Tauri nach Formel 9) für die übrigen entsprechend nach

$$G_\alpha = nA'^2 \qquad G_\delta = nD^2$$

berechnet worden. Für eine Reihe von Sternen besitzt die eine Coordinate nur ein sehr kleines Gewicht; die betreffende Verbesserung geht dann aus den Beobachtungen nur mit großer Unsicherheit hervor und ihre Angabe trägt den Charakter einer Rechnungsgröße.

§ 10. Genauigkeit der Beobachtungen.

Aus den Abweichungen der einzelnen beobachteten λ (Tafel 2, Kolonnen 9—14) von ihren Sternmitteln (Tafel 2, Kol. 15) wurde der mittlere Fehler einer einzelnen Höhendurchgangsbeobachtung für verschiedene Azimutintervalle getrennt berechnet.

Azimut	Deklination	Mittlerer Fehler	Zahl der Beob.
20°—40°	22°.7—26°.1	± 0″.56	38
40—60	26.1—31.5	.54	39
60—80	31.5—38.6	.49	31
80—100	38.6—47.0	.48	37
100—120	47.0—56.5	.38	27
120—140	56.5—66.4	.53	46
140—170	66.4—79.8	.45	29
	Mittel	± 0″.52	247

Die Zahlen bestätigen im Wesentlichen den bereits aus dem Verhalten des mittleren Fehlers eines Fadenantrittes gezogenen Schluß, daß bei der angewandten kleinen Vergrößerung die Genauigkeit der Zenitdistanzbeobachtung in allen Azimuten als gleich angenommen werden darf. Aus der Tabelle könnte höchstens eine schwache Tendenz zur Abnahme des mittleren Fehlers mit wachsender Deklination herausgelesen werden, ein Resultat, das mit dem von Chandler für sein Almucantar gefundenen übereinstimmt. Es rührt wohl davon her, daß die Durchgangsbeobachtung von Sternen kleiner Deklination durch die rasche Bewegung in Azimut etwas erschwert wird. Im Mittel erhält man also aus der Übereinstimmung der Beobachtung desselben Sterns an verschiedenen Abenden als mittleren Fehler eines einzelnen Höhendurchganges: ± 0″.52. Dieser Wert ist nur wenig größer als der aus der inneren Genauigkeit der Fadenantritte gefolgerte (± 0″.44).

Die Genauigkeit der Rektaszensions- und Deklinationsverbesserungen von Tafel 1 ist durch ihr Gewicht bedingt, wobei der Gewichtseinheit ein m. F. von ± $0^s.035 \sec \delta$ in Rektaszension und ± 0.″52 in Deklination zukommt.

Es ist noch die Frage zu erörtern, ob die aus den Beobachtungen resultierenden Verbesserungen λ' der Boßschen Sternörter sich innerhalb der durch die mittleren Beobachtungsfehler und die m. F. der Boßschen Positionen gezogenen Grenze halten. Im Mittel für die 74 Sterndurchgänge ergibt sich:

m. F. der Sternpositionen von Boß P. G. C. nach Katalogangabe	± 0″.23
mittlerer Beobachtungsfehler der Verbesserungen λ'	± 0.32
m. F. der Differenz (Beob.-Boß)	± 0.40
Quadratischer Mittelwert der λ'	± 0.42

Die λ' überschreiten die Grenze nur sehr wenig.

Das Resultat des gemachten Versuches über die Verwendbarkeit der Höhendurchgangsbeobachtungen darf hinsichtlich der Beobachtungsgenauigkeit als ein sehr befriedigendes bezeichnet werden, besonders wenn man die Kleinheit und geringe Vergrößerung des Fernrohres sowie die Einfachheit der Beobachtungen im Vergleich zu denen bei Meridiankreisen bedenkt. Bereits bei dem benützten Instrument erreicht die Genauigkeit der Einzelbeobachtung diejenige eines großen Teiles der Meridianinstrumente. Sobald es sich um Beobachtungen auf einer festen Sternwarte handelt, steht aber kein Hindernis im Weg, das Instrument in größeren Dimensionen und in vollkommenerer Weise auszuführen, so daß auch eine wesentlich stärkere Vergrößerung angewandt werden kann. Es sind dann allerdings noch Vorkehrungen zur Vermeidung systematischer persönlicher Fehler, vielleicht durch Einführung der photographischen Beobachtungsmethode oder einer dem Registriermikrometer ähnlichen Einrichtung zu treffen. Die Helligkeitsgleichung kann in der gewohnten Weise durch Abblendung der hellen Sterne reduziert werden.

Ein prinzipieller Fehler des Instrumentes bei der benützten Konstruktion besteht in der Teilung des Objektives durch die horizontale Prismenkante, die zur Folge hat, daß die Sternbilder zu den Durchgangsfäden nicht symmetrisch sind. Dieser Übelstand, den wir bereits als Ursache der instrumentellen Helligkeitsgleichung angesprochen hatten, wird durch Vertikalstellung der Halbierungslinie des Objektives beseitigt. Das Prisma muß dann durch zwei gekreuzte in unveränderlicher Weise miteinander verbundene Spiegel ersetzt werden, wie dies bereits Nušl und Frič bei der zweiten Form ihres Circumzenithal getan.

§ 11. Verwendung des Prismenastrolab zur geographischen Ortsbestimmung.

An die mitgeteilte Beobachtungsreihe, die nebenbei auch eine Polhöhenbestimmung von Göttingen lieferte, seien noch einige Bemerkungen über die Verwendung des Prismenastrolab zur geographischen Ortsbestimmung angeschlossen. Claude und Driencourt beobachten für jeden Sterndurchgang nur den Moment des Zusammentreffens des direkten und des reflektierten Bildes; bei diesem Verfahren ist eine Durchgangsbeobachtung mit einem m. F. von ca. $\pm 2''$[1]) behaftet. Eine Erhöhung der Ge-

1) In „Procès-verbaux des 50me et 51me séances de la Commission Géodésique Suisse“ 1905 pg. 50 führt Prof. Wolfer einige nach dieser Methode ausge-

nauigkeit soll dadurch erzielt werden, daß die Zahl der zu beobachtenden Sterne sehr groß gewählt wird. Es muß dann für jeden einzelnen mit verhältnismäßig geringer Genauigkeit beobachteten Durchgang die trigonometrische Formel 1a) ausgerechnet werden, wozu nachher noch die Ausgleichung der vielen Beobachtungen auf graphischem Wege oder nach der Methode der kleinsten Quadrate hinzukommt. Auch wird man bei Beobachtung so vieler Sterne in verhältnismäßig kurzer Zeit sich nicht auf solche beschränken können, für welche in den Jahrbüchern Ephemeriden gegeben sind. Der Rechenaufwand wird dadurch ein sehr großer und steht in keinem Verhältnis zur erreichten Genauigkeit [1]).

Dem gegenüber möchte ich vorschlagen, zur Erreichung derselben Genauigkeit der Zeit- und Breitenbestimmung eine geringere Zahl von gut bestimmten Fundamentalsternen zu verwenden, deren Durchgänge dafür durch Heranziehung von Fadenbeobachtungen nach der hier beschriebenen Methode mit entsprechend höherer Genauigkeit (m. F. $\pm 0''.5$) beobachtet werden. Da die Reduktion der Fadendurchgänge auf den Moment der Begegnung der beiden Bilder außerordentlich einfach ist, erwächst aus derselben keine starke Vermehrung der Rechenarbeit; dafür wird diese aber wegen der kleineren Zahl der Sterne bei der trigonometrischen Rechnung und bei der Ausgleichung der Beobachtungen in weit erheblicherem Maße vermindert. Die Raschheit und Einfachheit, welche die Beobachtungen mit dem Prismenastrolab auszeichnen, gehen bei der Einführung von Fadenbeobachtungen keineswegs verloren. Im Allgemeinen verlangt die Methode allerdings die Registrierung auf einem Chronographen; es existieren aber bereits so kompendiöse Konstruktionen von registrierenden Chronometern und Chronographen, daß deren Mitnahme auf Feldstationen keine Schwierigkeiten bietet. Bei geeigneter Wahl des Fadennetzes wird übrigens ein sehr geübter Beobachter die Fadenantritte auch nach der Aug- und Ohrmethode beobachten können.

---

führte Versuchsreihen verschiedener Beobachter an, deren Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate im Durchschnitt den m. F. einer Beobachtung zu $\pm 2''.4$ ergibt. Aus der in „Claude et Driencourt, Description et usage de l'Astrolabe à prisme“ pg. 360 reproduzierten graphischen Ausgleichung einer Beobachtungsserie habe ich aus den übrig bleibenden Fehlern unter Ausschließung einer einzigen sehr stark abweichenden Beobachtung den m. F. berechnet und dafür $\pm 1''.8$ gefunden. Den durch Bemerkungen als unsicher bezeichneten Beobachtungen war dabei halbes Gewicht erteilt worden.

1) Was immer wieder bei der Verwertung dieser und ähnlicher Beobachtungsverfahren für den Feldgebrauch betont werden muß.

Die mitgeteilte Beobachtungsreihe zeigt, daß nach dieser Methode bereits aus einer Serie von 25—30 Sternen (Dauer ca. 2 Stunden) die Polhöhe mit einer Genauigkeit von $\pm 0''.2$ erhalten wird. Es ist ferner zu berücksichtigen, daß, wenn es sich nur um Bestimmung der Polhöhe handelt, bei entsprechender Wahl des Sternprogrammes die zur Erreichung dieser Genauigkeit erforderliche Zahl von Beobachtungen sich noch verringert.

§ 12. Vorteile der Höhendurchgangsbeobachtungen zur Bestimmung fundamentaler Sternörter.

Erheblich günstiger in Bezug auf den Arbeitsaufwand bei der Reduktion der Beobachtungen stellt sich die Methode, wenn es sich darum handelt, an einer festen Sternwarte Höhendurchgangsbeobachtungen zur Zeitbestimmung oder zur fundamentalen Ortsbestimmung von Fixsternen zu verwenden. Durch Benützung der erwähnten, für die geographische Breite der Sternwarte zu konstruierenden Stundenwinkeltafel wird die Berechnung der Beobachtungen so vereinfacht, daß die Methode derjenigen der Meridianbeobachtungen in diesem Punkte nicht mehr wesentlich nachsteht. Dafür besitzt die vorgeschlagene Methode der letzteren gegenüber eine Reihe wichtiger Vorzüge.

1) Die Stabilität der Aufstellung, die bei Meridianinstrumenten so schwer zu erreichen ist, ist bei Instrumenten, die nach dem Prinzip des Prismenastrolab gebaut sind, nicht notwendig. Im Gegensatz zu Meridianbeobachtungen in beiden Coordinaten, bei denen 4 Instrumentalkonstanten zu bestimmen sind (Neigung und Azimut der Drehungsachse, Kollimationsfehler und Zenitpunkt des Deklinationskreises), tritt bei dieser Methode nur eine einzige Instrumentalkonstante (die Beobachtungszenitdistanz) auf, und bei geeigneter Konstruktion des Instrumentes darf diese abgesehen von der Refraktion sogar als absolute Konstante betrachtet werden. Das Beobachtungsverfahren vereinfacht sich dadurch sehr, denn es fallen Kreisablesungen und direkte Messungen von Instrumentalfehlern, wie Niveauablesungen, Kollimator- und Nadireinstellungen alle weg. Die Arbeit des Beobachters besteht nur in der Registrierung der Durchgangszeiten und in Ablesungen der zur Refraktionsberechnung nötigen meteorologischen Angaben.

2) Infolge der Symmetrie der Beobachtungen zum Zenit wird der Einfluß aller durch die Wirkung der Schwerkraft hervorgerufenen und als „Biegung“ bezeichneten Deformationen des Instrumentes eliminiert. Auch andere systematische Fehler instrumenteller Natur, wie sie bei Meridianbeobachtungen durch die un-

vollkommene Kreisform der Zapfen oder durch Teilungsfehler des Kreises verursacht werden, werden bei dieser Methode vermieden.

3) Die Beobachtungsmethode ist nicht allein auf die Berechnung der atmosphärischen *Refraktion* angewiesen, sondern sie vermag dieselbe auch zu *eliminieren*, soweit sie sich symmetrisch zum Zenit anordnet.

4) Das Beobachtungsverfahren ist für beide Coordinaten, Rektaszension und Deklination vollständig gleichartig. Jede Beobachtung liefert eine Bedingungsgleichung zwischen beiden Coordinatenverbesserungen und die Koeffizienten derselben lassen sich durch Verwendung verschiedener Beobachtungszenitdistanzen verändern.

5) Der wichtigste Vorteil ist wohl der, daß die *Reihenfolge der Sterne* bei der Beobachtung eine ganz andere ist als für Meridiandurchgänge. Sie ist ferner auch für die West- und Ostdurchgänge verschieden und kann durch Heranziehung mehrerer Beobachtungszenitdistanzen noch mehr variert werden. Selbst in einer Programmgruppe von kurzer Dauer sind dann die *Sterne über ein großes Rektaszensionsintervall verteilt*. Z. B. beträgt bei der obigen Beobachtungsreihe die Dauer des Programms wenig mehr als 5 Stunden, während die Rektaszensionen der Sterne sich über mehr als 12 Stunden erstrecken. Wenn wir daher innerhalb einer solchen Gruppe die relativen Verbesserungen der Sterncoordinaten gegen das System der Gruppe bestimmen, so werden diese von den *systematischen mit der Rektaszension fortschreitenden Katalogfehlern* der Gruppensterne nur in sehr geringem Maße beeinflußt und es können auch eventuelle periodische Unregelmäßigkeiten im Uhrgang sich in solchen Fehlern nur sehr schwach geltend machen. Da außerdem die verschiedenen Höhendurchgänge desselben Sterns in verschiedene solche Gruppen fallen, so gestattet die Methode die erwähnte Art der Katalogfehler in rascher Näherung zu beseitigen. Gerade in dieser Hinsicht dürften die Höhendurchgangsbeobachtungen eine wertvolle Ergänzung der Meridianbeobachtungen bilden.

Es ist meine Absicht, die begonnenen Versuche mit einem etwas größeren und für diesen Zweck besser geeigneten Instrument, das die Durchgänge auch photographisch zu registrieren gestattet, fortzusetzen.

Basel, Dezember 1912.

Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.

Von

Paul Koebe in Leipzig.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 22. Februar 1913.

Die Frage der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung eines schlichten einfach zusammenhängenden Bereichs B in der f-Ebene auf die Fläche des Einheitskreises E einer z-Ebene ist neuerdings von den Herren Carathéodory[1]) und Study[2]) behandelt worden, indem diese Autoren einerseits für den Fall, daß die Begrenzung eine Jordansche Kurve ist, eine Osgoodsche Vermutung bestätigten, daß nämlich die konforme Abbildung sich auch noch auf den Rand selbst als stetige Abbildung fortsetzt, andererseits im Falle des schlechthin allgemeinsten Bereiches den Satz bewiesen, daß die Menge M der vom Innern des Bereichs B her erreichbaren Randpunkte von B, welche offenbar cyklisch geordnet ist, eineindeutig und dem Anordnungstypus entsprechend auf eine Menge M' von Peripheriepunkten des Einheitskreises bezogen wird, welch letztere Menge auf der Peripherie überall verteilt ist, sodaß kein noch so kleines Peripheriestück von Punkten der Menge M' frei ist. Durch den letzteren Satz wird dann, wie eine von Study und Carathéodory gegebene Analyse des Randes zeigt, das Problem der Ränderzuordnung auch für den allgemeinsten Bereich in gewisser Weise vollkommen beherrscht[3]).

1) Math. Ann. Bd. 73, pag. 305—320, 323—370.

2) „Vorlesungen über Geometrie“ Bd. II, Leipzig, Teubner 1913, insbesondere § 5—8.

3) Auch diese weitergehenden Sätze der Herren Study und Carathéodory sind, worauf ich inzwischen aufmerksam geworden bin, wesentlich bereits 1903 durch Osgood gefunden worden. Vgl. dessen vorläufige Note im Bull. of the Am. Math. Soc., II Series 9, 1903 pag. 233—235: „On the transforformation of the boundary in the case of conformal mapping.“

Die Herren Carathéodory und Study bedienten sich zum Zwecke des Nachweises wesentlich eines von Fatou gefundenen Satzes über Funktionen $\varphi(z)$, welche innerhalb des Einheitskreises $|z| < 1$ regulär sind und dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke bleiben. Dieser Satz, welchen Fatou aus gewissen von Lebesgue mit seinem eigentümlichen Integralbegriff gewonnenen Ergebnissen folgerte, besagt, auf die Abbildungsfunktion $f(z)$ angewandt, direkt, daß auf der Peripherie des Einheitskreises eine Gesamtheit M'' von überall dicht verteilten Punkten existiert von der Beschaffenheit, daß den nach diesen Punkten vom Zentrum hinführenden Radien in B Linien entsprechen, die je gegen einen bestimmten erreichbaren Randpunkt von B konvergieren.

Herr Carathéodory spricht in seinem erstgenannten Aufsatze nun die Meinung aus, daß es ohne das Lebesgue'sche Integral vielleicht (M. A. p. 307) nicht möglich sein würde, die erwähnten Ergebnisse der Abbildungstheorie zu erhalten. Ich werde jedoch jetzt zeigen, daß dies in sehr einfacher Weise möglich ist, sodaß die Heranziehung der Lebesgue'schen Theorie tatsächlich als eine bedeutende Verkomplizierung erscheint.

Zu dem Zwecke verallgemeinere ich einen Satz von Schwarz.

Satz von Schwarz: Es sei $\varphi(z)$ eine analytische Funktion von z, regulär oberhalb einer gewissen Strecke a der Achse des Reellen, welche ferner die Eigenschaft hat, daß ihre Werte bei Annäherung an die Strecke a gleichmäßig sich einem konstanten Werte nähern. Alsdann verhält sich die Funktion $\varphi(z)$ auch noch auf der Strecke a selbst regulär, und es ist die Funktion $\varphi(z)$ überhaupt eine Konstante.

Erweiterung des Schwarz'schen Satzes: Die Erweiterung besteht in folgender Modifikation der Voraussetzungen: Es wird nur verlangt, daß man in beliebiger Nähe der Strecke a noch eine längs a sich hinziehende Linie σ finden kann, auf welcher die Werte der Funktion $\varphi(z)$ sich von einer festen Konstanten beliebig wenig unterscheiden und daß außerdem die Funktion in dem betrachteten Bezirke beschränkt sei. Unter diesen weiteren Voraussetzungen bleibt die Behauptung bestehen [1]).

Es ist wichtig zu bemerken, daß über die Länge der Linie σ keine Voraussetzung gemacht wird, sodaß also diese Länge insbesondere beliebig groß werden kann. Ferner bemerke man, daß man offenbar jederzeit die Linie σ aproximativ durch einen ge-

1) Hieraus ergibt sich auch sofort das von Osgood l. c. pag. 235 mitgeteilte „physical law".

brochenen geradlinigen Streckenzug ersetzen kann, längs welchen dann ebenfalls die für $\varphi(z)$ erfüllten Voraussetzungen gelten.

Zum Beweise der Erweiterung betrachten wir den reellen Teil u der Funktion $\varphi(z)$ innerhalb einer an a anschließenden Halbkreisfläche mit einem Stück a' von a als Durchmesser und können annehmen, daß der erwähnte konstante Wert null sei. Die Halbkreislinie heiße h. Die Linien h und σ begrenzen ein einfach zusammenhängendes Flächenstück β, dessen vollständige Begrenzung von einem Teile h' der Linie h und einem Teile σ' der Linie σ gebildet wird. Wird σ den Voraussetzungen entsprechend näher und näher an a gewählt, so geht β in die Halbkreisfläche über. Ist Γ die Green'sche Funktion des Bereichs β für einen festen Punkt P_0 innerhalb β als Unendlichkeitsstelle, G die entsprechende Green'sche Funktion der Halbkreisfläche, so behaupte ich, daß

$$(1) \qquad u(P_0) = \frac{1}{2\pi}\int_h u \frac{dG}{dn}\, ds$$

gilt. In der Tat hat man

$$(2) \qquad u(P_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{h'+\sigma'} u \frac{d\Gamma}{dn}\, ds$$

und kann, da offenbar ist

$$G > \Gamma, \qquad \lim \Gamma = G, \qquad \int_{\sigma'} \frac{d\Gamma}{dn}\, ds < 2\pi,$$

den Grenzübergang in der Formel (2) ausführen, um zu Formel (1) zu gelangen, welche Formel zeigt, daß $u(P)$ auch noch auf a regulär ist und den konstanten Wert null hat.

Demnach ist, da dieselbe Überlegung für den imaginären Teil von $\varphi(z)$ gilt, die Funktion $\varphi(z)$ in der Tat eine Konstante, nämlich null.

Unser neuer Hülfssatz hat jetzt unmittelbar den Osgoodschen und den Osgood-Study-Carathéodory'schen Satz im Gefolge, indem die Annahme des Gegenteiles innerhalb des Einheitskreises offenbar das Vorkommen von Kurven besagt, welche die Rolle der Linien σ des Hülfssatzes übernehmen können, wobei nur an Stelle einer geradlinigen Strecke a ein Stück der Peripherie des Einheitskreises tritt.

Ich beabsichtige ausführlicher an anderer Stelle im Zusamenhange einer größeren Abhandlung über die konforme Abbildung von Bereichen auf diese Dinge zurückzukommen.

Seismische Registrierungen in Göttingen im Jahre 1911.

Von

A. Ansel.

Vorgelegt von E. Wiechert in der Sitzung vom 20. Juli 1912.

Mit 7 Figuren im Text und einer Tafel.

Einleitung.

Der vorliegende Bericht enthält die Zusammenstellung der im Jahre 1911 am kgl. Geophys. Institut registrierten Erdbeben nebst den Resultaten der Analyse. In der Einleitung wird eine Methode zur graphischen Auflösung sphärischer Dreiecke beschrieben.

Die Bearbeitung der Seismogramme lag bis zum 1. März 1911 in Händen von Dr. L. Geiger, die übrige Zeit hindurch wurde sie vom Verf. ausgeführt.

Als Grundlage des Jahresberichtes dienten die wöchentlichen Erdbebenberichte des Institutes, die einer nochmaligen Durchsicht unterzogen worden sind. Im ganzen wurden im Berichtsjahre 170 Erdbeben registriert, ca. 100 davon hatten ihren Ursprung in den Entfernungen über 5000 km.

Am Schlusse ist eine Übersicht über die an jedem Tage 7^h Greenwich-Zeit herrschende mikroseismische Unruhe gegeben, wo Angaben fehlen, war die mikros. Bodenbewegung entweder nicht vorhanden oder innerhalb der Fehlergrenze der Messung.

Die in früheren Berichten beschriebenen Seismographen des Institutes haben keine Veränderung erfahren, sie waren das ganze

Jahr hindurch ununterbrochen in Betrieb, ihre Wartung oblag dem Hauswart Herrn Hilke. Die Konstantenbestimmung erfolgte durchschnittlich monatlich, erhebliche Änderungen der Konstanten zeigten sich nicht.

Die Uhrkontrolle wurde durch die Einrichtung einer radiotelegraphischen Empfangsstation erleichtert, als hiermit die täglich von der Station Norddeich gegebenen Zeitsignale aufgenommen werden konnten. Mit Rücksicht auf die vorkommenden Ungenauigkeiten der Zeitsignale, deren Korrektion nicht bekannt war, wurde die astronomische Zeitbestimmung beibehalten; Uhrstand und Gang wurden aus der astronomischen Beobachtung hergeleitet. Die Zeitbestimmungen erfolgten in nach der Witterung bemessenen Intervallen von 14 Tagen bis 3 Wochen, die Zeit wurde aus den Meridiandurchgängen von Sternen bestimmt.

Graphische Auflösung sphärischer Dreiecke.

Die sph. Trigonometrie wird in der praktischen Seismik verwendet zur Berechnung von sphärischen Abständen, Azimuthen etc., zur Lokalisierung von Epizentra. In allen diesen Fällen sind sph. Dreiecke aufzulösen, die je nach den gegebenen Bestimmungselementen im allgemeinen nach verschiedenen Formeln zu berechnen sind. Die Resultate der Rechnung besitzen jedoch meist nur ein vorübergehendes Interesse, daher das Bestreben, die oft umständlichen Rechnungen abzukürzen, verständlich ist. Erleichterungen lassen sich erzielen durch Tabellen und Anlage geeigneter Rechenschemata; wegen der besonderen Art der bei der Auflösung von sph. Dreiecken im allgemeinen zu benützenden Formeln lassen sich jedoch Tabellen zur Auflösung beliebiger sph. Dreiecke nicht aufstellen. Die nächste Möglichkeit Ersatz für die Rechnungen zu erhalten liegt in den graphischen Methoden.

Im Folgenden soll eine graphische Methode beschrieben werden, die allgemeine sph. Dreiecke aufzulösen erlaubt, vorausgesetzt, daß die nötige Anzahl Bestimmungselemente, gleichgültig in welcher Kombination, gegeben ist.

A. Zur einfachen Darstellung der Methode eignet sich der Spezialfall eines sph. Dreiecks, von dem 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Es seien θ_1, θ_2 die Poldistanzen und λ der Längenunterschied zweier Punkte, und die Winkel (α_1, α_2).

Die gesuchten Elemente: die Seite c und die Winkel α_1, α_2 (s. Fig. 1) ergeben sich z. B. aus den „Gauß'schen Formeln“, diese lauten:

$$1)\quad \begin{aligned} \cos \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \frac{c}{2} &= \cos \tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \sin \frac{\lambda}{2} \\ \sin \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \frac{c}{2} &= \cos \tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \cos \frac{\lambda}{2} \cdot \end{aligned}$$

$$2)\quad \begin{aligned} \cos \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \frac{c}{2} &= \sin \tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \sin \frac{\lambda}{2} \\ \sin \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \frac{c}{2} &= \sin \tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \cos \frac{\lambda}{2} \cdot \end{aligned}$$

Abkürzungsweise werde gesetzt:

$$3)\qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2) &= p \qquad & \tfrac{1}{2}(\theta_1+\theta_2) &= \frac{s}{2} \\ \tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2) &= q \qquad & \tfrac{1}{2}(\theta_1-\theta_2) &= \frac{d}{2} \end{aligned}$$

$$\text{und } \frac{\lambda}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2}.$$

Fig. 1.

Werden nun die 2ten Reihen der Gleichungen (1) und (2) mit $\sqrt{-1} = i$ multipliziert und zu den ersten addiert, so folgt unter Berücksichtigung der eingeführten Abkürzungen:

$$4)\qquad \begin{aligned} e^{ip}\cos\frac{c}{2} &= \cos\frac{s}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + i\cos\frac{d}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \quad & e^{ip} &= \cos p + i\sin p. \\ e^{iq}\sin\frac{c}{2} &= \sin\frac{s}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + i\sin\frac{d}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \quad & e^{iq} &= \cos q + i\sin q. \end{aligned}$$

Deuten wir

$$5)\qquad \begin{aligned} z &= e^{ip}\cos\frac{c}{2} \\ z' &= e^{iq}\sin\frac{c}{2} \end{aligned}$$

als Punkte in der Ebene der komplexen Zahlen, so bleiben bei konstanten Werten von $\cos\frac{c}{2}$, $\sin\frac{c}{2}$ die Punkte z, z' auf Kreisen, für $p =$ konst., $q =$ konst. dagegen auf Geraden durch den Ursprung. Indem man die Werte von $\cos\frac{c}{2}$, $\sin\frac{c}{2}$ variiert, erhält man eine konzentrische Kreisschar; analog ergeben die Parameterwerte von p oder (q) = konst. eine Geradenschar durch den Ursprung. Eine solche aus konzentrischen Kreisen und Radien bestehende Linienschar sei vorhanden (s. Tafel) und es handle sich darum $\frac{c}{2}$, p, q aus $\frac{s}{2}, \frac{d}{2}, \frac{\gamma}{2}$ zu finden; sobald z, z' bekannt sind, ergeben sich die gesuchten Größen ohne weiteres, denn z. B. z liegt auf dem Kreis mit dem Radius $\cos c/2$ und auf der durch p gekennzeichneten Richtung einer Geraden durch den Ursprung. Nun kann z aus den bekannten Größen leicht gefunden werden vermöge der Beziehung:

$$6)\qquad z = \cos\frac{s}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + i\cos\frac{d}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Die Koordinaten des Punktes $z = x + iy$ gemäß Gl. 6) sind

$$x = \cos\frac{s}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$y = \cos\frac{d}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ich nehme nun an, es befinde sich auf dem äußersten Kreis, dessen Parameterwert $\cos 0^0 = 1$ ist, eine Gradteilung (s. Tafel), ferner sei die Kreisschar von $\cos 0^0$ bis $\cos 90^0$ durch die beigeschriebenen Parameterwerte ($1^0, 2^0 \ldots$ etc.) gekennzeichnet. Auf dem geteilten Kreise wird zuerst der Winkel $\gamma/2$ aufgesucht und durch eine Gerade mit dem Ursprung verbunden, man sucht nun auf dieser Geraden ihre Schnittpunkte mit den Kreisen von den Radien: $\cos\frac{s}{2}$, $\cos\frac{d}{2}$, $\sin\frac{s}{2}$, $\sin\frac{d}{2}$, welche durch die bekannten Werte von $\frac{s}{2}, \frac{d}{2}$ bestimmt sind; eine durch den Punkt $\left(\cos\frac{s}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$[1] zur y-Achse gezogene Parallele liefert die Abszisse x und die zur x-Achse gezogene Parallele durch den Punkt $\left(\cos\frac{d}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$ liefert die Ordinate des gesuchten Punktes, somit ist z also auch $\cos\frac{c}{2}$, und p bestimmt. In der praktischen Ausführung vereinfacht sich die Konstruktion, da die Parallelen zu den Koordinatenachsen gleich so gezogen werden, daß sie sich in dem gesuchten Punkt z schneiden. Die Richtung p wird durch die Gerade erhalten, welche durch den Ursprung und den Punkt z hindurchgeht, sie schneidet auf der Gradteilung den Winkel p ab. Um auch q zu finden, ist es notwendig, die Gleichung

$$e^{iq}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{q}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + i\sin\frac{d}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

aufzulösen. Man kann dazu das gleiche Nomogramm benutzen, wenn der Radiusteilung des Nomogrammes die auf den sin bezügl. Parameterwerte beigelegt werden. Die Kreisschar bleibt unverändert, ihre Parameterwerte sind aber jetzt komplementär zu den

1) In Polarkoordinaten; $\left(\cos\frac{s}{2} = \text{Radius}, \frac{\gamma}{2} = \text{Winkel des Radiusvektors mit der Abszissen-Achse}\right)$.

früheren [1]). Das ganz analoge Verfahren wie zuvor führt zu: $\sin\frac{c}{2}$ u. q.

Der Wert von $\frac{c}{2}$ wird zweimal unabhängig gefunden; da $\frac{c}{2}$ einmal aus dem cos das andere Mal aus dem sin hervorgeht, so wird die Genauigkeit erhöht, denn in dem Bereich wo cos versagt, liefert sin den genaueren Wert und umgekehrt. Nachdem p und q gefunden, erhält man die gesuchten Winkel α_1, α_2 durch Addition und Subtraktion:

$$\alpha_1 = p + q$$
$$\alpha_2 = p - q.$$

Sind auch die Winkel gefunden, so hat man über ihre Lage im sphärischen Dreieck zu verfügen; Fehler in der richtigen Zuordnung von Seiten und Winkeln werden vermieden, wenn man beachtet, daß der größeren Dreiecksseite der größere Winkel gegenüber liegt.

Die Anwendung der graphischen Methode setzt das Nomogramm als fertig voraus, es ist, da nur Kreis- und Geradenscharen zu zeichnen sind, leicht herstellbar. Da ferner nur halbe Winkel- und Seitensummen vorkommen, die in den praktischen Fällen $< 90^0$ bleiben, so genügt es, in der Ebene nur einen Quadranten mit den Linienscharen zu überdecken. Die Radien der Kreisschar folgen der $\left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}$-Teilung, soll daher das Nomogramm für den praktischen Gebrauch von Wert sein, so muß diese Teilung möglichst exakt ausgeführt werden. In dem Original, von dem eine im halben Maßstab gezeichnete Kopie in der Tafel beigegeben ist, wurde die Teilung mittelst eines Präzisionsapparates von Wahnschaffe hergestellt; der Apparat ist im Besitz des Institutes für angewandte Mathematik, und konnte dank der Liebenswürdigkeit von Herrn Prof. Runge vom Verfasser zur Herstellung der Teilung benutzt werden.

Die Art und Aufeinanderfolge der graphischen Operationen bei der Auswertung eines Dreiecks mögen an einem Beispiel gezeigt werden. Es seien die geographischen Koordinate zweier Punkte:

$$\varphi_1 = 51^0\,31'\,N \qquad \lambda_1 = 9^0\,58'\,E$$
$$\varphi_2 = 33^0\,52'\,S \qquad \underline{\lambda_2 = 151^0\,14'\,E}$$
$$\lambda = 141^0\,16'.$$

1) Das in der Tafel beigegebene Nomogramm enthält nur die nach dem cos fortschreitenden Parameter, während in dem Original die auf sin und cos bezügl. Parameter durch zweifarbige Beschriftung (rot und schwarz) von einander unterschieden wurden.

Man bildet zunächst die Poldistanzen, bezogen auf den Nordpol sind diese:

$$\theta_1 = 38^0\,29'$$
$$\theta_2 = 123^0\,52'.$$

Daraus ergeben sich:

$$\frac{s}{2} = 81^0\,10.5$$
$$\frac{d}{2} = 42^0\,41.5$$

und aus dem Längenunterschied hat man $\frac{\gamma}{2}$ zu bilden

$$\frac{\gamma}{2} = \left(90 - \frac{\lambda}{2}\right) = 19^0\,22'.$$

In dem Nomogramm wird auf dem Rand der geteilten Kreise der Wert $\frac{\gamma}{2}$ aufgesucht und durch eine Gerade oder ein Lineal mit dem Koordinatenanfang verbunden. Diese Gerade sei OP (s. Fig. 2). Es werden nunmehr die 4 Schnittpunkte dieser Graden mit den Kreisen:

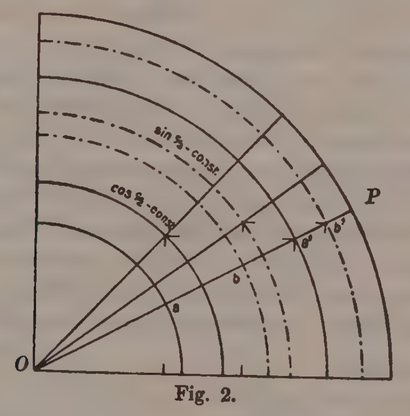


Fig. 2.

$$\begin{Bmatrix} \cos\frac{s}{2} = \text{const}_1 \\ \cos\frac{d}{2} = \text{const}_1 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \sin\frac{s}{2} = \text{const}_2 \\ \sin\frac{d}{2} = \text{const}_2 \end{Bmatrix}$$

die einfach durch die Werte $\begin{Bmatrix} \frac{s}{2} \\ \frac{d}{2} \end{Bmatrix}$, etwa cos durch schwarze, sin

durch rote Beischrift kenntlich sind, aufgesucht. Die bezügl. Schnittpunkte seien: $a\,a'$, $b\,b'$; durch die Punkte

$$a \sim \left\{\begin{matrix} OP \\ \cos\frac{s}{2} \end{matrix}\right\}, \quad b \sim \left\{\begin{matrix} OP \\ \cos\frac{d}{2} \end{matrix}\right\}$$

wird je eine Gerade // zur y-Achse und durch die Punkte:

$$a' \sim \left\{\begin{matrix} OP \\ \sin\frac{s}{2} \end{matrix}\right\}, \quad b' \sim \left\{\begin{matrix} OP \\ \sin\frac{d}{2} \end{matrix}\right\}$$

je eine Gerade // zur x-Achse gezogen. Der Schnittpunkt der Achsenparallelen durch $a\,a'$ liegt auf dem gesuchten Kreise $\cos\frac{c}{2} = \text{const}$ und bestimmt die Richtung p, analog gibt der Schnittpunkt der Achsenparallelen durch b, b' den Kreis $\sin\frac{c}{2} = \text{const.}$ und die Richtung q. Die gesuchte Seite $\frac{c}{2}$ ist zweimal bestimmt, außerdem sind p und q erhalten, die addiert und subtrahiert die gesuchten Winkel (α_1, α_2) ergeben.

Damit das Ziehen der Parallelen schnell und sicher ausgeführt werden kann, empfiehlt es sich, das Nomogramm auf ein Reißbrett aufzuziehen, dessen mit Metallschienen zur Parallelführung der Reißschiene versehenen Kanten genau den Koordinatenachsen der Zeichnung parallel sein müssen. Mit ein wenig Übung läßt sich dann die graphische Rechnung vollständig in etwa 2 Minuten ausführen.

Die graphisch erhaltenen Werte der gesuchten Seite und der Winkel in dem obigen Beispiel seien zum Vergleich den mittelst 4stelliger Logarithmen berechneten gegenübergestellt.

	Graphisch:	Berechnet:
Dist.	73° 30′	73° 36′
Azimuth I	N 72° 45′ E	N 72° 42′ E
II	N 45° 40′ W	N 45° 50′ W.

Die theoretisch zu erwartende Differenz zwischen graphisch und rechnerischer Auswertung beträgt in Distanz und Azimuth in diesem Falle 2′ bis 3′, die wirkliche Abweichung ist etwas größer, sie beruht auf kleinen Ungenauigkeiten, die bei der Zeichnung des Nomogrammes entstanden sind.

Im vorliegenden Beispiel war das Dreieck aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bestimmt, das duale Gegenstück

hierzu ist ein Dreieck, von dem 2 Winkel und die eingeschlossene Seite bekannt sind. Die graphische Auflösung ist in beiden Fällen die nämliche, sobald die Gleichungen (1, 2) dem jeweiligen Fall angepaßt werden. Sind die Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, so gelten die Gleichungen (1, 2), ist dagegen eine Seite und 2 Winkel gegeben, so sind in den Gleichungen die auf Seiten und Winkel bezügl. Größen zu vertauschen. Es lauten demnach die Formeln für den 2. Fall:

$$
7) \quad \begin{aligned} e^{\frac{is}{2}} \cos\frac{\gamma}{2} &= \cos p \cos\frac{c}{2} + i \cos q \sin\frac{c}{2} \\ e^{\frac{id}{2}} \sin\frac{\gamma}{2} &= \sin p \cos\frac{c}{2} + i \sin q \sin\frac{c}{2}. \end{aligned}
$$

B. Mittels dieser Gleichungen (7) läßt sich in Verbindung mit dem Nomogramm auch ein sphärisches Dreieck, dessen 3 Seiten bekannt sind, graphisch auflösen. Dabei sei zunächst angenommen, daß $\frac{s}{2}$ und $p < 90^0$ sind. In dem Nomogramm sind die Kreise $\cos\frac{c}{2}$, $\cos\frac{s}{2}$, $\cos\frac{d}{2}$ als gegeben zu betrachten, es befindet sich der Kreis $\cos\frac{c}{2} =$ const. zwischen denjenigen $\cos\frac{d}{2} =$ const. und $\cos\frac{s}{2} =$ const. und da die Lösung notwendig eindeutig sein muß, so kann es auf dem Kreise $\cos\frac{c}{2} =$ const. nur einen Punkt geben,

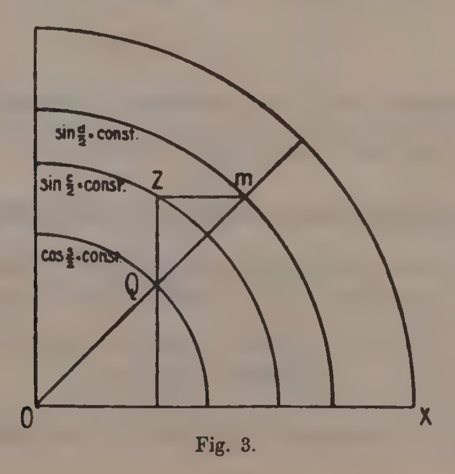


Fig. 3.

welcher der Bedingung genügt, daß die durch ihn zu den Achsen gelegten Parallelen ein rechtwinkliges Dreieck bilden mit der Geraden (O, Q, M) durch den Ursprung und durch die Schnittpunkte Q, M der beiden Kreise mit den Achsenparallelen.

Durchläuft die Gerade (OM) den Quadranten des Nomogrammes, so bewegt sich der Punkt z auf einer Ellipse und da der gesuchte Punkt ebensowohl auf dem Kreise $\cos\frac{c}{2} = \text{const.}$ liegen soll, so wird er aus dem Schnitt des Kreises mit der Ellipse erhalten. Setzen wir dazu:

$$x = \cos\frac{s}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$
$$y = \cos\frac{d}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

als Koordinaten des gesuchten Punktes und eliminieren hieraus $\left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, so folgt:

$$\frac{x^2}{\cos^2\frac{s}{2}} + \frac{y^2}{\cos^2\frac{d}{2}} = 1.$$

Die Koordinaten des Schnittpunkts dieser Ellipse mit dem Kreise $\cos\frac{c}{2} = \text{const.}$ werden aus:

$$\left|\begin{matrix}\dfrac{x^2}{\cos^2\frac{s}{2}} + \dfrac{y^2}{\cos^2\frac{d}{2}} = 1\\ x^2 + y^2 = \cos^2\frac{c}{2}\end{matrix}\right|$$

durch Elimination einer der Koordinaten erhalten. Es sei diese z. B. y, und zur Abkürzung werde gesetzt $\cos\frac{s}{2} = r_1$ $\cos\frac{c}{2} = r$ $\cos\frac{d}{2} = r_2$, dann führt die Auflösung der Gl. nach x zu:

$$\frac{x^2}{r_2^2 - r^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

oder

$$\frac{x}{\sqrt{r_2^2 - r^2}} = \frac{r_1}{\sqrt{r_2^2 - r_1^2}}.$$

Nun stellen die Nenner $\sqrt{r_2^2 - r_1^2}$, $\sqrt{r_2^2 - r^2}$ die Katheten der aus

(r_2, r_1) $(r_2 r)$ gebildeten rechtwinkligen Dreiecke dar, daher die Konstruktion: man errichtet in den Punkten r_1, r, der Abszisse Senkrechte bis zum Schnitt mit dem Kreise $r_2 = \text{const.}$, diese Schnittpunkte werden auf die Ordinatenachse projiciert. Eine Parallele zu der Verbindungslinie der Punkte ($x_1 = r_1$; $y_1 = 0$; $x_2 = 0$; $y_2 = b$, in Fig. 4 der obere der beiden Schnittpunkte auf der Ordinatenachse) durch den zweiten auf die Ordinatenachse projicierten Punkt schneidet auf der Abszissenachse die Abszisse x des gesuchten Punktes ab; eine Senkrechte von diesem Punkte schneidet den Kreis $r = \text{const.}$ und liefert somit z; p und $\frac{\gamma}{2}$ der Punkte z werden nun durch die Richtungen OZ, OM erhalten und auf dem geteilten Kreise im Winkelmaß abgelesen.

Eine zur x Achse parallele Gerade durch den Punkt z muß den Kreis r_2 und die Gerade On in ihrem Schnittpunkte treffen, dies kann als Probe für die Richtigkeit der Konstruktion aufgefaßt

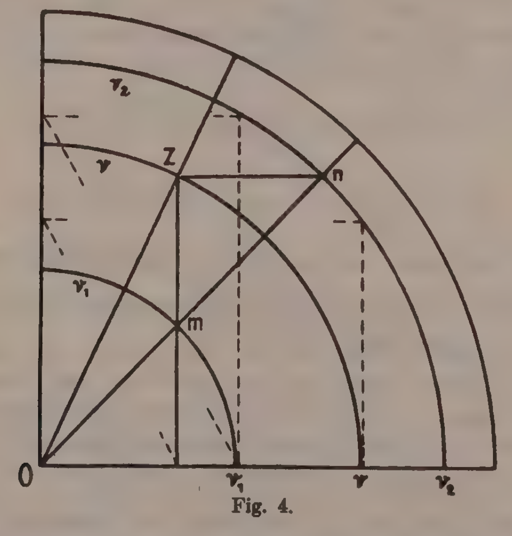


Fig. 4.

werden. Nachdem so $\frac{\gamma}{2}$ und p gefunden worden sind, ergibt sich q entweder nach dem früheren Verfahren (A) oder durch Wiederholung der voranstehenden Konstruktion, wobei an Stelle der cos-Werte die sin-Werte der Parameter treten, also: $r_1 = \sin\frac{d}{2}$, $r_2 = \sin\frac{s}{2}$, $r = \sin\frac{c}{2}$.

Wenn $\frac{s}{2}$ und somit auch $p = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) > 90^0$ sind, so werden die cos dieser Größen negativ, das hat zur Folge, daß der Punkt z in einem anderen Quadranten des vollständigen Nomogrammes sich befindet, indessen reicht das gegebene Nomogramm auch in diesem Falle zur Bestimmung der unbekannten Größen aus. Man hat dazu nur die Achsen zu vertauschen und die Winkel in der entgegengesetzten Richtung zu zählen, oder, was auf dasselbe hinaus kommt, das Nomogramm um 90^0 zu drehen. Die allgemeine Gleichung für z

$$z = e^{ip} \cos\frac{c}{2} = \cos\frac{s}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + i\cos\frac{d}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

geht in dem speziellen Fall $\frac{s}{2} > 90$ mit:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90+\varepsilon$$

$$\frac{a+b}{2} = 90+e$$

über in

$$e^{i\varepsilon}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{d}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + i\sin\frac{e}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

während:

$$e^{iq}\sin\frac{c}{2} = \cos\frac{e}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + i\sin\frac{d}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

im ersten Quadranten aufzusuchen ist. Sollen daher aus 3 Seiten eines sphärischen Dreiecks die Winkel bestimmt werden, wenn $\frac{s}{2}$, die halbe Summe zweier Seiten, $> 90^0$ ist, so ist bei der Konstruktion der Abszissen und Ordinaten von z und z' auf die Lage dieser Punkte in verschiedenen Quadranten Rücksicht zu nehmen. Da hierbei leicht Irrtümer entstehen können, erscheint es zweckmäßig, den Punkt z', der stets im ersten Quadranten bleibt, zunächst zu bestimmen, um danach p_1 und $\frac{\gamma'}{2}$ zu erhalten, die übrigen Winkel lassen sich dann mittelst des graphisch bequem anwendbaren sin-Satzes aus dem Nomogramm entnehmen, das auch den sin-Satz zu lösen gestattet.

C. Es bleibt noch zu zeigen, wie zu verfahren ist, wenn von einem sph. Dreieck 2 $\left\{\begin{matrix}\text{Seiten}\\\text{Winkel}\end{matrix}\right\}$ und ein anliegend. $\left\{\begin{matrix}\text{Winkel}\\\text{Seite}\end{matrix}\right\}$ gegeben, sind.

Es seien z. B. a, b, β gegeben. (a, b = Seiten, β = Winkel.)

Wie die Rechnung, so beginnt auch das graphische Verfahren mit der Bestimmung des Winkels α nach dem sin-Satz:

$$\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha.$$

Dabei ist zu unterscheiden, ob $\sin a \gtreqless \sin b$, im Falle $\sin a > \sin b$ sind 2 Werte für α möglich, für $\sin a < \sin b$ dagegen nur einer. Im Nomogramm läßt sich nun sofort entscheiden, ob α ein- oder zweiwertig ist, denn $\sin a > \sin b$ heißt: der Kreis $\sin a$ = const. hat größeren Radius als der Kreis $\sin b$ = const. oder a liegt näher an 90^0 als b. Die weitere Konstruktion ist sehr einfach: man zieht (s. Fig. 5) die Richtung β und überträgt den Schnittpunkt der Geraden $O\beta$ und des Kreises $\sin a$ = const. parallel auf den Kreis $\sin b$ = const., zieht dann die Richtung On und findet damit α, bzgl. $180 - \alpha$. Die übrigen Elemente werden nunmehr graphisch nach den Gl. (1, 2) bestimmt. Der duale Fall, gegeben 2 Winkel und eine anliegende Seite, wird auf analoge Weise erledigt, und damit sind nun alle vorkommenden Fälle, wo aus 3 gegebenen Elementen ein sph. Dreieck bestimmt werden soll, erschöpft. Die rechtwinkligen sph. Dreiecke sind, weil sie nur Spezialfälle des schiefwinkligen sph. Dreiecks darstellen, in dem gleichen Nomogramm nach denselben Methoden auflösbar, somit eignet sich das Nomogramm, die graphische Methode überhaupt zur Auflösung jedweden sph. Dreieckes, sofern die nötige Anzahl Bestimmungselemente bekannt sind.

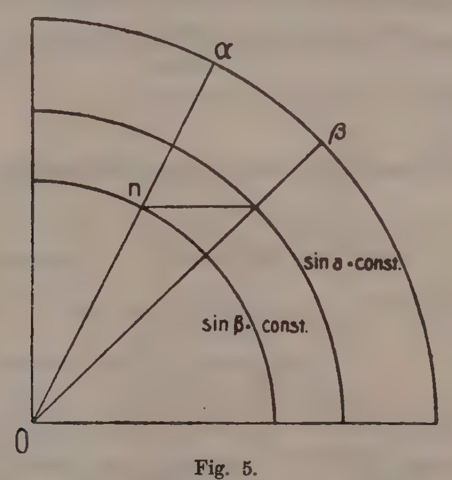


Fig. 5.

Es möge noch kurz auf die graphische Behandlung von einigen

mehr speziellen Aufgaben der sph. Trigonometrie eingegangen werden, die in der praktischen Seismik vorkommen.

I. Es soll die Aufeinanderfolge der Azimuthe in Punkten längs eines größten Kreises, der 2 gegebene Punkte auf der Kugel verbindet, ermittelt werden. Graphisch verfährt man so: man sucht zunächst aus $\theta_1\, \theta_2\, \lambda$ die Winkel $\alpha_1\, \alpha_2$, teilt dann den Winkel λ in n gleiche Teile, diese Winkel im Verein mit $(\theta_1\, \alpha_2)$ oder $(\theta_2\, \alpha_1)$ stellen eine Reihe von sph. Dreiecken dar, von denen 2 Winkel und

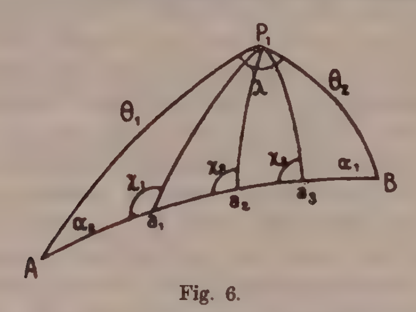


Fig. 6.

die zwischenliegende Seite bekannt sind. Für irgend eines derselben wird der Winkel $\chi_\varkappa$ und die Seite $\begin{Bmatrix} Pa_\varkappa \\ Aa_\varkappa \end{Bmatrix}$ gefunden durch Auflösung der Gleichungen:

$$z = e^{i\frac{s}{2}} \cos\frac{\chi_{(\varkappa)}}{2} = \cos p_{(\varkappa)} \cos\frac{a}{2} + i \cos q_{(\varkappa)} \sin\frac{a}{2}$$

$$z' = e^{i\frac{d}{2}} \sin\frac{\chi_{(\varkappa)}}{2} = \sin p_{(\varkappa)} \cos\frac{a}{2} + i \sin q_{(\varkappa)} \sin\frac{a}{2}$$

$$p_\varkappa = \left(\frac{\alpha_2}{2} + \frac{\varkappa}{n}\cdot\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$q_\varkappa = \left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\varkappa}{n}\cdot\frac{\lambda}{2}\right).$$

Nachdem nun: $\begin{matrix} p_1\, p_2\, p_3 \cdots p_\varkappa \\ q_1\, q_2\, q_3 \cdots q_\varkappa \end{matrix}$ gebildet sind, wird in dem Nomogramm die Gerade mit der Richtung $\frac{a}{2}$ durch den Ursprung gezogen und auf ihr die Schnittpunkte mit den Kreisen

$$\begin{matrix} \cos p_1 = \text{const} \\ \cos q_1 = \text{const} \end{matrix}\Bigg\} \quad \Bigg\{\begin{matrix} \cos p_2 = \text{const} \\ \cos q_2 = \text{const} \end{matrix}\Bigg\}. \begin{matrix} \cos p_\varkappa = \text{const} \\ \cos q_\varkappa = \text{const} \end{matrix}\Bigg\}$$

aufgesucht. In der früher beschriebenen Weise werden nunmehr

die Punkte $z_\varkappa (\varkappa = 1, 2 \ldots)$ bestimmt. Verbindet man die aufeinanderfolgenden Punkte $z_1, z_2 \ldots z_\varkappa$ durch eine Kurve, so geben die Schnitte der Kreise $\cos \frac{\chi}{2} =$ const. mit dieser Kurve die Aufeinanderfolge der halben Werte von χ an, diese sind durch die Parameterwerte der Kreise, welche die Kurve schneiden, direkt gegeben.

II. Häufig wird von einem sphärischen Dreieck nur eines der unbekannten Stücke gesucht, z. B. eine Poldistanz aus dem Azimuth und den anliegenden Seiten, oder die Entfernung aus zwei Poldistanzen in dem Längenunterschied. Hierbei kann man mit Vorteil den sph. Cos. Satz anwenden. Es sei c die gesuchte, a, b gegebene Seite und λ der Längenunterschied. Damit lautet der cos-Satz.

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \lambda,$$

mit:

$$\cos \lambda = 1 - 2 \sin^2 \frac{\lambda}{2} \quad \text{oder:} \quad = 2 \cos^2 \frac{\lambda}{2} - 1$$

erhält man:

$$\cos c \begin{cases} = \cos (a-b) - 2 \sin a \sin b \cos^2 \frac{\lambda}{2} \\ = \cos (a+b) + 2 \sin a \sin b \cos^2 \frac{\lambda}{2} \cdot \end{cases}$$

Mit

$$2 \sin a \sin b = -[\cos (a+b) - \cos (a-b)]$$

$$\text{und} \quad 1 = \cos^2 \frac{\lambda}{2} + \sin^2 \frac{\lambda}{2}$$

folgt:

$$\cos c = \cos (a-b) \cos^2 \frac{\lambda}{2} + \cos (a+b) \sin^2 \frac{\lambda}{2}$$

und hieraus ergeben sich die Ausdrücke:

$$\sin^2 \frac{c}{2} = \sin^2 \left(\frac{a-b}{2}\right) \cos^2 \frac{\lambda}{2} + \sin^2 \left(\frac{a+b}{2}\right) \sin^2 \frac{\lambda}{2}$$

$$\cos^2 \frac{c}{2} = \cos^2 \left(\frac{a-b}{2}\right) \cos^2 \frac{\lambda}{2} + \cos^2 \left(\frac{a+b}{2}\right) \sin^2 \frac{\lambda}{2} \cdot$$

Deutet man $\sin \left(\frac{a-b}{2}\right) \cos \frac{\lambda}{2}$ als Abszisse, $\sin \left(\frac{a+b}{2}\right) \sin \frac{\lambda}{2}$ als Ordinate, dann ist $r = \sin \frac{c}{2} =$ const. der Radius eines Kreises, entsprechendes gilt, wenn die sin mit den cos gemäß obiger Gleichung

vertauscht werden. Für gegebene Werte von a, b und λ erhält man c aus dem Diagramm wie folgt: auf der Peripherie des geteilten Kreises wird der Winkel $\frac{\lambda}{2}$ mittelst eines Lineales eingestellt,

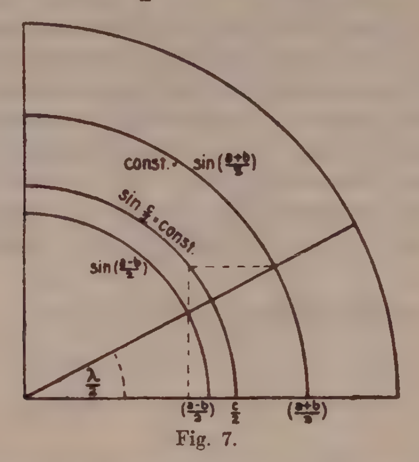


Fig. 7.

dessen Kante durch den Ursprung geht. Auf der Geraden werden die Schnittpunkte mit den Kreisen: $\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) = \text{const.}$, $\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) = \text{const.}$ aufgesucht, und die Ordinate des Punktes, der durch den Schnitt der Geraden mit dem Kreis $\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) = \text{const.}$ erhalten wird, zu der Abszisse des ersten Punktes zugeordnet. Der Endpunkt der Ordinate liegt auf dem Kreis $\sin\frac{c}{2} = \text{const.}$ Die Konstruktion geht am einfachsten aus voranstehender Figur hervor.

Zeichenerklärung.

Charakter des Erdbebens:

I = merklich, II = auffallend, III = stark.
d = (terrae motus domesticus) = Ortsbeben (am Orte fühlbar).
v = („ „ vicinus) = Nahbeben (unter 1000 km).
r = („ „ remotus) = Fernbeben (1000—5000 km).
u = („ „ ultimus) = sehr fernes Beben (über 5000 km).

Phasen:

P = (undae primae) = erste Vorläufer (Longitudinalwellen).
PR_n = n mal an der Erdoberfläche reflektierte erste Vorläufer.
S = (undae sekundae) = zweite Vorläufer (Transversalwellen).
SR_n = n mal an der Erdoberfläche reflektierte zweite Vorläufer.
PS = sog. Wechselwellen, d. h. Wellen, die bei der Reflektion an der Erdoberfläche ihren longitudinalen Charakter in transversalen oder umgekehrt verwandelt haben.
L = (undae longae) = Hauptbeben (lange Wellen).
M = („ maximae) = größte Bewegung im Hauptbeben.
$M_{rep\,I}$ = Oberflächenwellen, die die Station über den Gegenpunkt erreichen.
$M_{rep\,II}$ = Oberflächenwellen, die über Station, Gegenpunkt, Herd die Station zum 2. mal erreichen.
C = (coda) = Nachläufer.
F = (finis) = Erlöschen der sichtbaren Bewegung.

Art der Bewegung:

i = (impetus) = Einsatz.
e = (emersio) = Auftauchen.
T = Periode = doppelte Schwingungsdauer.
A = Amplitude der Erdbewegung, gerechnet von der Ruhelinie aus.
A_N = NS-Komponente von A.
A_E = E-W- „ „ „

Zeit und Maß:

Zeit = mittlere Greenwicher, gezählt von Mitternacht zu Mitternacht.
μ = Mikron = $^1/_{1000}$ Millimeter.

A ist kein geeignetes Maß für die Heftigkeit eines Bebens, sondern $\frac{\Delta g}{g}$, worin g die Beschleunigung der Schwere, Δg deren Änderung ist. Bei periodischen Störungen ist angenähert $\Delta g = \frac{4A}{T^2}$. Wird A in μ, T in Sekunden gemessen, so erhält man Δg in Milligal. 1 Milligal = $^1/_{1000}$ Gal = $^1/_{1000}$ c-g-s-Einheit der Beschleunigung. Weil g = ca. 980 Gal ist, ist 1 Milligal ca. 1 Milliontel der Schwerebeschleunigung g.

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h	m	s	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h	m	s	s	μ	μ	μ	
Jan. 1	II u	P	10	25	40	9	4½	0,8	20	Herddistanz 4600 km E-W-lich.
		PR_1		27	28	14	13	3⅓	40	
		S		32	6	10	6	7	3	
		eSR_1		35,1		14	6½	10	15	
		M		47		17	130	110	30	
		F	12							
„ 1	I u	P	15	7	4	5	2⅓	0,3	2⅔	Herddistanz ca. 4600 km E-W-lich.
		PR_1		8	46	8	4	0,5	4	
		eS		13,3		9	1½	1½	0,8	
		M		31		14	30	10	40	
		F	16¼							
„ 2	I	P	3	44	47	½	—	1	0,6	Mikroseismische Bewegung verdeckt die Vorläufer.
		e		48,6		14	1¼	0,7	2	
		eL		52						
		M		55		14	2½	3⅓	2	
		F	4¼							
„ 2	I u	e	11	13,5		15	1	—	—	
		eL		24						
		M		44		18	4½	4	7	
		F	12¾							
„ 2/3	I u	e	23	12,3		12	1	0,6	—	
		eL		28						
		M_1	0	4		24	6	5	—	
		M_2		15½		18	3	4	7	
		F		1½						
„ 3	I u	P	7	36	37	4	0,3	0,7	1	Herddistanz ca. 6800 km.
		eS		44,9		8	1½	1½	0,6	
		eSR_1		48,9		14	0.9	1½	—	
		eL		54						
		M	8	5½		14	5½	3½	4	
		F	9							
„ 3/4	III u	iP	23	33	59	14	110	40	450	iP nach dem Vertikalpendel. M. konnte nur nach dem 100 kg-Pendel gemessen werden, alle anderen Instrumente schlugen ¼ Std. an ihre Grenzschrauben heftig an, eL beginnt im 100 kg-Pendel mit Periode von 1 Minute. Herddistanz 5250 km. Verheerendes Beben in Turkistan.
		iPR_1		36	3	17	300	100	600	
		iS		40	54	31	2000	850	1000	
		iSR_1		44	10	14	300	250	400	
		M		51		23	?	6500	?	
		F	5							

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Jan. 4	I 4	iP	9 45 46	5	3	1	3*	* Herddistanz ca. 5100 km.
		PR₁	47,5	5	3½	2	2½	
		eS	52,4	12	2½	1⅓	1½	
		eSR₁	59,3	12	4	2½	6	
		M	10 3½	10	35	30	20	
		F	11					
„ 4	I	L	15 26 bis 46	12	1¼	2	—	
„ 4	Iu	eL	21 52					
		M	22 2½	10	10	10	8	
		F	22⅔					
„ 6	I	eL	15 34					
		M	38	18	7	8	10	
		F	52		1			
„ 7	Iu	eS	2 43,0	19	10	10	15	Herddistanz ca. 10000 km. Die ersten Vorläufer sind durch starke mikroseismische Bewegung verdeckt.
		eSR₁	47,9	19	10	12	?	
		eSR₂	52½	19	6	7	?	
		eL	57					
		M	3 19	17	50	30	50	
		F	4¼					
9	I	eL	4 16					Das Vertikalpendel war stehen geblieben.
		M	19½	17	7	10	?	
		F	36					
12	I	e	19 8					
		M	10½	12	6½	6	8	
		F	32					
14	Iu	P	18 2 22	1½	?	0,3	?	Herddistanz 5500 km. P nach dem 17000 kg-Pendel.
		PR₁	4 11	6	2¼	0,9	2	
		eS	9,0	9	1¼	1¼	—	
		eSR₁	12,7	9	1¼	1¼	1½	
		M₁	20	14	10	15	20	
		M₂	30	12	8½	6	12	
		F	19¼					
24	I	L	21 10 bis 21½	11	1	2	—	

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Jan. 25	I	e	1 16					
		S?	19,3	14	6½	13	8½	
		M	24	12	25	15	30	
		F	1⅔					
„ 30	I	e	0 25,9	7	0,8	?	—	Mikroseismische Bewegung verdeckt die Vorläufer.
		eL	31					
		M	33	12	2½	4	3	
		F	0,9					
Febr. 4	I	i	3 43 12	1	—	0,15	—	17 000 kg-Pendel.
		F	48					
„ 5	Iu	iP	4 36 39	4	0,6	—	0,7	Herddistanz ca. 9000 km Ost-West-lich.
		ePR₁	40,1	4	0,6	—	0,5	
		eS	46,1	10	0,7	0,3	—	
		e	47,9	14	1½	0,7	2	
		eL	5 4					
		M	8	29	13	4	10	
		F	5¾					
„ 8	Iv	eP	2 55 40	½	—	0,03	—	17 000 kg-Pendel.
		S	56 51	1	—	0,08	—	In Raibl (Kärnten) gefühlt. Raibl-Göttingen = 623 km.
		M	57 18	1	—	0,5	—	
		F	3 3					
„ 11	I	eL	11 55					
		M	57	21	4	2	—	
		F	12 11					
„ 18	IIIu	iP	18 49 21	5	i:10	2	i:12	Herddistanz 4960 km E-W-lich. M nach dem 100 kg-Pendel.
		PR₁	51 15	15	15	4	?	
		iS	55 59	9	25	i:30	8	
		iSR₁	59 18	12	23	i:50	30	
		M	19 6	25	?	1700	?	
		F	geht in das folgende Beben über.					
„ 18	IIIr	P	21 38 27	12	5½	7	15	Herddistanz ca. 1500 km. Zerstörendes Beben in Monastir.
		eS	40,4	9	7½	12	25	
		M	43	14	300	350	450	
		F	22½					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Febr. 19	Iv	iP	7 20 0	1	?	0,2	?	17 000 kg-Pendel. Zerstörendes Beben in Forli (Oberitalien).
		M	22,6	$1\frac{1}{3}$	?	3	5	
				14	10	8	?	
		F	$7\frac{1}{2}$					
„ 21	I	eL	19 36					
		M	41	12	0,7	1	—	
		F	20,0					
„ 23	Iu	iP	11 26 36	3	3	$1\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{3}$	Herddistanz 9440 km E-W-lich. Mikroseismische Bewegung überlagert die Vorläufer, weshalb A_N und A_Z von SR_1 nicht gemessen werden kann. M ist ganz auffallend kurz und stark, sodaß man im Zweifel ist, ob nicht M das Maximum eines übergelagerten Nahbebens ist. Vorläufer eines solchen Nahbebens sind jedoch nicht zu finden.
		iS	37 8	12	7	3	5	
		eSR_1	43,1	14	$2\frac{1}{4}$	?	?	
		eL	54					
		M	12 10	14	85	60	120	
		F	$12\frac{3}{4}$					
„ 26	Iu	iP?	12 51 44	2	?	?	0,8	Herddistanz ca. 7000 km. Mikroseismische Bewegung überlagert die Vorläufer.
		eS?	13 0,0	20	5	7	9	
		eL	13 5					
		M	16	18	15	15	30	
		F	14					
März 6	I	M	18 23	24	9	12	—	
„ 11	uI	eP	3 35 48					1200 kg-Pendel vergrößert. Zeit 1sec. = 1mm z-Pendel.
		eL	4 20					
		M	4 30	18	21	15	—	Mikroseismische Bewegung überlagert den Einsatz und die Vorläufer.
		F	4 50					
	Ir	iP	20 43 53					
		eL	20 45,3					17 000 kg-Pendel vergrößert. Zeit 1sec. = 5mm.
		M	20 48	16	36	41	115	
		F	21					
„ 13	I	M	15 47	22	11	8	?	Mikroseismische Bewegung überlagert und verdeckt die Vorphase des Bebens.
„ 20	Iv	iP	15 48 44	1,0		—		17 000 kg-Pendel.
		eS	15 50 23	1,4		0,1		Herddistanz ca. 900 km (Romagna, Forli).
		eL	15 51,2					
		M	15 51,6					
		F	15 56,6					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
März 22	I	e	13 23,3	3	?	0,1	?	17 000 kg-Pendel.
		F	13 28,6					Dep. Vaucluse gespürt. 1200 kg-Pendel.
„ 24	Iu	e	3 41 29					
		L	4 3,3					
		M	4 5 6	20	2	4—5	—	
„ 26	I	eL	13 9,5	20—24	2	—	—	
		F	13 21					
		e	13 54,9	8	1	—	—	Von 16h/26. III bis 8h/27. III tauchen wiederholt einzelne Gruppen langer Wellen auf.
		F	14 00					
April 1	Iv	iP	2 21 16	1,0		0,3	—	
		eS	2 22 4	1,4		0,3	—	
		M	2 22,7?					Herddistanzen 400 km.
		F	2 27					
„ 3	Iv	e	15 46 00					
		M	48,0	1,4	—	1,0	—	17 000 kg-Pendel.
		F	50,5					
„ 4	Ir	iP	15 48 4	11 [1,3]	9,4	9 [1,0]	55	12 000 kg-Pendel. [17 000 kg-Pendel.]
		iS	15 51 35	12 [2,0]	9,5	11 [0,7]	30	Herddistanz ca. 2 100 km.
		M	15 52 14	10—12	17,5	17,5	35	
		F	16 37,6	—				
„ 5	Iv	iP	14 30 54	1,6	—	0,4	—	17 000 kg-Pendel.
		M	33,5					„
		F	38					„
„ 7		e	6 54 43					1200 kg-Pendel.
		M	7 29,5	20—22	14	9	16	
„ 10	Iu	iP	18 54 22	7	—	—	4	Vertikal-Pendel
		iS	19 4 21	12	9½	8,0	—	Herddist. ca. 8800 km.
		eL?	19 15,8	24	6,0	6,0	—	1200 kg-Pendel.
		M	19 24,0	24	13	13	—	
		F	20 0,5					
„ 11	Iu	e	13 50	—				
		M	14 45,5	26	12	3	3	1200 kg-Pendel.
		F	15 43					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
April 15		e	12 3,0	—				
		M	12 24,8	20	12	17	13	
„ 17		L	5½—6¼	27	6	5	—	
„ 18	IIr	iP	18 22 1	5	—	—	2	Vertikal-Pendel.
		PR₁	23 37	14	1	—	9	Herddistanz ca. 4300 km.
		iS	28 5	15	9	8	—	1200 kg-Pendel.
		e SP?	29 45	9	5	7	15	
		M	38,0	24	47	52	—	
		F	20					
„ 21		e	3 24 bis 4¼	24—26	2	4	—	Lange Wellen.
„ 24	Iv	iP	17 19 30	0,6	—	0,1	—	17 000 kg-Pendel.
		eS	20 25	0,6-0,7	—	0,1	—	Herddistanz ca. 500 km.
		M	20 36	1	—	0,2	—	(Gefühlt im Arlberg-Gebiet).
		F	20					
„ 28	I	eP	10 4 6	—	—	—	—	Die Aufzeichnung des Bebens wurde durch Arbeiten im Instrumenten-Raume entstellt.
	Iv	e	19 54 45	0,8	—	0,1	—	17 000 kg-Pendel.
		F	59,5					
„ 29	Ir	iP	5 36 21	6	2,8	—	2,6	1200 kg-Pendel.
		PR₁	5 37 49	12	0,9	—	3,0	Herd ca. 4200 km. entfernt.
		eS?	5 42 32	9	—	1,1	—	
		SR?	5 44 58	11	—	0,9	—	
		eL	5 51,0	24	1,9	2,6	—	
		M	5 55,5	20	3,7	4,2	—	
	Iv	eP	6 6 56	1	—	0,1	—	17 000 kg-Pendel.
		M	6 8	2	—	1	—	
		F	6 11					
„ 30	Iu	eL	5 5,5	30	—	—	—	Lange Wellen.
		M	5 13,2	30	12	19	—	
	I	iP	20 46 51	3	—	0,8	1,4	1200 kg-Pendel.
		PR₁	49 7	4	—	1,0	2,6	Herd ca. 2100 km.
		eS	50 26	7	8,2	5,3	3,9	
		SR₁	58 58	8	5,2	2,5	6,5	
		F	21 6,5	—	—	—	—	Keine langen Wellen.
Mai 4	I	eP	13 45 59	4	—	—	—	
		M	14 33	18	4,8	3,9	—	
		F	15					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T.	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Mai 4	III u	i P_I	23 48 9	8	6	12,5	32,0	2 superponierte Beben: Indices I, II.
		i P_{II}	49 8	15	6,3	20,0	100	
		PR_I	23 51 15	14	8,0	15,8	27	Herddistanz ca. 8000 km.
		PR_{II}	23 52 17	12	4,8	10,2	35,0	
		PR_{2I}	23 52 49	12	3,0	15,8	32,0	
		PR_{2II}	23 53 35	12	7,7	25,5	80,0	
		i S_I	23 57 28	15	85,0	16	31,0	
		i S_{II}	23 58 29	17	167	62	68	
„ 5		e L	0 13	22	62	54	57,0	
		M	0 27	18	58	77	75	
		F	2 51					
„ 9	I	e P	19 54 36	4	0,6	—	0,8	Herddistanz ca. 3800 km?
		e S	20 00 10	6	1,5	0,8	—	
		L	20 11½	22				Lange Wellen sehr schwach.
		F	20 36					
„ 10			1 6—20	18—22	1,8	2,5	—	Wellengruppen mit Perioden v. 18—22 sec. der einzelnen Wellen.
„ 11	I	e	5 4½	15	0,7	—	—	
		M	5 25	20	3,0	3,0	—	
		F	5 46					
„ 13	I	e(P)?	3 45 1	4	0,5	0,8	—	
		M	4 13	18—20	2,0	2,0	—	
		F	4 31					
„ 24		e	23 29 34	1—3	—	0,1	—	17 000 kg-Pendel schwaches Beben, unregelm. Wellenzüge, Perioden von 6—15 sec. treten hierbei auf, keine M.
		F	23 42,5					
„ 26		e L	21 10,5	18	2	1	—	
		F	21 45					
„ 30	I v	e P	19 27 3	0,5	—	0,1	—	
		e S	19 27 32	0,6	—	0,2	—	
		F	19 29					
	II v	e P	19 44 11	0,4	—	0,1	—	(17 000 kg-Pendel). In Aachen gefühlt.
		i S	44 42,5	0,5	—	0,3	—	
		M?	19 45 8	5,0	—	2,0	—	1200 kg -Pendel.
		F	19 47					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Mai 31	I v	e P	0 19 29	0,3	—	< 0,1		17 000 kg-Pendel.
		e S?	0 19 57	0,6	—	0,2	—	
		F	0 21					
	I v	e P	2 8 46	—	—	—	—	
		i S	2 9 17	0,6	—	0,3	—	
		F	2 11					
„ 31	I v	e	10 3,5-5,0	0,3	—	0,1	—	Gruppe schwacher Nahbeben, die v. 17 000 kg-P. noch gut aufgezeichnet wurden. Das Auftauchen d. P. geht ganz in mikroseism. Beweg. verloren.
	I v	e—F	15 5½-6½	0,3—1	—	—0,5	—	
		e—F	21 6½-7½	0,3—1	—	—0,5	—	
		e—F	23 29-30		—	< 0,1	—	
Juni 1	I v	e—F	22 53-55		—	—	—	Sehr schwach.
„ 3	I v	e—F	14 37-40	—	—	—	—	„
„ 3	I u	i P	20 40 37	5	—	—	1	Vertikal-Pendel.
		e L	21 32,5	30	—	10	—	
		M	21 42,0	24	2	10		
		F	22 30					
„ 6	III u	i P	11 15 37	5 [6]	6	4,5	13,0	Herd ca. 9800 km.
		PR_1	19 25	12	17,5	6,0	30	Erdbeben in Mexiko.
		PR_2 ?	21 45	12				17 000 kg-Pendel.
		e S	11 26 28	12	32	14	6	
		PS	27 23	16	23	15	2	
		SR_1	32 50	22	45	30	33	
		e L	46,0					
		M	48,6	36	440	260	560	Bemerkenswert ist die große Periode von M.
		F	14 0					
„ 7	I u	e P	19 47 8	—	—	—	—	Vom Vertikal-Pendel nicht aufgezeichnet.
		[e S]?	51 15	—	—	—	—	
		e L	19 55,0	18—20				Herd ca. 2400 km.
		M	19 58,5	13	2,0	2,5	—	
		F	20 20					Einsatz [nach dem Vertikal-Pendel].
„ 8	I v	[i P]	0 4 55	5	2,7	—	1,0	
		e S	9 43	8	3,5	4,0	—	ca. 3100 km Herddistanz.
		PS?	10 23	10	2,2	1,5	—	Keine L; auch M zweifelhaft, ihr T unterscheidet sich jedenfalls nicht von derjenigen der S.
		SR_2	11 28	10	2,3	1,6	—	
		F	1¼	—	—	—	—	

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Juni 15	III u	[i P]	14 38 8	[1,0] [3]	—	[¼] [30]	—	[ ] 17 000 kg-Pendel.
		iP	14 38 13	12,0	90	50	850	Haupt-Einsatz.
		PR_1	41 43	10?	20	25	100	Herd ca. 9000 km entfernt.
		PR_2	14 43 15	14	15	20	20	
		PR_3	44 18	13	12	18	20	
		S	48 21	13	330	240	200	
		PS	49 21	18	400	230	350	
		SR_1	54 54	20	360	150	160	
		SR_2	59 18	23	470	230	200	
		SR_3	15 1 3	23	360	230	150	
		eL	15 12½	30				
		M	15 14,6	24	1200	1000	600	
		F	19					
„ 17	I u	iP	5 23 25	4	—	—	5	Vertikalpendel.
		eL	5 54					
		M	6 5	18	30	15	36	
		F	6½					
„ 25	I u	eP	9 10 49	45	—	—	5	Vertikalpendel.
		PR_1	9 14 21	4	—	—	5	Herd ca. 10 000 km entfernt.
		iS	21 45	8	3,0	2,0	—	
		SR_1	27 59	11	2,0	2,0	—	
		eL	9 41					Keine M.
		F	9 55					
Juli 1		e	22 22 41	6	—	—	—	1200 kg Horiz.-Pendel.
		eL	22 43	30				
		M	22 46½	24	30	30	15	
		F	23 30					
„ 4	II r	iP_I	13 41 26	[2,5] (4)	20	[5] 3	16	[ ] 17 000 kg-Pendel. Herddist. 5000 km.
		iP_{II}	13 42 04	8	16	7	35	Ein zweites Beben überlagert das erste.
		PR_I	42 35	9	30	10	51	
		[PR_{II}]	43 14	10	40	9	50	
		iS	47 59	10	52	35	40	
		PS?	48 40	12	16	14	45	
		SR_I	51 15	12	23	16	30	
		M	51,6	15	80	130	120	Keine lange Wellen.
		F	15½	—				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Juli 5	I	e	2 20 34	2,5	1	—	2	Die Identifizierung der Phasen ist unsicher.
		M	2 39	18	5	10	7	
		F	3¼	—				
		e	18 57 31	?	—	—	—	
		F	20¼	?	—	—	—	Kurze und lange Wellen in unregelmäßiger Aufeinanderfolge; Amplituden verschwindend klein.
„ 7	II v	iP	1 3 52	[2]	?	[1,6]	—	[17 000 kg-Pendel.
		(eS)?	4 27	[2]	?	[9]	?	In Kecskemet (Ungarn) gefühlt.
		M	7 47	5	17	22,0	20	
		F	1½					
	I u	e	5 15 35	12		< ½	—	
		L	53 27	20	2,0	2,5	—	
„ 11	I	ε	21 41,1	?	—	—	—	
		i	21 44 50	8	—	3,0	2,0	
		L	22					
		F	23¼					
„ 12	II u	e	4 21 16	6?	—	—	—	Herd ca. 10 000 km entfernt.
		iP	21 29	6	2½	2½	10	
		PR_1	4 25 19	(6)	6,0	6,0	5	
		PR_2	4 27 40	6	6,0	6,0	4	
		iS	4 31 27	9	18	5	8	
		PS	4 32 19	8—9	9	14	3	
		SR_I?	4 37 51	10—11	5,0	4,0	5,0	Die $SR_{I, II}$ u. s. w. sind nicht mit Sicherheit zu erkennen.
		eL	4 49	50				
		M_1	4 51—56	60	450	450	350	Bemerkenswert die außerordentlich große Periode in M_1 und M_2.
		M_2	4 58	42	280	280	230	
		M_3	5 2	30	210	380	200	
		M_4	5 8—9	27	360	440	300	
		F	10					
„ 13	I u	e	?					Beginn fällt in den Bogenwechsel.
		eL	9 27,5	20	—	—	—	
		M	9 31,7	18	5	5	7	
		F	10					
„ 14	I	eL	2 38,4	24	7	4	—	Andauernde seismische Unruhe.
		F	3 20					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Juli 19	Ir	iP	10 20 29	5—6	—	—	3	1300 kg Vertikal-Seismogr.
		PR_1?	21 03	6	—	—	3	A_E und A_N sind < ½ μ.
		eS?	24 37	8	—	—	1	
		L	50,5	24	—	—	—	
		F	1					
„ 19	I	e	20 43,8	—	—	—	—	Besteht nur aus einigen Wellenzügen, und Phasen zu unterscheiden sind.
		M	21 14	22	2	3½	—	
		F	22½	—	—	—	—	
„ 23	I	e	16 46 58	—	—	—	—	Anfangs fast unmerkliche Bewegung.
		L	17 14½	—	—	—	—	
		M	17 34	18	5	4	—	
		F	18 20	—	—	—	—	
		L	18 43	24	—	—	—	
		M	18 52	21	3	5	—	
		F	19¼	—	—	—	—	
„ 24	Iv	e	2 3,5	—	—	—	—	
		eS	4 47	1,0	—	< 1	—	17 000 kg-Pendel.
		M_1	4 57	1,0	—	1	—	
		M_2	4 7	2,0	—	1	—	
		M_3	5 18	1,8	—	1	—	
		F	3 8					
Aug. 6	I	e	15 9,0	—	—	—	—	
		M_1	15,8	15	1	2	—	1200 kg-Pendel.
		M_2	18,0	12	1	2	—	Vertikal-Seismograph zeigt keine Bewegung.
		F	30					
		e	16 56,7	—	—	—	—	
		M	17 4,1	11	1	2	—	
		F	17 12,0					
„ 8	Iu	e	14 38 6	—	—	—	—	Einsatz nach Vertikalpendel und dem 17 000 t-Pendel.
		eL	15 10,5	30	—	—	—	
		M	15 13,5	20	8	10	—	
		F	16 00					
„ 12	I	e	22 12 2	5	—	—	—	
		M	14,5	12	2	2	½	
		F	20,0					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h m s	T s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
Aug. 16	II u	e P(1	22 55 28	7	2	2	4	Herddist. 9100 km.
		i P(2	23 00 00	10	6	4	22	Zweites Beben wahrscheinlich am gleichen Ort wie das erste.
		i S(1	5 42	10	4	2	—	
		PS ?(1	6 20	12	16	14	—	
		i S(2	10 14	9	8	3	10	
		PS(2	11 4	13	17	5	—	
		SR_1 ?(1	11 36	13 ?	4	3	4	
		SR_1(2	15 8	24 (für beide)	135	120	—	Das nahezu gleichzeitige Eintreffen zweier Wellen gibt zu einer bemerkenswert großen Bodenbewegung Anlaß.
		SR_2(1	15 10					
		SR_3(2	20 30	26	70	60	—	
		e L	32,5	30				
		M_1(1	45,5	21	260	450	310	
		M_1(2	50	19	260	280	200	
		M_2(1	55,5	18	170	110	170	
„ 17		M_2(2	0 1	16	85	42	110	
		F	2					
„ 20	I v	e	2 23 8	—	—	—	—	17 000 kg-Pendel. Nach Mitteilung d. Station Jugenheim ist das Beben im nordöstl. Teile des Odenwaldes gespürt worden.
		M	2 23 13	—	—	—	—	
		F	2 23					
„ 21	I u	i P	16 48 8	8	—	3	6	Epicentrum ca. 8500 km entfernt. Auf i S folgt langanhaltende unregelmäßige Bewegung, in der sich weder L noch M abheben.
		i S	58 1	12	3	7	—	
		M ?	17 46,5	24	8	12	—	
		F	18 30					
„ 23	I u	e P	16 12 9	—	—	—	—	Epicentr. Dist. ca. 6800 km. Eintrittsphasen sind unscharf.
		e S	20 25	12	1	2	—	
		SP	21 00	18	5	6	—	
		e L	27 00					
		M	36,5	20	13	15	15	
		F	17 50					
„ 27	I u	e P	11 11 49	3—4	—	—	—	Epicentraldistanz ca. 9200 km.
		i S	22 6	8	½	½	—	
		PS	22 55	10	—	2	—	
		F	12 15					Keine M.
„ 28	I r	e P	6 36 38	—	—	—	—	Ep. Dist. ca. 2000 km.
		e S ?	39 52	7	3	1	—	
		e L	42,4	—	—	—	—	
		M	44,0	12	9	6	3	
		F	7 10					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Sept. 6	Iu	iP	1 5 24	4—5	1	1	3	Beginn der P. u. S. nach den Aufzeichnungen des 17 000 kg-Pendels. Ampl. u. Per. nach d. Z-Komponente.
		iS	14 29	9	20	3	5	
		PS	14 59	7	5	7	6	
		M??	24 51	18	12	14	20	
		F	2 20					
„ 6	Iv	e	4 22 18	—	—	—	—	17 000 kg-Pendel.
		eS?	22 59	0,7	—	½	—	Distanz ca. 370 km (in Hohenzollern gespürt)?
		M	23 4	0,5—1	—	1	—	
	Iv	e	25 17	—	—	—	—	
		F	26 00					
	IIv	eP?	13 54 53	—	—	—	—	17 000 kg-Pendel.
		eS	55 26	0,2	—	> ¼	—	Beben im Aachener Bezirk gefühlt.
		M	55 31	1	—	5	—	
		F	14					Distanz ca. 300 km.
„ 8	Iu	e	22 55 33	3	—	—	1	
		eS?	23 5 2	7	—	1	—	
		eL	23 22					
		M	23 27	26	ca. 25	ca. 25	10	
		F	24 00					
„ 9	Iv	e	13 20,9	—	—	—	—	
		M	22,4	6—8?	3	3	—	
		F	32					
„ 13	I	e	22 34,0	—	—	—	—	
		M?	34,6	14	6	3	—	
		F	42					
„ 15	Iu		13 23 42	4	—	—	1	
		PR_1	27 45	4	—	—	1	
		iS	34 43	18	20	5	—	
		eL	50					
		M	14 11,4	20	40	15	20	
		F	16 00					
„ 17	I	e	3 36,4	—	—	—	—	3 Beben mit scharfem Einsatz in der Z-Komponente. Horizontalpendel außer Betrieb. Starke mikroseismische Bewegung verdeckt die Einsätze d. H-Komp. von P. u. S.
		iP_1	37 27	3—4	—	—	2	
		iP_2	39 45	4	—	—	2	
		iP_3	51 24	4	—	—	2	
„ 22	Ir	iP	5 12 12	4	—	—	2	
		eL	34,9					
		M	40,7	24	10	12	10	
		F	6 50					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h m s	T s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
Sept. 26		e	14 46,5					
		M	49,4	20	6	7	—	
		F	15 20					
„ 29		i	12 17,6	6	—	—	3	
		F	30					
Okt. 6	I u	iP	10 27 22	5	3	2	3	Herd etwa 8200 km entfernt.
		eS	36 34	6	1	3	—	
		PS?	37 12	10	1	2	—	
		eL	44,5					
		M	48	18	10	40	10	M in der EW-Komponente nicht ausgeprägt.
		F	12 20					
	I	e	15 13	15	2	2	—	
		e	16 27	15	2	2	—	
	I r	e	13 24 42	—	—	—	—	
		iS	35 07	11	—	3	—	
		eL	47	30				
		M_1	51	22	10	20	—	
		M_2	14 2	18	20	15	15	
		F	15					
„ 13	II u	iP	2 45 7	4	1	2	3	Herd ca. 9600 km entfernt. (Ort: Südkalifornien bezw. Mexiko.)
		i	45 22	3	—	—	1	
		iS	54 12	8	3	—	—	
		(e)	3 3,5	20	7	7	—	(Superponierte Wellen anderer Herkunft.)
		eL	3 9	36/40				
		M_1	3 15	24	60	11	15	
		M_2	22	18	45	25	40	
		F	4 15					
„ 14	I u	eP	12 38 4	4/5	—	1	2	17 000 kg-Pendel.
		e	58?	18	4	4	—	
		eL	13 5	32				
		M	14,5	20	25	25	30	
		F	14 50					
		eP	16 47 48	4/5	—	—	½	Herd ca. 8400 km.
		iS	57 46	8	2	1	—	S nur in der NS-Komp. scharf ausgeprägt.
		eL	17 7					
		M	17 18,7	23	9	2	—	
		F	18¼					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Okt. 14	Ir	eP	23 32 24	4	1	—	1	Herddistanz ca. 6200 km.
		eS	41 15	6	3	—	—	
		eL	23 51	46				
		M	55	30	48	60	25	
		F	24 40					
„ 15	I	i	12 1 57	5	—	—	2	Vertikal-Seismogr.
		M	32	24	12	10	14	
		F	13					
„ 15	Iu	e	23 20 ?	18	1	1	—	
		F	40					
„ 17	Iu	iP	12 4 44	4	—	—	1,5	
		eS	14,7	8	—	1	—	Beginn von eS sehr undeutlich.
		M_1	35,4	22	10	6	—	
		M_2	39,0	18	6	5	—	
		F	13 20					
„ 19	Iu	i	10 26 37	—	—	—	—	
		e	34 23	10	—	$1^1/_2$	—	
		M	10 47,5	15	6	3	—	
		M	50,4	12	5	3	3	
		F	11 25					
„ 20	Iu	iP	18 3 6	4	$^1/_2$	—	2	
		i	5 49	5	3	3	5	
		i	6 44	10	3	3	2	
		e?	23 29	12	3	2	—	Vielleicht S oder SR_1.
		eL	40,5					
		M	43,5	30	12	15	20	
		M_1	59,7	26	12	6	17	
		M_2	19 10	18	9	9	10	
		F	20					
„ 22	v	iP	22 37 26	2	—	—	2	Ort des Bebens liegt laut Zeit.-Nachricht in Macedonien.
		e	41 13	6	3	3	$1^1/_2$	
		M	43,0	9	25	23	45	
		F	23					
„ 29	Iu	e	18 35 33	12	$3^1/_2$	1	—	
		e	40 48	15	10	3	—	
		eL	$54^1/_2$					Infolge der starken anhaltenden mikroseismischen Bewegung ist die Bestimmung der Eintrittszeit von P und S nicht möglich.
		M	19 2	30	16	16	—	
		F	20					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Nov. 1	I u	e L	10 7,5					
		M	15,0	18	25	10	20	
		F	40					
„ 2	I u	e	14 20	—	—	—	—	
		M	24	24	10	10	—	
		F	50					
„ 8	I u	i P	14 34 35	4	—	2	—	Herd ca. 8800 km entfernt (Südafrika?).
		e (S?)	44 33	10	—	1	—	
		e L	59	24—26				
		M	15 0-10ᵐ	14	12	12	6	
		F	25					
„ 9		L	5 10-40ᵐ	—	—	—	—	
„ 13	I u	i P	16 24 43	4	—	—	1	
		e S	34,9	6—8	< 1	< 1	—	
		PS?	35 42		—	—	—	
		e L	51	26				
		M	17 3	20	35	40	40	
		F	18 20					
„ 14	I	e	14 6,2	12—15	3	1	4	
		M	13,0	18	4	5	—	
		F	26					
„ 16	II v	(i P)	21 26 42	0,5	—	0,5	—	17 000 kg-Pendel.
		(i)	27 1	1	—	20	—	
		i S	27 37	3	330	120	40	
		M	28 6	4	?	?	110	Schreibnadeln des HP werden abgeworfen, der Vert.-Seismograph bleibt intakt u. schreibt weiter.
		F	50					
„ 17	I u	e	7 58,1	6	—	1	—	In der Berichtswoche herrscht zeitweise sehr starke mikroseismische Bodenunruhe.
		M	8 28	18	10	4	6	
		F	9 ¼					
„ 20	II u	e	14 2 37	6	3	—	—	
		e	12 48	10	2	1	—	
		L	33	24—28				
		M	40	20	25	7	3	
		F	15 20					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Nov. 21	I	L	21 10 bis 25	24	2	2	—	
„ 22	I	e	23 24 35	5	—	—	3	Die Phasen sind nicht zu bestimmen. Anscheinend sind es 2 superponierte Beben.
		e	28 10	6	1	3	3	
		i	34 5	6	$2\frac{1}{2}$	3	—	
		L	52					
		F	0 30					
„ 23	Iv	(e)	2 0 8	—	—	—	—	( ) 17 000 kg-Pendel.
		M	0,3	< 1	—	$\frac{1}{5}$	—	
		F	1					
„ 28	Iu	eL	16 45	—	—	—	—	Die Vorphasen des Bebens gehen in der mikros. Bewegung unter.
		M	53	24	14	20	25	
		F	17 30	—	—	—	—	
„ 28	Id	e	18 39 52					17 000 kg-Pendel.
		M	39 54	0,3	—	$\frac{1}{2}$	—	
		F	40					
Dez. 4	Ir	e	14 44,7	4	—	—	1—2	Mikroseism. Bodenunruhe beeinflußt die Aufzeichnung des Bebens.
		i	49,6	7	3	2	—	
		L	54,1					
		M	57,2	17	10	5	7	
		F	$15\frac{1}{4}$					
„ 6	Iu	eL	23 50,5					Die Phasen-Eintritte lassen sich nicht sicher feststellen, da gleichzeitig starke mikros. Bodenunruhe vorhanden.
		M	59,5	18	12	3	—	
		F	$24\frac{1}{2}$					
„ 11	Iu	e	23 41					Vorphasen sind undeutlich.
		M_1	55	18	6	4	—	
		M_2	25	12	3	2	—	
„ 12		F	$1\frac{1}{2}$					
„ 16	IIr	iP	19 27 20	5	9	6	3	Herddist. ca. 9500 km.
		i	30 52	6	14	6	11	
		eS	38 00	12	7	5	7	
		i	38 36	6	30	20	12	
		PS	38 44	19	45	25	45	
		SR_1	44 6	20	40	20	—	
		M_1	20 $3\frac{1}{2}$	28	85	80	—	
		M_2	7	50	200	500	—	
		M_3	9	16	80	45	30	
		F	22 25					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Dez. 18	Id	e	23 40 53	—	—	—	—	17 000 kg-Pendel.
		M	52	ca. 1/2	—	1	—	
		F	23 42					
„ 20	Iu	eP	6 2 12	12	—	2	10	
		eS	12 23	12	1	3	—	
		SR_1	17 38	24	3	20	—	
		eL	28	30	—	—	—	
		M	43,6	18	6	22		
		F	7 3/4					
„ 23	Iu	e	21 28 24	12	3	—	—	
		e	34 21	13	4	—	—	
		eL	45,1	27				
		M	48	20	10	6	10	
		F	22 40					
„ 29	Iu	eL	16 9,5					
		M_1	10,8	30	9	15	—	
		M_2	22	18	6	4	—	
		F	17 1/4					
„ 31	Iu	e	6 26 55	6	1/2	1/2	—	
		L	1 10	42				
		M_1	3,7	36	20	20	—	
		M_2	13,0	20	15	15	10	
		M_3	23,0	18	15	15	4	
		F	8 3/4					

Mikroseismische Bewegung 1911, 7[h] Greenwich.

Datum	Januar		Februar		März		April		Mai		Juni	
	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E
	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ
1			6	1,2	6	1,0	—	—	—	—	—	—
2	4	0,6	6	1,0	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	4—6	<0,5	—	—	—	—
4	—	—	6	0,6	—	—	—	—	—	—	—	—
5	6	0,6	—	—	6	1,0	—	—	—	—	—	—
6	6	1,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	8	2,6	6	≤0,5	6	0,6	—	—	—	—	—	—
8	8	1,3	—	—	7—8	0,8	—	—	—	—	—	—
9	8	1,6	—	—	8	<0,5	—	—	—	—	—	—
10	6	1,4	—	—	6	<0,5	—	—	—	—	—	—
11	6	<0,5	ca. 6	0,6	8	<0,5	—	—	—	—	—	—
12	6	0,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	6	0,5	6	0,6	—	—	—	—	—	—	—	—
14	—	—	6	1,0	6—8	≤0,5	—	—	—	—	—	—
15	—	—	6—7	<0,5	—	—	6—7	0,5	—	—	—	—
16	7	1,8	6	1,1	—	—	6	≤0,5	—	—	—	—
17	6	3,4	4	1,2	—	—	—	—	—	—	—	—
18	6	2,8	6	1,8	4—6	≤0,6	—	—	—	—	—	—
19	6	0,6	6	1,0	—	—	5	1,4	—	—	—	—
20	—	—	6	<0,5	—	—	7	0,5	—	—	—	—
21	7	1,1	7	0,5	—	—	—	—	—	—	—	—
22	6	1,1	6	<0,5	—	—	—	—	—	—	—	—
23	—	—	ca. 6	<0,5	—	—	—	—	—	—	—	—
24	—	—	8	1,6	—	—	—	—	6	<0,5	—	—
25	7	1,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
26	7	2,1	6	0,5	—	—	—	—	—	—	—	—
27	7	2,7	7	2,1	—	—	—	—	—	—	—	—
28	6	<0,5	6	0,5	ca. 6	<0,5	—	—	—	—	—	—
29	6	<0,5			—	—	—	—	—	—	—	—
30	—	—			—	—	—	—	—	—	—	—
31	6	<0,5			—	—			—	—		

Mikroseismische Bewegung 1911, 7h Greenwich.

Datum	Juli		August		September		Oktober		November		Dezember	
	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E
	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ
1	—	—	—	—	—	—	4	<0,5	4—5	0,9	7—8	1,6
2	—	—	—	—	—	—	6	0,9	6	<0,5	9	2,6
3	—	—	—	—	—	—	—	—	7	1,3	9	2,6
4	—	—	—	—	—	—	—	—	7—8	2,6	8	1,4
5	—	—	—	—	—	—	—	—	9	2,5	8	1,3
6	—	—	—	—	—	—	—	—	6	1,1	8	0,9
7	—	—	—	—	—	—	—	—	6—8	1,6	8	1,3
8	—	—	—	—	—	—	—	—	6	<0,5	6—7	1,1
9	—	—	—	—	—	—	—	—	7	1,1	6	1,1
10	—	—	—	—	—	—	—	—	ca. 6	<0,5	6—7	1,6
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	ca. 6	<0,5
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	—	—	—	—	—	—	—	—	6—7	0,6	ca. 6	<0,5
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
15	—	—	—	—	—	—	—	—	6	1,1	—	—
16	—	—	—	—	—	—	—	—	7	1,6	—	—
17	—	—	—	—	—	—	—	—	7	1,1	—	—
18	—	—	—	—	—	—	—	—	7	0,5	—	—
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
22	—	—	—	—	—	—	6	<0,5	—	—	—	—
23	—	—	—	—	—	—	6—8	1,0	—	—	—	—
24	—	—	—	—	—	—	—	—	5—6	<0,5	—	—
25	—	—	—	—	—	—	4	<0,5	—	—	—	—
26	—	—	—	—	—	—	7	1,1	6	0,5	6—8	0,5
27	—	—	—	—	—	—	8	1,1	6	0,5	—	—
28	—	—	—	—	—	—	8	2,6	ca. 4—6	<0,5	—	—
29	—	—	—	—	—	—	—	—	6	<0,5	6	<0,5
30	—	—	—	—	—	—	ca. 6	0,9	6	0,9	—	—
31	—	—	—	—			6	1,1				

Über Annäherung durch Polynome, deren sämtliche Wurzeln in einen Winkelraum fallen.

Von

Georg Pólya aus Budapest.

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung vom 24. Mai 1913.

Satz I. *Es sei gegeben eine Folge von Polynomen, mit folgenden Eigenschaften:*

1) Alle Wurzeln aller Polynome fallen in einen Winkelraum, dessen Öffnung kleiner als π ist.

2) Die Folge konvergiert gleichmäßig in einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Scheitel des Winkelraumes ist.

3) Die Grenzfunktion verschwindet nicht identisch.

Dann konvergiert dieselbe Folge in der ganzen Ebene, und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Bereiche.

Die Grenzfunktion ist eine ganze transzendente Funktion, und zwar gleich dem Produkte einer Funktion vom Geschlecht Null, und der Funktion $e^{\gamma x}$, wo γ eine Konstante bezeichnet.

Ich schicke dem Beweise die Bemerkung voraus, daß die Voraussetzung 3) ganz wesentlich ist. Um dies einzusehn, genügt es die Polynomfolge

$$x, x^2, x^3, \dots x^n, \dots$$

zu betrachten. —

Aus den Voraussetzungen unseres Satzes folgt zunächt, nach einem Satz von Weierstrass, daß die Grenzfunktion regulär analytisch in dem Kreise um den Scheitel ist, und es folgt ferner, nach einem Satz von Hurwitz, daß die Grenzfunktion in demjenigen Teil des Kreises, der außerhalb des Winkelraumes liegt, nicht verschwinden kann.

Ich kann die Polynomfolge $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots \Phi_n(x) \ldots$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Form geschrieben

$$\Phi_n(x) = 1 - a_{n1}x + a_{n2}x^2 - \cdots + (-1)^n a_{nn}x^n$$
$$= \left(1 - \frac{x}{\alpha_{n1}}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_{n2}}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\alpha_{nn}}\right)$$

annehmen, wo

$$\alpha_{n1} = \varrho_{n1} e^{i\vartheta_{n1}}, \ldots \alpha_{nn} = \varrho_{nn} e^{i\vartheta_{nn}}$$

(1) $$\varrho_{np} > 0, \quad -\Theta \leqq \vartheta_{np} \leqq +\Theta \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots n)$$
$$\Theta < \frac{\pi}{2}.$$

Denn ich kann, wenn es nötig ist, an Stelle des gegebenen Winkelraumes einen anderen betrachten, dessen Schenkel parallel den Schenkeln des vorherigen sind, und dessen Scheitel außerhalb des vorherigen Winkelraumes, aber innerhalb des gegebenen Kreises liegt. Ferner kann ich sowohl die Grenzfunktion, wie auch die annähernden Polynome (wenigstens von einem gewissen an) mit passenden Konstanten dividieren, und ich kann endlich die unabhängige Variable x so linear und ganz transformieren, daß der Anfangspunkt der Koordinaten der Scheitel, und die positive reelle Achse die Halbierende unseres Winkels wird.

Neben den Polynomen $\Phi_n(x)$, betrachte ich noch die Polynome

$$\Psi_n(x) = \left(1 - \frac{x}{\varrho_{n1}}\right)\left(1 - \frac{x}{\varrho_{n2}}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\varrho_{nn}}\right)$$
$$= 1 - r_{n1}x + r_{n2}x^2 - \cdots + (-1)^n r_{nn}x^n.$$

Man hat selbstverständlich die Ungleichungen

(2) $$|a_{n1}| \leqq r_{n1}, \ldots |a_{np}| \leqq r_{np}, \ldots |a_{nn}| \leqq r_{nn}.$$

Zwischen den Größen $r_{n1} \ldots r_{nn}$ bestehen die Ungleichungen

$$\frac{r_{n1}}{n} \geqq \sqrt[2]{\frac{r_{n2}}{\binom{n}{2}}} \geqq \cdots \geqq \sqrt[p]{\frac{r_{np}}{\binom{n}{p}}} \geqq \cdots \geqq \sqrt[n]{r_{nn}}$$

da doch die Gleichung $\Psi_n(x) = 0$ lauter reelle positive Wurzeln hat[1]). Das erste und das p-te Glied dieser Kette zusammenfassend, erhalte ich

---

1) Schlömilch, Über Mittelgrößen verschiedener Ordnungen, Zeitschr. f. Math. und Physik 3 (1858), S. 301—308. Vgl. S. 308, Formel 15).

$$r_{n1}^p \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n^p}\frac{1}{p!} \geqq r_{np}$$

(3)
$$\frac{r_{n1}^p}{p!} > r_{np}.$$

Aus (1) folgt

$$\left|\frac{e^{-i\vartheta_{n1}}}{\varrho_{n1}} + \frac{e^{-i\vartheta_{n2}}}{\varrho_{n2}} + \dots + \frac{e^{-i\vartheta_{nn}}}{\varrho_{nn}}\right| \geqq \frac{\cos\vartheta_{n1}}{\varrho_{n1}} + \frac{\cos\vartheta_{n2}}{\varrho_{n2}} + \dots + \frac{\cos\vartheta_{nn}}{\varrho_{nn}}$$
$$\geqq \cos\Theta\left(\frac{1}{\varrho_{n1}} + \frac{1}{\varrho_{n2}} + \dots + \frac{1}{\varrho_{nn}}\right)$$

oder kürzer

(4)
$$\frac{|a_{n1}|}{\cos\Theta} \geqq r_{n1}.$$

Aus (2), (3), (4) folgt

(5)
$$\frac{1}{p!}\left|\frac{a_{n1}}{\cos\Theta}\right|^p > |a_{np}|$$

$F(x) = \lim\limits_{n=\infty} \Phi_n(x)$ ist, wie gesagt, regulär analytisch in einem Kreise um den Punkt $x = 0$; also ist

$$F(x) = 1 - a_1 x + a_2 x^2 - \dots + (-1)^p a_p x^p + \dots$$

Man hat, nach dem schon zitierten Satz von Weierstrass,

$$\lim_{n=\infty} a_{n1} = a_1, \dots \lim_{n=\infty} a_{np} = a_p, \dots$$

und folglich, kraft der Ungleichung (5),

(6)
$$\frac{1}{p!}\left|\frac{a_1}{\cos\Theta}\right|^p \geqq |a_p|.$$

Folglich ist die Reihe $F(x)$ für jedes x konvergent.

Aus der Ungleichung

$$|F(x) - \Phi_n(x)| \leqq \left|\sum_{p=0}^{N}(-1)^p(a_p - a_{np})x^p\right| + 2\sum_{N+1}^{\infty}\left(\frac{|a_1|+1}{\cos\Theta}\right)^p\frac{|x|^p}{p!}$$

(sie ist von einem gewissen an für alle n gültig) erhellt es, daß die Polynome $\Phi_n(x)$ in jedem endlichen Bereiche gleichmäßig gegen die Potenzreihe $F(x)$ konvergieren. Damit ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

Die ganze transzendente Funktion $F(x)$ habe die Wurzeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p, \dots$$

Ich denke diese Wurzeln nach wachsender absoluten Größe geordnet, mit richtiger Multiplizität angeschrieben. Waren die

Wurzeln von $\Phi_n(x)$ nach wachsender absoluten Größe numeriert, so hat man

$$\lim_{n=\infty} \alpha_{n1} = \alpha_1, \ldots \lim_{n=\infty} \alpha_{np} = \alpha_p, \ldots$$

Aus (4) folgt a fortiori

$$\frac{|a_{n1}|}{\cos \Theta} \geqq \frac{1}{|\alpha_{n1}|} + \frac{1}{|\alpha_{n2}|} + \cdots + \frac{1}{|\alpha_{np}|}$$

und in der Grenze

$$\frac{|a_1|}{\cos \Theta} \geqq \frac{1}{|\alpha_1|} + \frac{1}{|\alpha_2|} + \cdots + \frac{1}{|\alpha_p|}$$

was auch p sei. Dies besagt, daß die Reihe $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_p|}$ konvergiert. Folglich ist

$$F(x) = e^{g(x)} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_p}\right)$$

wo $g(x)$ eine ganze Funktion bedeutet. Ungleichung (6) lehrt, nach der Hadamardschen Theorie, daß $g(x)$ eine lineare Funktion sein muß. Und hiermit ist auch der zweite Teil unseres Satzes bewiesen.

Auf Polynome mit lauter positiven Wurzeln angewandt, ergibt der zweite Teil unseres Satzes reichlich ein schon von Laguerre gefundenes Resultat[1]), das damit auf einem ganz neuen Wege wiedergewonnen ist. — Übrigens besteht der

Satz II. *Wenn eine Folge von Polynomen mit lauter positiven Wurzeln in irgend einem Gebiete gleichmäßig gegen eine nicht identisch verschwindende Grenzfunktion konvergiert, so konvergiert sie notwendigerweise in der ganzen Ebene.*

Denn in jedem Gebiet läßt sich ein innerer Punkt finden, der der Scheitel eines Winkelraumes ist, der die ganze positive reelle Achse einschließt und eine kleinere Öffnung hat, als π.

Ebenfalls als unmittelbare Anwendung des Satzes I, ergibt sich noch der

Satz III. *Wenn alle Wurzeln aller Polynome einer Folge in einem Kreis enthalten sind, und die Gradzahlen der Polynome unendlich wachsen, so kann die Polynomfolge außerhalb des besagten Kreises in keinem Gebiete gleichmäßig gegen eine von Null verschiedene Grenzfunktion konvergieren.*

Als Beispiel und Bestätigung betrachte man die Polynomfolgen

1) Laguerre, Oeuvres I, p. 174—177.

$$\begin{array}{lll} 1-x, & 1-x^2,\ldots & 1-x^n,\ldots \\ 1+x, & 1+x+x^2,\ldots & 1+x+x^2+\cdots+x^n,\ldots \\ 1+2x, & 1+2x+3x^2,\ldots & 1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n,\ldots \end{array}$$

Carathéodory bemerkte, daß aus den entwickelten Ungleichungen noch folgender Satz folgt:

Satz IV. *Gegeben sei eine Folge von Polynomen* $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x), \ldots \Phi_n(x), \ldots$

$$\Phi_n(x) = 1 - a_{n1}x + \cdots + (-1)^n a_{nn}x^n.$$

1) Alle Wurzeln aller Polynome $\Phi_n(x)$ *fallen in einen Winkelraum, dessen Öffnung kleiner ist, als* π, *und dessen Scheitel der Punkt* $x = 0$ *ist.*

2) $$|a_{n1}| \leq M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Dann hat die Menge der Konvergenzpunkte der Folge $\Phi_1(x), \ldots \Phi_n(x), \ldots$ *entweder keinen Häufungspunkt im Endlichen, oder besteht aus der ganzen Ebene.*

Der Beweis geschieht nach einer von Carathéodory und Landau bei einer anderen Gelegenheit entwickelten Methode [1]).

Durch eine unwesentliche Änderung des Beweisganges können die Sätze I, II, IV anstatt für Polynomfolgen allgemeiner für Folgen von ganzen Funktionen vom Geschlecht Null bewiesen werden.

---

1) Carathéodory und Landau, Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen, Sitzungsber. d. preuß. Akademie, Berlin, XXVI (1911), S. 587—613. Vgl. S. 590—595.

Über eine Eigenschaft der Klassenkörper der komplexen Multiplikation.

Von

Rud. Fueter in Karlsruhe.

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung am 24. Mai 1913.

H. Weber hat in seiner 2. Abhandlung „Über Zahlgruppen in algebraischen Körpern“ [1]) zum ersten Male den wichtigen Satz bewiesen: „Die Klassengleichung [2]) ist auch in dem Körper, der alle Einheitswurzeln enthält, nicht weiter zerlegbar, als in die den Geschlechtern entsprechenden Faktoren“.

Von dieser Tatsache möchte ich einen einfachen Beweis geben, der sich nur auf bekannte Eigenschaften der Klassenkörper und auf gruppentheoretische Erwägungen stützt, von allen transzendent-zahlentheoretischen Überlegungen aber frei ist.

Es sei $k = k(\sqrt{m})$ $(m < o)$ der zu Grunde gelegte imaginäre quadratische Zahlkörper; $f > o$ der Führer eines regulären Ringes resp. einer Ordnung (f) in k. Jedem (f) in k entspricht eine Klassengleichung mit den Eigenschaften:

1. Die Klassengleichung ist relativ-Abelsch zu k [3]).
2. Ihre Gruppe ist holoëdrisch isomorph mit der Gruppe der Klassen von (f) [4]).
3. Ihre Koeffizienten sind ganze rationale Zahlen [5]).

---

1) Math. Annalen 1897. Bd. 49, pg. 99. Weber, Algebra Bd. III, pg. 619.
2) Weber, Algebra Bd. III (1908), pg. 421.
3) ibid. pg. 441 und 442.
4) ibid. pg. 448.
5) ibid. pg. 427.

Stellt man jede Klasse A von (f) durch ein festes Basissystem dar

$$A = A_1^{x_1}\, A_2^{x_2} \cdots A_r^{x_r}, \quad o \leqq x_i < h_i \ (i = 1, 2, \ldots r),$$

so wird jeder Klasse A eine Wurzel (A) der Klassengleichung zugeordnet, und zwischen zwei Wurzeln (A) und (A') der Klassengleichung existieren die Relationen[1]):

$$\begin{aligned} (A') &= f((A), \sqrt{m}) \\ (A) &= f((A'), -\sqrt{m}), \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

wo $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x, y mit rationalen Koeffizienten ist. Jeder Klasse A von (f) entspricht wegen 2. eine Substitution S der Relativgruppe des Oberkörpers $K = K((1), \sqrt{m})$ von k in Bezug auf k. Entsprechen den Basisklassen $A_1, A_2, \ldots A_r$ die Substitutionen $S_1, S_2, \ldots S_r$, so ist wieder

$$S = S_1^{x_1}\, S_2^{x_2} \cdots S_r^{x_r}, \quad o \leqq x_i < h_i \ (i = 1, 2, \ldots r).$$

Der Oberkörper K ist absolut Galois'sch[2]). Bezeichnet man mit $s = (\sqrt{m} : -\sqrt{m})$ die Substitution von k, so ist die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von K gegeben durch die Substitutionen:

$$s^x\, S_1^{x_1}\, S_2^{x_2} \ldots S_r^{x_r} \begin{cases} o \leqq x < 2 \\ o \leqq x_i < h_i \ (i = 1, 2, \ldots r) \end{cases}$$

Diese Gruppe haben wir genauer zu untersuchen:

a) Da die Gruppe der Klassen A von (f) Abelsch ist, so bilden die S wegen 2. eine Abelsche Gruppe; es ist deshalb

$$S_i S_k = S_k S_i$$

b) Setzt man in den Gleichungen (α) für A die Hauptklasse 1, und läßt man der Klasse A' die Substitution S entsprechen, so kann man setzen:

$$\begin{aligned} &(A') = S(1) = f((1), \sqrt{m}) \\ &(1) = f(S(1), s\sqrt{m}) = Sf((1), s\sqrt{m}) = Ssf((1), \sqrt{m}) = SsS(1); \end{aligned}$$

denn wegen 3. ist $s(1) = (1)$, wenn man voraussetzt, daß die Substitutionen S_i sich auf die Wurzeln (1) beziehen: $S_i = ((1) : (A_i))$. Ist somit A eine beliebige Zahl von K, d. h. darstellbar in der Form $A = R((1), \sqrt{m})$, wo $R(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x, y mit rationalen Koeffizienten ist, so ist

1) Weber, Algebra Bd. III, pg. 441 Formel (17).

2) ibid. pg. 442.

$$SsSA = R(SsS(1), s\sqrt{m}) = R(s(1), s\sqrt{m}) = sR((1), \sqrt{m}) = sA.$$

Also $SsS = s$ oder

$$Ss = sS^{-1} \text{ und } sS = S^{-1}s \tag{β}$$

Die Galois'sche Gruppe $\mathfrak{G}$ von K ist somit in den Substitutionen gefunden worden

$$s^x S_1^{x_1} S_2^{x_2} \dots S_r^{x_r}, \begin{cases} o \leqq x < 2, \ s^2 = 1 \\ o \leqq x_i < h_i, \ S_i^{h_i} = 1 \ (i = 1, 2, \dots r) \end{cases}$$

wo

$$sS_i = S_i^{-1} s, \quad (i = 1, 2, 3, \dots r) \text{ und } S_i S_k = S_k S_i.$$

Nun sind alle absolut Abelschen Körper Kreiskörper [1]); um also den größten in K enthaltenen Kreiskörper zu bestimmen, haben wir nur die Kommutatorgruppe [2]) $\mathfrak{K}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ zu bestimmen, d. h. diejenige invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Substitutionen die Zahlen jenes größten in K enthaltenen Abelschen Unterkörpers ungeändert lassen. Die Faktorgruppe [3]) $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{K}}$ ist dann die Gruppe des Abelschen Unterkörpers, muß somit selbst Abelsch sein.

Wäre s in $\mathfrak{K}$ enthalten, so folgt aus der Invarianz von $\mathfrak{K}$ für jede Substitution $S = S_1^{x_1} S_2^{x_2} \dots S_r^{x_r}$, daß auch (wegen ($\beta$)):

$$SsS^{-1} = S^2 s,$$

aber auch S^2 in $\mathfrak{K}$ liegt. Gehört S zu einem ungeraden Exponenten, so liegt S selbst in $\mathfrak{K}$. Ist g die Anzahl der geraden h_i $(i = 1, 2, \dots r)$, so ist demnach 2^g der Grad der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{K}}$. Nimmt man jedoch die mit s multiplizierten Substitutionen aus $\mathfrak{K}$ fort, und bildet die zugehörige Faktorgruppe vom Grad $2 \cdot 2^g$, so ist dieselbe wegen $s^2 = 1$ wieder Abelsch. Dies widerspricht der Annahme, daß der zu $\mathfrak{K}$ gehörige Körper der größte in K enthaltene Abelsche Körper sein soll.

Also ist s nicht in $\mathfrak{K}$. Es sei $S = S_1^{x_1} S_2^{x_2} \dots S_r^{x_r}$ eine weitere nicht in $\mathfrak{K}$ gelegene Substitution. Dann können $\mathfrak{K}$, $s\mathfrak{K}$, $S\mathfrak{K}$ als Operationen der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{K}}$ aufgefaßt werden; da dieselbe Abelsch ist, muß

$$(s\mathfrak{K})(S\mathfrak{K}) = (S\mathfrak{K})(s\mathfrak{K}).$$

---

1) Siehe Hilbert, Theorie der algebr. Zahlkörper, Bericht (1897) pg. 339, Satz 131.

2) Burnside, Theory of groups. 2 edit. (1911). pg. 55, art. 39.

3) Siehe zu dem Folgenden etwa Burnside, Theory of groups, 2 edit. (1911). pg. 38, art. 29.

Aus der Invarianz von $\mathfrak{K}$ folgt:

$$s\mathfrak{K}S\mathfrak{K} = sSS^{-1}\mathfrak{K}S\mathfrak{K} = sS\mathfrak{K}^2,$$
$$S\mathfrak{K}s\mathfrak{K} = Ss\,s\mathfrak{K}s\mathfrak{K} = Ss\mathfrak{K}^2 = sS^{-1}\mathfrak{K}^2;$$

daher

$$sS\mathfrak{K}^2 = sS^{-1}\mathfrak{K}^2; \quad S\mathfrak{K}^2 = S^{-1}\mathfrak{K}^2; \quad S^2\mathfrak{K}^2 = \mathfrak{K}^2;$$

d. h. $\mathfrak{K}$ enthält S^2. Wenn S zu einem ungeraden Exponenten gehört, so liegt S in $\mathfrak{K}$ gegen Annahme. Somit schließt man genau wie oben, daß der Grad von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{K}}$ höchstens gleich $2 \,.\, 2^g$ ist.

Bildet man umgekehrt eine Gruppe $\mathfrak{K}^*$ aus $S_1^2, S_2^2, \ldots S_r^2$, so ist die zugehörige Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{K}^*}$ Abelsch und vom Grade $2 \,.\, 2^g$; also ist $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}$ und $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{K}}$ genau vom Grad $2 \,.\, 2^g$.

Wegen 2. entspricht jedem S eine Klasse des Ringes (f); wir können somit 2^g deuten als Anzahl der von einander verschiedenen Klassen von (f), deren Quadrat die Hauptklasse ist. Diese Zahl ist die Anzahl der Geschlechter, in die die Klassen von (f) zerfallen. Sieht man vom Körper $k = (\sqrt{m})$ ab, so hat der größte in K enthaltene Abelsche Körper einen Grad 2^g, der gleich ist der Anzahl der Geschlechter von (f).

Die benutzte Methode läßt sich auch auf Irreducibilitätsfragen Galois'scher Resolventen anwenden in den Körpern der singulären Moduln, falls man den Satz zu Grunde legt, daß jede in einem imaginären quadratischen Körper Abelsche Gleichung lösbar ist in Kreiskörpern und Körpern der singulärn Modulen.

15. April 1913.

Über die Schmelzwärme.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 24. Mai 1913.

Die Änderungen der Verdampfungs- und der Schmelzwärme beim Ansteigen des Druckes und der Temperatur sind sehr verschieden. Die Verdampfungswärme schwindet im kritischen Punkt der Dampfdruckkurve. Auf den Schmelzkurven gibt es nun einen kritischen Punkt nicht, wohl aber eine maximale Schmelztemperatur und dann einen maximalen Schmelzdruck, bei dem die Schmelzwärme durch den Nullpunkt geht, weil in diesem Punkt die innere Schmelzwärme durch die äußere Schmelzarbeit gerade kompensiert wird. Entsprechend der grundverschiedenen Änderung der Verdampfungswärme auf der Dampfdruckkurve und der Schmelzwärme auf der Schmelzkurve ist auch die Entstehung der Verdampfungswärme und der Schmelzwärme eine sehr verschiedene.

Die Theorie der Verdampfung betrachtet die Verdampfungswärme l_p normaler Flüssigkeiten als aus zwei Arbeitsgrößen bestehend, der Arbeit gegen die äußeren und der gegen die inneren Kräfte, A_a und A_i, beide gemessen in calorischem Maß. Es ist also

$$l_p = A_a + A_i. \qquad 1)$$

Bei assoziierten Flüssigkeiten würde hierzu noch die Wärme des Überganges assoziierter Flüssigkeitsmoleküle in die einfachen Moleküle im Dampf $x \cdot W_a$, wenn x den Assoziationsgrad der Flüssigkeit und W_a die Assoziationswärme bedeuten, hinzu kommen. Diese Auffassung der Verdampfungswärme hat zur Voraussetzung, daß zwischen den Molekülen einer normalen Flüssigkeit und ihres Dampfes eine Differenz des Wärmeinhaltes ΔE nicht be-

steht,[1]) und daß auch die Differenz der potentiellen Energien der molekularen Anordnungen in der Flüssigkeit und im Dampf bei gleichen Volumen verschwindet, weil in beiden Zuständen die Molekularanordnungen nach Reduktion auf gleiches Volumen, als identische Anordnungen höchster Unordnung zu betrachten sind. Beim Übergang vom anisotropen zum isotropen Zustande sind aber diese beiden Energiedifferenzen nicht zu vernachlässigen. In dem Ausdruck für die Schmelzwärme werden also bei einer normalen Flüssigkeit außer den Arbeiten gegen äußere und innere Kräfte A_a und A_i noch die Energiedifferenz der Moleküle im isotropen und im anisotropen Zustande ΔE und die Differenz der potentiellen Energie ungeordneter und geordneter Molekularanordnung $\Delta \Pi$ hinzu kommen. Berücksichtigt man ferner die Folgerung aus der Erfahrung, daß bei der Krystallisation das Molekulargewicht der an der Krystallisation direkt beteiligten Molekülart sich nicht ändert, so kann man für die Schmelzwärme assoziierter Flüssigkeiten, wenn W_a die Summe der äußeren und inneren Assoziationswärmen und Δx die Änderung des Assoziationsfaktors beim Schmelzen bedeuten, die Schmelzwärme r_p als folgende Summe hinschreiben

$$r_p = A_a + A_i + \Delta E + \Delta \Pi + \Delta x \,.\, W_a \tag{2}$$

Beim maximalen Schmelzpunkt der Schmelzkurve verschwindet die Volumendifferenz der isotropen und anisotropen Phase und demgemäß auch die äußere und innere Arbeit beim Schmelzen. Für eine normale Flüssigkeit wird also die Schmelzwärme in diesem Punkte

$$r_{p,\,t_m} = \Delta E + \Delta \Pi \tag{3}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem für die Verdampfungswärme 1), so sieht man, daß das Wesen beider Wärmen ein durchaus verschiedenes ist.

Die Verdampfungswärme einer normalen, nicht assoziierten Flüssigkeit kann berechnet werden, wenn eine den Dampf- und Flüssigkeitszustand umfassende Zustandsgleichung gegeben ist, da in der Gleichung 1) nur Arbeitsgrößen, die leicht ausgewertet werden können, vorkommen. Die Schmelzwärme einer normalen Flüssigkeit kann aber, auch wenn für den isotropen Zustand eine Zustandsgleichung, und eine zweite Zustandsgleichung für den an-

---

1) Diese Voraussetzung wird in nicht zu weiter Entfernung vom kritischen Punkt jedenfalls zutreffen, ob sie aber auch bei tieferen Temperaturen giltig bleibt, ist zur Zeit unentschieden.

isotropen Zustand gegeben sind, nicht ausgewertet werden, weil neben den beiden auswertbaren Größen A_a und A_i noch die Größen ΔE und $\Delta \Pi$ auftreten, für die aus den beiden Zustandsgleichungen noch nichts folgt.

Für die Verdampfungswärme einer normalen Flüssigkeit ergibt sich, wenn K den inneren Druck, v_1 das Volumen des Dampfes und v_2 das der Flüssigkeit bezeichnen:

$$l_p = (v_1 - v_2)p + \int_{v_2}^{v_1} K dv.$$

Wird hier für K der Ausdruck von van der Waals $K = \frac{RT}{v-b} - p$ eingeführt, so folgt:

$$\int_{v_2}^{v_1} K dv = RT ln \frac{v_1 - b}{v_2 - b} - (v_1 - v_2)p$$

und für

$$l_p = RT ln \frac{v_1 - b}{v_2 - b}. \qquad 1a)$$

Für eine normale Flüssigkeit würde sich die Arbeit gegen die inneren Kräfte bei der Kompression von dem Volumen der Flüssigkeit v_2 auf das des Krystalls v_3, bei Einführung der für Druck von 500 kg geltenden Zustandsgleichung [2]):

$$(K+p)(v_2 - v_{2\,p=\infty}) = CT$$

zu

$$A_i = CT \int_{v_3}^{v_2} \frac{dv_2}{v_2 - v_{2\,p=\infty}} - \int_{v_3}^{v_2} K d v_2 = CT ln \frac{v_2 - v_{2\,p=\infty}}{v_3 - v_{2\,p=\infty}} + K(v_2 - v_3)$$

ergeben.

Für die Schmelzwärme selbst hätte man dann den Ausdruck:

$$r_p = (v_2 - v_3)p + CT ln \frac{v_2 - v_{2\,p=\infty}}{v_3 - v_{2\,p=\infty}} - K(v_2 - v_3) + \Delta E + \Delta \Pi. \qquad 2a)$$

Da man r_p nicht beim Druck der maximalen Schmelztemperatur bestimmen kann, so müssen wir zur Ermittelung der Summe $\Delta E + \Delta \Pi$ den Weg der Rechnung, der uns hinreichend genaue Resultate liefern wird, wählen.

---

1) J. P. Kuenen, Die Zustandsgleichung der Gase und Flüssigkeiten, Braunschweig 1907, S. 123.

2) Ann. d. Physik, Bd. 37, S. 975. 1912.

In der folgenden Tabelle sind für die beiden normalen Flüssigkeiten, Äthyläther und Benzol, und eine assoziierte Flüssigkeit, Methylalkohol, die inneren und äußeren Arbeiten beim Schmelzen in calorischem Maß für Drucke bis 3000 kg. pro 1 qcm. berechnet. Mit Hilfe des Volumens[1]) der Flüssigkeit beim Schmelzpunkt unter dem Druck $p = 0$, bezogen auf 1 gr., und den ebenfalls auf 1 gr. bezogenen Konstanten $v_{2\,p=\infty}$, C und K wurden für die Schmelzpunkte T für die Drucke p die Volumen der Flüssigkeit berechnet, durch Subtraction der entsprechenden Volumenänderungen beim Schmelzen Δv_{T_p} erhält man die Volumen v_3 des kristallisierten Stoffes. Die Δv_{T_p} Werte für Benzol sind früheren[2]) Bestimmungen entnommen, für Äthyläther und Methylalkohol sind dieselben unter zu Grundelegung der Körberschen Werte $\Delta v_{T,\,p=0}$ und der Beziehung Δv_{T_p} konst. berechnet, da meine[3]) direkten Bestimmungen der Δv_{T_p} Werte bis zu 3000 kg. für diese Stoffe im Vergleich zu den von Körber bei $p = 1$ bestimmten offenbar zu groß ausgefallen sind.

Tabelle 1.

			pro 1 gr.				
	p	T	$v_{2T,\,p=0}$	$v_{2\,p=\infty}$	$\Delta v_{T,\,p=0}$	C	K
Äthyläther	0	156	1.1653	0.9432	0.0798	4.141	2792
Methylalkohol	0	178	1.1082	0.8910	0.0749	3.858	3050
Benzol	0	278	1.0067	0.7961	0.1307	4.840	4057

Schmelzkurven		
	Äthyläther	$T = 156^0 + 0.0134\,p$
	Methylalkohol	$T = 178^0 + 0.0060\,p$
	Benzol	$T = 278.4 + 0.0283\,p - 0.000\,000\,198\,p^2$

		$p = 0$	$p = 1000$	$p = 2000$	$p = 3000$		$r_{p=0}$
Äthyläther	A_i	1.18	3.50	5.55	6.81	cal.	27.0
	A_a	0.00	1.72	3.19	4.45	„	ber.
	$A_i + A_a$	1.2	5.2	8.7	11.3	„	
Methylalkohol	A_i	1.15	3.67	6.33	9.05	cal.	51.0
	A_a	0.00	1.70	3.29	4.78	„	ber.
	$A_i + A_a$	1.1	5.4	9.6	13.8	„	
Benzol	A_i	3.36	5.21	5.72	7.50	cal.	30.1
	A_a	0.00	2.28	3.68	5.27	„	gef.
	$A_i + A_a$	3.4	7.5	9.4	12.8	„	

1) F. Körber, Anm. d. Physik, Bd. 37, 1014. 1912.

2) Krystallisieren und Schmelzen S. 207. 1903.

3) Zeitschrift f. phys. Chemie, 81 S. 187. 912.

Man ersieht, daß die innere Arbeit A_i bei $p = 0$ nur 11 bis 2 Prozent der gesamten Schmelzwärme beträgt. Mit wachsendem Drucke wächst die innere Arbeit recht merklich, außerdem kommt die ebenfalls wachsende äußere Arbeit hinzu. Da aber die Schmelzwärme mit steigendem Druck nur wenig wächst, so nimmt auf der Schmelzkurve mit steigendem Druck $\varDelta E + \varDelta \Pi$ recht erheblich ab. Da aber für den Druck, bei dem $v_2 = v_3$ wird, die 3 ersten Glieder der Gleichung 2a verschwinden, so hätte man sich von der Druckabhängigkeit des Wertes $\varDelta E + \varDelta \Pi$ auf der Schmelzkurve die Vorstellung zu machen, daß $\varDelta E + \varDelta \Pi$ zuerst bei wachsendem Druck recht beträchtlich abnimmt, dann aber vielleicht wieder zunimmt.

Für das Folgende ist von Bedeutung das Resultat, daß bei $p = 0$ die innere Arbeit A_i nur ein geringer Bruchteil der gesamten Schmelzwärme $r_{p=0}$ ist, daß also der Hauptteil der Schmelzwärme auf die Summe $\varDelta E + \varDelta \Pi$ entfällt.

Die beiden Glieder dieser Summe einzeln zu bestimmen ist ohne Einführung spezieller Hypothesen natürlich nicht möglich, da die beiden Vorgänge des Anisotrop-werdens und der Einordnung der anisotrop gewordenen Moleküle ins Raumgitter gleichzeitig sich vollziehen und mit einander unlösbar verbunden sind. Man dürfte aber wohl mit der Annahme, daß $\varDelta \Pi$ nur einen Bruchteil von $\varDelta E$ ausmacht, nicht fehlgehen, denn, wenn schon die innere Kontraktionsarbeit bei der Krystallisation gegenüber der Schmelzwärme verschwindet, so darf man sich wohl die Vorstellung bilden, daß die Arbeit bei den kleineren Verschiebungen der Moleküle aus ungeordneten in geordnete Lagen bei konstantem Volumen nicht größer sein wird als die Kontraktionsarbeit.

Wenn diese Überlegung zutrifft, so ist der Hauptteil der Schmelzwärme $r_{p=0}$ das Glied $\varDelta E$. Dieses Glied ist die Summe der Änderung der kinetischen Energie und der Änderung der inneren Energie des Moleküls beim Schmelzen. Fordert man für das Gleichgewicht zweier Phasen die Gleichheit der kinetischen Energien in beiden Phasen, so wird $\varDelta E$ mit der Energieaufnahme beim Isotropwerden der anisotropen Moleküle identisch. Allerdings ist es nicht möglich, diese schon häufig ausgesprochene Forderung zu beweisen, die Deutung von $\varDelta E$ ist also nicht hypothesenfrei. Wenn aber die Schmelzwärme einer normalen Flüssigkeit in der Hauptsache durch Entstehung von Anisotropie im Molekül bedingt ist, so würde die Auffassung, daß die Moleküle in allen drei Aggregatzuständen anisotrop sind, nicht haltbar sein. Nach dieser Auffassung würde in Gasen und Flüssigkeiten die An-

isotropie nicht zu Tage kommen, weil durch Rotation der Moleküle Quasiisotropie vorgetäuscht wird, und feste amorphe Stoffe würden isotrop erscheinen, weil die Moleküle in ihnen regellos aneinander gepackt sind. Man ersieht also, daß die Anschauung genereller Anisotropie sehr kleine Werte der Schmelzwärme $r_{p=0}$ zur Folge hätte. Dazu kommt, daß der Polymorphismus, und speziell die Tatsache der Existenz einer Reihe von Formen derselben thermodynamischen Krystallgruppe, lehren, daß die Art der Anisotropie nicht fest mit dem Molekül verbunden ist. Wenn aber ein und dasselbe Molekül imstande ist verschiedene Arten der Anisotropie anzunehmen, so ist es offenbar überflüssig, die Anisotropie der Moleküle für alle Zustände der Materie zu fordern.

Man kommt also zum Schluß, daß nur der Krystallzustand durch die Anisotropie der Moleküle ausgezeichnet ist, weil bei der Krystallisation eine Energiemenge abgegeben wird, die nur durch einen speziellen, der Krystallisation eigentümlichen, Vorgang gedeckt werden kann. Dieser Vorgang, der die Anisotropie hervorruft und damit die Stabilität der Molekularanordnung im Raumgitter bedingt, ist für die Krystallbildung wesentlich.

Der Einfluß der Änderung des Raumgitters, der inneren Symmetrie der Krystalle, auf die Entropieänderung beim Schmelzen muß sich dahin geltend machen, daß für ein stabileres Raumgitter bei Besetzung durch dieselben Moleküle die Entropieänderung $\frac{r_p}{T}$ zunimmt. Die Größe dieses Einflusses des Raumgitters erfährt man beim Vergleich der Entropieänderungen zweier Formen derselben thermodynamischen Gruppe, bei denen verschiedene Raumgitter durch dieselbe Molekülart besetzt sind. Die Kennzeichen hierfür sind: 1. die Schmelzkurven zweier Formen einer Gruppe schneiden sich nicht und dasselbe gilt für die Gleichgewichtskurven der Formen einer Gruppe, die für die Gleichgewichte dieser Formen mit ein und derselben Form einer anderen Gruppe auftreten; 2. die Entropieänderung beim Schmelzen nimmt mit der Stabilität der Form ab, oder die auf die Schmelztemperatur der instabilsten Form reduzierten Schmelzwärmen nehmen in der Reihenfolge der Stabilitäten ab; und 3. die Volumenänderungen beim Schmelzen ordnen sich in die Reihenfolge der Schmelzpunkte, das heißt in die der Stabilitäten. Wenn die beiden letzten Beziehungen zutreffen, so trifft aller Wahrscheinlichkeit auch das erste Kennzeichen der Zugehörigkeit mehrerer Formen zu derselben thermodynamischen Krystallgruppe zu.

In der Tabelle 2 sind für 5 Stoffe, bei denen die Kennzeichen

2 und 3 nach den Messungen von A. H. Richard Müller zutreffen, die Schmelzwärmen $r_{p=0}$ und die absoluten Temperaturen der Schmelzpunkte T_s für je zwei Formen zusammengestellt.

Tabelle 2.

	$r_{p=0}$	T_s	$\Delta v_{\text{stab.}} - \Delta v_{\text{instab.}}$	$\left(\frac{r_{p=0}}{Ts}\right)_{\text{stab.}}$	$\left(\frac{r_{p=0}}{Ts}\right)_{\text{instab.}}$
Acetamid	21.3 20.1	300 289	0.014	0.0186	0.0166
Natriumthio-sulfat m. $5H_2O$	40.8 35.2	321 306	0.022	0.0127	0.0115
Aminokroton-saures Äthyl	32.3 29.6	307 293	0.003	0.0105	0.0101
Benzophenon	23.4 17.9	321 298	+	0.0073	0.0060
Nitro-p-acetto-luid	30.6 26.7	366 365	+	0.0084	0.0073

Die Werte $\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_{\text{stabil}}$ sind natürlich größer als die Werte $\left(\frac{r_p}{T'_s}\right)_{\text{instabil}}$ und unterscheiden sich um etwa 10 Prozent. Aus den Differenzen der Volumenänderungen beim Schmelzen würden schätzungsweise A_i-Werte bis zu 1 Prozent von $r_{p=0}$ folgen. Demnach würden nicht nur die Entropieänderungen beim Schmelzen mit der Stabilität der Form wachsen, sondern auch das Glied $(\Delta E + \Delta \Pi)$ würde mit wachsender Stabilität der Form um etwa 10 Prozent der Schmelzwärme bei Änderung des Raumgitters zunehmen.

Es ist also sowohl die innere Arbeit A_i als auch der Einfluß des Raumgitters von sekundärer Bedeutung auf die Schmelzwärme, die Hauptänderung der Entropie wird einzig und allein durch die Energieänderung im Molekül selbst beim Übergang aus seinem anisotropen in seinen isotropen Zustand bedingt.

Die Abhängigkeit der Entropieänderung dieses Vorganges von der Natur der Moleküle wird uns im Folgenden zu beschäftigen haben.

Die Crompton-Waldensche Regel.

Holland Crompton[1]) hat darauf hingewiesen, daß für eine Reihe von Metallen die Atomschmelzwärme, dividiert durch die absolute Temperatur des Schmelzpunktes, ziemlich unabhängig von der Natur des Metalles ist, nämlich zwischen 1.84 bis 4.82 schwankt. P. Walden hat ferner gezeigt, daß für 33 Stoffe die molekulare Schmelzwärme, dividiert durch die absolute Temperatur des Schmelzpunktes, in ziemlich engen Grenzen, von 12.5 bis 14.8, um das Mittel 13.5 schwankt. Ferner bemerkte Walden, daß diese Stoffe im flüssigen Zustande nicht assoziiert sind, während bei assoziierten Stoffen jener Ausdruck erheblich kleiner ist.

Es ist also von Crompton und Walden eine Regel über die Änderung der molekularen Entropie beim Schmelzen gefunden, die auch dahin formuliert werden kann, daß die Änderung der molekularen Entropie beim Schmelzen für normale Flüssigkeiten von der chemischen Zusammensetzung in weiten Grenzen unabhängig, sich aber bei metallischen Stoffen wesentlich von den Werten nicht metallischer Stoffe unterscheidet.

Die Zahl der bekannten Schmelzwärmen ist letzthin nicht unerheblich gewachsen; in den Landolt-Börnsteinschen Tabellen führt H. Böttger für etwa 157 Stoffe die Schmelzwärmen an. Für diese Stoffe sind in der Tabelle 3 die Schmelzwärmen $r_{p=1}$ für die absolute Temperatur des Schmelzpunktes T_s, die Molekulargewichte und die molekularen Änderungen der Entropie $\Delta \eta M = \frac{M r_{p=1}}{T_s}$ zusammengestellt. Für die mit einer Asteristik bezeichneten Stoffe ist die Schmelzwärme aus Gefrierpunktsbestimmungen berechnet, für die anderen Stoffe ist sie direkt calorimetrisch bestimmt und für einige wenige, wie z. B. das PH_4Cl, aus der Volumenänderung beim Schmelzen und der Richtung der Schmelzkurve $\frac{dT}{dp}$ berechnet.

---

1) H. Crompton, Chem. News 58 S. 237 1903.
2) P. Walden, Zeitschr. f. Elektrochemie S. 713 1908.

Tabelle 3.

1.

	r Schmelzwärme $r_p = 1$ in cal. pro 1 gr.	T_S absolute Temperat. d. Schmelzpunktes bei $p = 1$	M Molekulargewicht	$\frac{M \cdot r}{T_S}$	Assoziation der Schmelze
Stearin $C_3H_5(C_{18}H_{35}O_2)_3$	45.6	329	890	123	*d*
Phosphoniumchlorid	180	302	70.4	47.1	*d*
Elaidinsäure $C_{17}H_{33}CO_2H$	52.1	320	282	45.9	
$Na_2CrO_4 . 10H_2O$	39.2	296	342	45.0	*d*
Stearinsäure $C_{18}H_{36}O_2$	47.6	337	284	40.1	
$Na_2SO_4 . 10H_2O$	51.5	306	216	36.4	*d*
Myristinsäure	47.5	327	228	33.1	
Palmitinsäure $C_{16}H_{32}O_2$	39.2	328	256	30.6	
$CaCl_2 . 6H_2O$	40.7	302	219	29.5	*d*
$Na_2S_2O_3 . 5H_2O$	37.6	318	248	29.3	*d*
Laurinsäure	43.7	317	200	27.6	
N_2O_5	76.7	303	108	27.3	
$C_{16}H_{33}OH$	33.8	320	242	25.5	
$Ca(NO_3)_2 . 4H_2O$	33.5	315	236	25.1	*d*
Apiol	25.8	303	222	18.9	
o-Xyloldibromid $C_8H_8Br_2$	24.2	368	264	17.4	
Chloralhydrat $CCl_3CHO . H_2O$	33.2	319	165.4	17.2	*d*
$H_2SO_4 . H_2O$	39.9	281	116	16.5	*d*
Chloralalkoholat $CCl_3CHO\,C_2H_5OH$	26.3	319	193.5	16.0	*d*
Anorthit $CaO, Al_2O_3, 2SiO_2$	10.5	1823	278.4	16.0	
Bromalhydrat $CBr_3COH . H_2O$	16.9	319	298.8	15.8	*d*
Oxalsäuredimethylester $C_2O_4(CH_3)_2$	42.6	322.5	118	15.6	
o-Xyloldichlorid $C_8H_8Cl_2$	29.0	328	175	15.5	
p- „ „	32.7	373	„	15.3	
m- „ „	26.7	307	„	15.2	
m-Chlornitrobenzol $C_6H_4ClNO_2$	31.5	317	153,5	15.6	
Azobenzol $(C_6H_5)_2N_2$	29.0	342	182	15.4	
Bernsteinsäuremethylester $C_4H_4O_2(OCH_3)_2$	30.6	293	146	15.2	
Anthracen $C_{14}H_{10}$	40.5	486	213	14.8	
p-Xyloltetrachlorid $C_8H_6Cl_4$	22.1	368	244	14.6	
p-Xylol C_8H_{10}	39.3	289	106	14.4	*n*
o-Xyloltetrachlorid $C_8H_6Cl_4$	21.0	359	244	14.3	

Tabelle 3.

2.

	r Schmelzwärme $r_{p=1}$ in cal. pro 1 gr.	Ts absolute Temperat. d. Schmelzpunktes bei $p = 1$	M Molekulargewicht	$\frac{M \cdot r}{Ts}$	Association der Schmelze
*Triphenylmethan $(C_6H_5)_3CH$	21.4	366	244	14.3	
Diphenylmethan $(C_6H_5)_2CH_2$	25.2	299.3	168	14.1	n
p-Chlorbrombenzol $C_6H_4ClB_2$	25.1	340	191.5	14.1	
Zimmtsäuremethylester	26.9	309	162	14.1	n
2.4 Dinitrotoluol $C_7H_6(NO_2)_2$	26.4	343	182	14.0	
p-Chloranilin $C_6H_4ClNH_2$	37.2	342	127.5	13.9	
Azoxybenzol $(C_6H_5)_2N_2O$	21.6	307.6	198	13.9	
s-Trinitrotoluol $C_7H_5(NO_2)_3$	21.5	352	227	13.9	
p-Chloranilin $C_6H_4ClNH_2$	37.2	342	127.5	13.8	
Carbazol $(C_6H_4)_2NH$	42.1	509	167	13.8	
Glycerin $C_3H_8O_3$	42.5	286	92	13.7	
Diphenylamin $(C_6H_5)_2NH$	26.3	326	169	13.6	n
p-Dibrombenzol $C_6H_4Br_2$	20.3	358	236	13.5	
p-Dichlorbenzol $C_5H_4Cl_2$	29.9	325.5	147	13.5	n
o-Nitrophenol $C_6H_4OHNO_2$	30.9	317.5	141	13.5	n
Acetophenon $C_6H_5COCH_3$	33.1	292.5	122	13.5	n
m-Dinitrobenzol $C_6H_4(NO_2)_2$	29.0	363	168	13.4	
p-Toluidin $C_7H_7NH_2$	39.0	312	107	13.4	
Benzophenon $(C_6H_5)_2CO$	23.7	321	182	13.4	n
α-Nitronaphtalin $C_{10}H_7NO_2$	25.3	329	173	13.3	
Phenylhydrazin $C_6H_5NHNH_2$	36.3	295	108	13.3	
p-Jodtoluol C_7H_7J	18.8	307	216	13.2	
*Diacetylweinsäurediäthylester $C_4H^3O_2(OC_2H_5)_2(COCH_3)_2$	17.2	340	259	13.1	
$K_2Cr_2O_7$	29.8	670	242	13.1	
N_2O_4	37.2	262	92	13.1	n
Betol $C_6H_5OCOOC_{10}H_7$	18.0	366	264	13.0	
Benzylanilin $C_6H_5NHC_7H_7$	21.9	309	183	13.0	n
Naphtalin $C_{10}H_8$	35.7	353	128	12.9	n
Veratrol $C_6H_4(OCH_3)_2$	27.7	295.5	138	12.9	n
Chloroform *$CHCl_3$	19.1	212	119.5	12.8	n
Thymol $C_6H_3 . C_3H_7 . CH_3OH$	27.5	321	150	12.8	
*Aethylaether $(C_2H_5)_2O$	27.0	156	74	12.8	
Caprinsäure $C_{10}H_{20}O_2$	22.7	304	172	12.8	
β-Bromnaphthalin $C_{10}H_7Br$	17.8	332	207	12.7	

Tabelle 3.

3.

	r Schmelzwärme $r_p = 1$ in cal. pro 1 gr.	Ts absolute Temperat. d. Schmelzpunktes bei $p = 1$	M Molekulargewicht	$\frac{M \cdot r}{Ts}$	Assoziation der Schmelze
p-Chlortoluol C_7H_7Cl	28.0	280	126.5	12.7	*n*
Caprylsäure $C_8H_{16}O_2$	22.9	262.5	144	12.6	
Benzil $(C_6H_5CO)_2$	22.1	368	220	12.6	
Buttersäure $C_4H_8O_2$	28.4	269	88	12.5	
Bernsteinsäureanhydrid	48.7	392	100	12.4	
Zimmtsäure (Allo) $C_9H_8O_2$	{ 26.7 27.4	315 331	148	{ 12.4 12.3	
p-Bromtoluol C_7H_7Br	{ 21.3 20.1	300 289	171	{ 12.3 11.9	
Dibromphenol $C_6H_3Br_2OH$	13.9	285	252	12.3	
Tribromphenol $C_6H_2Br_3OH$	13.4	366	331	12.1	
Phenanthren $C_{14}H_{10}$	25.0	369.3	178	12.1	
Tribromanilin	14.4	395	330	12.0	
p-Bromtoluol	20.1	289.5	171	11.9	
Phenylessigsäure $C_6H_5CH_2COOH$	30.0	350	136	11.7	
Paraldehyd	25.0	285.6	162	11.6	*n*
α-Naphtylamin $C_{10}H_7NH_2$	25.6	323.1	143	11.6	
$LiNO_3$	88.5	523	71	11.6	
*HgJ_2	13.4	523	454	11.6	
Acetamid CH_3CONH_2	69.4	355	59	11.5	*a*
Urethan $NH_2COOC_2H_5$	40.8	321.7	89	11.3	*a*
*$POCl^3$	19.4	274	153.5	10.9	
Formanilid $C_6H_5NHOOCH$	28.3	319	121	10.7	*a*
p-Bromphenol C_6H_4BrOH	17.3	286	173	10.5	
Pelargonsäure $C_9H_{18}O_2$	19.0	285.5	158	10.5	
$SnBr_4$	7.1	298.5	439	10.4	*n*
Aethylenglykol $C_2H_4(OH)_2$	39.1	261	62	10.2	
Nitrobenzol $C_6H_5NO_2$	22.6	278.3	123	10.0	
*CH_2J_2	{ 10.7 11.2	287 286.7	268	{ 10.0 10.4	
*$HgBr_2$	14.0	508	360	10.0	
$NaClO_3$	49.0	528	106.5	9.8	
Br_2	16.2	265.7	168	9.8	
*$CHBr_3$	10.9	281	253	9.7	

Tabelle 3.

4.

	r Schmelzwärme $r_{p=1}$ in cal. pro 1 gr.	Ts absolute Temperat. d. Schmelzpunktes bei $p=1$	M Molekulargewicht	$\frac{M \cdot r}{Ts}$	Assoziation der Schmelze
Cl_2	23.0	169.5	71	9.6	*n*
$SbBr_3$	9.7	367.6	360	9.5	
p-Chlornitrobenzol $C_6H_4ClNo_2$	21.4	355	157.5	9.5	
Menthol $C_{10}H_{20}O$	18.9	315	156	9.4	*n*
p-Kresol C_7H_7OH	26.3	303	108	9.4	*n*
Ameisensäure $HCOOH$	57.4	281	46	9.4	*a*
Acrylsäure $C_3H_4O_2$	37.0	286	72	9.3	
NH_3	108.1	198	17	9.3	
$AsBr_3$	8.9	304	314.7	9.2	
Essigsäure CH_3COOH	43.7	290	60	9.0	*a*
Thiosinamin $NH_2CSNHC_3H_5$	33.4	350	116	9.0	
Phosphorige Säure H_3PO_3	37.4	343	82	9.0	
CO_2	43.8	217	44	9.0	
*$SbCl_5$	8.1	267	298	9.0	
*$HgCl_2$	16.9	538	271	8.5	
Aethylenbromid $C_2H_4Br_2$	13.0	281	188	8.5	*n*
*J_2	13.2	386	254	8.7	
JCl α	16.4	300.2	162	8.9	
JCl β	14.0	286.9	162	7.9	
$SbCl_3$	13.4	346.2	226.5	8.8	
α-Crotonsäure	34.9	344	86	8.7	
*Acetoxim $(CH_3)_2CNOH$	39.2	332	73	8.6	*a*
HgJ_2	9.8	523	454	8.5	
Benzol C_6H_6	30.1	278.5	78	8.4	
PbJ_2	11.5	648	460.9	8.2	
Phosphorsäure H_3PO_4	25.7	311.6	98	8.1	
Schwefelsäure H_2SO_4	22.8	283.4	98	7.9	
*CS_2	18.8	191	76	7.5	
Phenol C_6H_5OH	24.9	313	94	7.5	*a*
$PbCl_2$	20.9	758	278	7.6	
Lävulinsäure $C_5H_8O_3$	19.0	306	116	7.2	
$NaCl$	123.5	1077	58.5	6.7	
*Formamid $HCONH_2$	38.4	273	45	6.3	*a*
$NaNO_3$	45.3	606	85	6.1	
NaF	186	1265	42	6.2	

Tabelle 3.

5.

	r Schmelzwärme $r_p = 1$ in cal. pro 1 gr.	Ts absolute Temperat. d. Schmelzpunktes bei $p = 1$	M Molekulargewicht	$\frac{M . r}{Ts}$	Assoziation der Schmelze
$PbBr_2$	12.3	761	376	5.9	
$CaCl_2$	54.6	1047	111	5.8	
$AgNO_3$	16.4	486	170	5.7	
$TlCl$	16.6	700	239.5	5.7	
KF	108	1133	58	5.5	
Wasser	79.7	273	18	5.2	*a*
Trimethylkarbinol $(CH_3)_3COH$	21.0	298	74	5.2	*a*
Schwefel S_6 monosymm.	10.4	392	192	5.1	*a*
$BaCl_2$	27.8	1232	208	4.7	
KNO_3	25.5	581	101	4.4	
AgCl	21.3	728	143.5	4.2	*n*
Dimethylaethylkarbinol $(CH_3) C_2H_5COH$	12.6	263	88	4.2	
H_2O_2	2.7	271	20	3.4	
$SrCl_2$	25.6	1145	158.6	3.5	
AgBr	12.6	703	188	3.4	
*HBr	7.4	187	81	3.2	*n*
CsOH	10.7	545	150	2.96	
Aethylencyanid $(CH_2CN)_2$	11.7	327.5	80	2.9	*a*
RbOH	15.8	574	102.5	2.8	
NaOH	40.0	591	40	2.7	
Salpetersäure HNO_3	9.5	226	63	2.65	*a*
KOH	28.6	633	56	2.55	
*HCl	10.3	161	36.5	2.3	*a*
Phosphor P_4 gelb	5.0	317	124	2.0	*n*
HJ	4.8	222	128	2.8	*n*

Das rein statistische Material verschiebt sich allerdings etwas zu Ungunsten der Crompton-Waldenschen Regel, indem bei 157 Stoffen die Änderung der molekularen Entropie bei nur 37 Stoffen zwischen die Grenzen Waldens 15.8—12.0 fällt. Wir werden aber sehen, daß dieser Umstand der Bedeutung der Crompton-Waldenschen Regel keinen Abbruch tut.

Berücksichtigt man, daß die gesamte Schmelzwärme als Summe von 5 Gliedern aufzufassen ist, und daß für die Glieder A_a, A_i und xW_a (Gleichung 2) die Produkte mit dem Faktor $\frac{M}{T_s}$ aller Wahrscheinlichkeit nach von der Zusammensetzung der Stoffe abhängig sind, weil für die Volumenänderung beim Schmelzen schwerlich eine Regel bestehen wird, welche $\frac{A_a M}{T_s}$ und $\frac{A_i M}{T_s}$ unabhängig von der Zusammensetzung fordert, und weil auch für das Glied xWa erst recht nicht die analoge Beziehung gelten kann, so wird man vermuten müssen, daß sich die Crompton-Waldensche Regel nur auf das Glied $(\Delta E + \Delta \Pi)$ bezieht. Diese Vermutung wird durch die Berechnung der Summe $Aa + Ai$ bei $p = 1$ bestätigt, wir fanden oben Tab. 2, daß $Aa + Ai$ nur 2—10 Prozent der gesamten Schmelzwärme ausmacht, es kann also der Einfluß der Zusammensetzung auf $Aa + Ai$ keine erheblichen Abweichungen von der Regel für die Gesamtschmelzwärme verursachen. Aber auch das Glied $(\Delta E + \Delta \Pi)$ kann nicht unabhängig von der Zusammensetzung sein, da dasselbe von der Art des Raumgitters abhängt, und die Art des Raumgitters sich innerhalb gewisser Grenzen mit der Zusammensetzung ändert. Wir werden später sehen, daß die Art des Raumgitters den Wert $(\Delta E + \Delta \Pi)$ bis etwa 10 Prozent seines Wertes beeinflussen kann.

Die Crompton-Waldensche Regel kann also auch bei normalen Flüssigkeiten nicht genau zutreffen, Abweichungen bis zu 20 Prozent vom Mittel der Konstante scheinen zulässig zu sein. Man dürfte also Stoffe, für welche die molekulare Entropieänderung zwischen die Werte 16 bis 11 fällt, als der Regel folgend betrachten dürfen. Bei diesen Grenzen der Regel würden 65 Stoffe von 157 der Regel folgen.

Größere und sehr große Abweichungen von der Regel kann nur das Glied xW_a bedingen. Für normale Flüssigkeiten ist der Assoziationskoeffizient $x = 0$, und deshalb verschwindet für sie das Glied xW_a. Wenn ferner bei der Kristallisation keine Änderung des Molekulargewichtes eintritt, also auch keine von der Zusammensetzung abhängige Polymerisationswärme, so ist die Möglichkeit der Erkenntnis Waldens, daß bei normalen Flüssigkeiten die Änderung der molekularen Entropie von der Zusammensetzung unabhängig ist, gegeben.

Da nun die Waldensche Regel für normale Flüssigkeiten in vielen Fällen zutrifft, so darf man darin eine Bestätigung meines

früher[1]) auf Grund des Nichtauftretens von Umwandlungskurven in den Zustandsdiagrammen nicht assoziierter Flüssigkeiten gezogenen Schlusses, daß bei der Krystallisation normaler Flüssigkeiten eine Änderung des Molekulargewichts nicht eintritt, erblicken.

Wenn für eine Reihe normaler Flüssigkeiten die Regel Waldens nicht zutreffen sollte, so steht man vor zwei Eventualitäten: entweder ist die Regel dahin zu beschränken, daß man sie nur für gewisse Gruppen chemisch ähnlicher Stoffe gelten läßt, oder man muß sich zur Annahme entschließen, daß bei den betreffenden, eine Ausnahme bildenden Stoffen ausnahmsweise doch Polymerisation bei der Krystallisation eintritt. Zu welcher von diesen beiden Eventualitäten man sich zu entschließen hat, hängt von der Zahl der Ausnahmen und ihren chemischen Beziehungen ab.

In der letzten Kolonne der Tabelle 3 bezeichnet der Buchstabe *n*, daß die Flüssigkeit normal ist, ihr Eötvös'scher Temperaturkoeffizient größer als 2 und unabhängig von der Temperatur ist, und der Buchstabe *a*, daß sie assoziiert ist, der Eötvös'sche Temperaturkoeffizient kleiner als 2 ist. Diese Einteilung deckt sich fast immer (ausgenommen sind die Flüssigkeiten, deren Moleküle aus sehr vielen Atomen aufgebaut sind) mit der Regel Waldens[1]), nach der eine Flüssigkeit assoziiert ist, wenn ihr Eötvösscher Temperaturkoeffizient, $\frac{\Delta E_0}{\Delta T}$, kleiner als der nach der Formel $\frac{\Delta E_0}{\Delta T} = -[1.90 + 0.011\, \Sigma \sqrt{A}]$, wo $\Sigma \sqrt{A}$ die Summe der Quadratwurzeln aus den Atomgewichten der das Molekül aufbauenden Atome ist. Man ersieht aus der Tabelle, daß drei Stoffe, die als Flüssigkeiten aller Wahrscheinlichkeit nach als normal zu betrachten sind, nämlich Acetylenbromid, Benzol und Dimethyläthylcarbinol, die zu kleinen Werte 8.5, 8.4 und 4.2 für die Änderung der molekularen Entropie bei der Krystallisation ergeben. Da die anderen Kohlenwasserstoffe *p*-Xylol und Naphtalin sowie eine Reihe von Cl- und Br- und anderen Derivaten des Benzols aber normale Werte ergeben, so wird man sich nicht zu jener Beschränkung der Regel Waldens zu entschließen haben, sondern eher die Annahme machen, daß beim Schmelzen der drei Stoffe eine Spaltung von Polymolekülen unter Wärmeentbindung stattfindet, wodurch die Entropieänderung beim Schmelzen verkleinert wird.

---

1) Zeitschr. f. phys. Chemie 82 S. 176 1913.

Im Gegensatz zu den normalen Flüssigkeiten haben die dissoziierten und assoziierten Flüssigkeiten molekulare Entropieänderungen, welche für die ersten sehr viel größer als die normalen, während sie für die zweiten sehr viel kleiner sein können. Die Werte für die dissoziierten Schmelzen wachsen von 16.0 bis 123 cal. und die für die assoziierten Schmelzen nehmen von 11.0 bis 2.3 cal. ab. In der Tab. 3 sind die Stoffe nach der Größe ihrer molekularen Entropieänderungen beim Schmelzen geordnet, in dieser Reihe nehmen die normalen Schmelzen mit ihren Werten von 16 bis 11 cal. eine Mittelstellung ein. Allerdings muß zugegeben werden, daß die Grenze zwischen normalen und assoziierten Stoffen zwischen den Werten 11.5 und 9.5 für $\frac{M.r}{T}$ nicht scharf ist. Das ist aber schließlich auch zu erwarten, da der Einfluß der inneren Arbeit und des verschiedenen Raumgitters nicht zu vernachlässigen ist.

Wenn beim Schmelzen der Stoffe mit zu großen molekularen Entropieänderungen Vorgänge verlaufen, die Wärme absorbieren, und beim Schmelzen der Stoffe mit zu kleiner molekularer Entropieänderung Vorgänge, bei denen Wärme frei wird, oder das Molekulargewicht der Flüssigkeit zu klein angenommen ist, so würde die Möglichkeit bestehen, daß die angenäherte Unabhängigkeit der molekularen Entropieänderung nach Inrechnungsetzung des Einflusses dieser Vorgänge, des Gliedes $x.Wa$ (Gleichung 2), allgemein zutrifft.

Allerdings ist an eine quantitative Prüfung dieser Möglichkeit zur Zeit nicht zu denken, aber es gibt eine Reihe von Tatsachen, die in qualitativer Weise auf das Zutreffen der Möglichkeit hinweisen. Beim Stearin mit der größten Abweichung wächst die Anzahl der Krystallisationszentren sehr stark mit der Zeit an, hieraus dürfen wir auf eine Reaktion in der Schmelze schließen, welche mit meßbarer Geschwindigkeit verläuft und vermuten, daß die Wärmeentwicklung dieser Reaktion die Schmelzwärme vergrößert. Dieselben Verhältnisse dürfen wir bei der Elaidin-, Stearin-, Palmitin-, Myristin- und Laurinsäure vermuten.

Das Phosphoniumchlorid ist als Dampf wie eine Reihe von Ammoniumsalzen fast vollständig in PH_3 und HCl dissoziiert, im flüssigen Zustand und oberhalb seiner kritischen Temperatur werden in seinen isotropen Zuständen nicht unerhebliche Mengen von PH_3 und HCl existieren, die bei der Krystallisation zu PH_4Cl zusammentreten und durch ihre Verbindungswärme die Krystallisationswärme erheblich vergrößern.

Ähnliche Verhältnisse trifft man bei den Salzhydraten. Auf ihren Schmelzkurven, welche die Abhängigkeit der Gleichgewichtstemperatur von der Konzentration wiedergeben, finden sich bei der Zusammensetzung des einer chemischen Formel entsprechenden Hydrates flache Maxima, welche auf eine ziemlich weitgehende Dissoziation des Hydrates in niedere Hydrate und Wasser deuten. Bei der Krystallisation bilden sich aus diesen Dissoziationsprodukten die Moleküle des Hydrates. Da bei der Dissoziation der Hydrate durchweg Wärme absorbiert wird, so wird die Schmelzwärme der Hydrate durchweg zu groß erscheinen, was auch durch die Tab. 3 bestätigt wird. In der letzten Kolonne der Tab. 3 ist den Stoffen, deren Schmelzen nachweislich dissoziiert sind, und bei deren Dissoziation Wärme absorbiert wird, der Buchstabe *d* hinzugefügt.

Der Anorthit hat eine ziemlich hohe Änderung der molekularen Entropie (16.0 cal.), was auch für andere Silicate nach den Differenzen ihrer Lösungswärmen im isotropen und anisotropen Zustande zutreffen wird. Wahrscheinlich kann diese Abweichung auf eine Dissoziation in SiO_2 und Metalloxyd zurückgeführt werden.

Bei den Stoffen, die als Flüssigkeiten assoziiert sind (Tab. 3 Buchstabe *a*), liegen die Verhältnisse nicht so einfach. Je nach dem Vorzeichen der Assoziationswärme und je nachdem sich an der Raumgitterbesetzung die assozierten oder normalen Moleküle beteiligen, haben wir die 4 Fälle des folgenden Schemas zu unterscheiden:

	Krystallbildend assoziierte Moleküle	Assoziationswärme	Krystallbildend normale Moleküle
Schmelzwärme	zu groß	Wärmeentwicklung	zu klein
	zu klein	Wärmebindung	zu groß

Da wir aber ohne genauere Kenntnis der Zustandsdiagramme nicht entscheiden können, ob die Wärme bindenden oder Wärme entbindenden Moleküle das Raumgitter besetzen, so kann der Nachweis, daß die zu kleinen molekularen Entropieänderungen wirklich durch Konzentrationsverschiebungen an der Krystallisationsgrenze während der Krystallisation bedingt sind, nur bei erweiterter Kenntnis der Beziehungen zwischen isotropen und anisotropen Zuständen erbracht werden.

Immerhin ist das Gewicht der Tatsache, daß fast nur die assoziierten Flüssigkeiten zu kleine molekulare Entropieänderungen bei der Krystallisation haben, nicht zu verkennen.

Auch wenn das Glied $x . W_a$, das den Einfluß der Assoziation

auf die molekulare Entropieänderung wiedergibt, verschwindet, indem entweder x oder Wa oder auch beide verschwindend klein sind, können zu kleine molekulare Entropieänderungen auftreten, wenn nämlich das Molekulargewicht der Flüssigkeit zu klein gewählt ist, wie das z. B. beim Wasser und Phosphor wahrscheinlich der Fall ist.

Beim Wasser würde man bei einer Verdoppelung des Molekulargewichtes der Eis I Moleküle in die Nähe des normalen Wertes gelangen, wenn man berücksichtigt, daß A_i hier das umgekehrte Vorzeichen hat wie bei den anderen Stoffen. Für gelben Phosphor, dessen Schmelze normal ist, müßte man das Molekulargewicht P_4 mit 6 multiplizieren, um zu dem Wert 12.0 zu gelangen. Da die Schmelzwärme des violetten Phosphors größer ist als die des roten und dieser größer als die des gelben, so ist es wahrscheinlich, daß der violette das kleinste, der rote das mittlere und der gelbe das größte Molekulargewicht hat.

Unter den Salzen fällt die normale Änderung der molekularen Entropieänderung beim $K_2Cr_2O_7$ von 13.1 cal. auf. Berücksichtigt man, daß dieses Salz einen Umwandlungspunkt hat, daß also seine Schmelze wahrscheinlich assoziiert ist, so hätte man einen viel kleineren Wert zu erwarten, aber die Umwandlungswärme ist in diesem Falle abnorm klein, infolge dessen wird auch die Assoziationswärme in der Schmelze verschwinden und daher ist denn auch der normale Wert von 13 cal. verständlich.

Im allgemeinen sind aber die Änderungen der molekularen Entropieänderungen bei den Salzen abnorm klein, zum Teil wohl wegen der Assoziation in ihren Schmelzen, worauf auch das häufige Auftreten von Umwandlungspunkten bei Salzen hinweist, zum Teil wohl auch wegen der elektrolytischen Dissoziation, die besonders bei den Halogensalzen mit etwas höheren Schmelzpunkten auftritt.

Bei den Metallen ist $\frac{M \cdot r_{p=1}}{T_s}$ viel kleiner als bei den nicht metallischen Stoffen und schwankt in der Tab. 4 nach Crompton zwischen 1.8 bis 2.6 cal., größere Werte finden sich bei Zn, Tl, Sn, Ga und Bi. Für Tl, Zn und Sn sind Umwandlungspunkte festgestellt worden, beim Bi deutet die Kontraktion beim Schmelzen auf Assoziation in der Schmelze. Es wäre also möglich, daß bei diesen Metallen das Schmelzen noch von einem anderen wärmebindenden Vorgang begleitet ist. Die Änderung der molekularen Entropie bei den Metallen ist also besonders klein, und das gerade scheint dem metallischen Zustande eigentümlich zu sein.

Tabelle 4.

	r Schmelzwärme $r_{p=1}$ in cal. pro 1 gr.	T_s absolute Temperatur d. Schmelzpunktes b. $p=1$.	$\frac{M.r}{T_s}$
K	15.7	335	1.84
Na	31.8	370	1.98
Pd	36.3	1773	2.18
Pb	6.4 bis 5.[illegible]	598 bis 595	2.19 bis 2.0[illegible]
Cu	43.0	1355	2.02
Al	80	927	2.33
Ag	21.1	1270	1.79
Au	16.3	1335	2.41
Mg	2.8	234	2.41
Cd	13.7	593.7	2.60
Pt	27.2	2053	2.58
Tl	7.2	562	2.61
Zn	28.1	688	2.67
Sn	14.2	503	3.44
Ga	19.1	286	4.65
Bi	12.5	540	4.82

Bei den Umwandlungswärmen reversibeler Krystallumwandlungen würde man keine Gesetzmäßigkeiten, welche ihre Abhängigkeit von der chemischen Zusammensetzung wie bei den Schmelzwärmen regeln, zu erwarten haben.

Zerlegt man die Umwandlungswärme U_p in ihre einzelnen Glieder, so gelangt man zu einem der Gleichung 2a ganz analogen Ausdruck

$$U_p = Aa + Ai + (\varDelta E + \varDelta \Pi)_{3.4} + x.Wa$$

wo Aa und Ai die äußere und innere Arbeit bei der Umwandlung, $(\varDelta E + \varDelta \Pi)_{3.4}$ die Änderung der Energie infolge der Änderung des Raumgitters und $x.Wa$ die Assoziations- oder Dissoziationswärme bei Änderung des Molekulargewichtes während der Umwandlung bedeuten. Im Gegensatz zur Krystallisation normaler Flüssigkeiten ist für die Umwandlungswärme $x.Wa$ das bestimmende Glied. Dieses aber steht, wie die Wärmetönungen chemischer Prozesse überhaupt, in keinem erkennbaren allgemeinen Zusammenhange mit der chemischen Zusammensetzung. Dazu kommt, daß $x.Wa$ gegenüber den andern Gliedern klein sein kann, in der Regel

aber die anderen Glieder sehr übertreffen wird. Die Folge hiervon ist die Nichtexistenz von generellen Regeln über die Abhängigkeit der Umwandlungswärme von der Zusammensetzung.

Überblickt man die Änderung der molekularen Entropie bei der Krystallisation oder beim Schmelzen, so steht fest, daß sie für etwa 65 Stoffe sehr verschiedener Zusammensetzung sich nur in den Grenzen zwischen 16.0 bis 11.0 cal. ändert, die Abweichungen vom Mittel 13.5 cal. können sehr wohl auf den Einfluß der inneren Arbeit und den der Natur des Raumgitters zurückgeführt werden. Bei 16 Stoffen mit zu großen Werten der molekularen Entropieänderung wird die Schmelzwärme nachweislich durch Dissoziationsprozesse vergrößert. Bei den vielen Stoffen (ca. 70) mit zu kleinen Änderungen wird wahrscheinlich in vielen Fällen ein wärmeentwickelnder Vorgang beim Schmelzen, der mit der Assoziation der Stoffe im flüssigen Zustande zusammenhängt, die Schmelzwärme verkleinern, nur bei zwei nachweislich normalen Stoffen, Benzol und Aethylendibromid müßte man einen mit der Krystallisation selbst engverbundenen wärmebindenden Vorgang annehmen, wenn man auf der ausnahmslosen Giltigkeit der Unabhängigkeit der molekularen Entropieänderung von der Zusammensetzung bei nicht metallischen Stoffen bestehen will.

Aus diesen Tatsachen darf man wohl für die Entropieänderung des Moleküls $\frac{\Delta E + \Delta \Pi}{T_s}$ bei der Krystallisation folgendes extrapolieren. Würde es für den anisotropen Zustand nur eine einzige Molekularanordnung, nur ein Raumgitter, also nur eine Art von Symmetrieeigenschaften geben, so wäre $M \cdot \frac{\Delta E + \Delta \Pi}{T_s}$ streng von der Zusammensetzung unabhängig, und zwar sollte das für alle nicht metallischen Körper, gleichgiltig ob sie assoziiert oder normal sind, gelten.

Vergleicht man den Einfluß der Zusammensetzung auf die Entropieänderung anisotroper Stoffe einerseits mit dem auf die Entropieänderung beim Schmelzen andererseits, so kommt man zum Resultat, daß beim Schmelzen sich weder die kinetische Energie der Moleküle noch der Energieinhalt der Atome im Molekül, sondern der Energieinhalt von etwas anderem ändern muß.

Nach dem Neumann-Koppschen Gesetz setzt sich der Wärmeinhalt einer Verbindung von etwa $T = 100^0$ bis zum Schmelzpunkt additiv aus den Wärmekonstanten der Elemente zusammen, er wird also nur durch die Zusammensetzung bestimmt. Dasselbe gilt

natürlich auch für die Entropieänderungen der Verbindungen zwischen 100° bis *Ts*.

Andererseits ist aber die von allen Zufälligkeiten, von der inneren Arbeit, dem Einfluß verschiedener Raumgitter und der Assoziation im flüssigen Zustande befreite molekulare Entropieänderung, also die Entropieänderung des Moleküls selbst, für alle Verbindungen, bestimmt aber für größere Gruppen von Verbindungen, unabhängig von der Zusammensetzung.

Hieraus folgt, daß Das, was seine Entropie beim Krystallisieren resp. Schmelzen hauptsächlich ändert, ein Etwas ist, das von dem materiellen Teil des Moleküls unabhängig bei diesen Vorgängen funktioniert. Nennen wir dieses Etwas, um uns nach keiner Richtung zu binden, die Molekülsphäre. Es scheint nun der Energieinhalt der Molekülsphäre sich nur bei der Krystallisation, der Umwandlung polymorpher Formen und auch bei chemischen Reaktionen erheblich zu ändern.

Wie die Molekülsphären bei der Krystallisation funktionieren, habe ich im Aufsatz „Zur atomistischen Theorie des Polymorphismus" Kap. B § 5 zu beschreiben versucht. Hinzuzufügen wären einige Vorstellungen, die aus der Lehre vom Isomorphismus folgen: Wenn zwei Molekülarten verschiedener Zusammensetzung gleiche Schwingungszustände der Molekülsphären haben, so kann die Besetzung eines Raumgitters in der Weise erfolgen, daß sie unabhängig von der Zusammensetzung vor sich geht, man hat dann die lückenlose Mischbarkeit. Wenn aber die Molekülsphären verschiedener Molekülarten nicht ganz gleiche, sondern nur ähnliche Schwingungszustände haben, so können die im Überschuß vorhandenen Moleküle die anderen in ihren Schwingungszuständen dahin beeinflussen, daß die in geringerer Anzahl vorhandenen Moleküle den Schwingungszustand der anderen annehmen, wodurch wiederum die Einordnung in dasselbe Raumgitter möglich wird. Da aber die Influenzwirkung von dem Verhältnis beider Molekülzahlen abhängt, so wird, wenn die Influenzwirkung schwach ist, eine große, wenn sie stärker ist, eine kleinere Mischungslücke entstehen.

Bei den Metallen hat sich für die Bildung von Mischkrystallen eine einfache Regel[1]) ergeben, welche aber für Nichtmetalle nicht zuzutreffen scheint. Das Metall mit höherem Schmelzpunkt hat die größere Neigung zur Mischkrystallbildung. Die Mischungslücke liegt daher nie symmetrisch zur Konzentrationsachse, son-

1) Zeit. f. anorg. Chem. B 53 S. 446 1907.

dern ist vom Metall mit dem höheren Schmelzpunkt zu dem mit tieferem Schmelzpunkt verschoben.

Nimmt man an, daß in Analogie mit anderen Vorgängen, bei denen die Molekularsphäre wahrscheinlich ebenfalls in Aktion tritt, mit chemischen Vorgängen, der Schwingungszustand der Molekularsphäre mit steigender Temperatur seine Trägheit verliert, die Influenzwirkung also bei höherer Temperatur leichter vorsichgeht, so ist das Zutreffen jener Regel zu erwarten, und wenn die Influenzwirkung umso leichter vorsichgeht, je geringer die Entropieänderung bei der Krystallisation ist, so würde hieraus folgen, daß ein befriedigendes Zutreffen der Regel gerade bei den Stoffen mit kleiner Entropieänderung, nämlich bei den Metallen, zu erwarten ist.

Haarförmige Krystalle von Eisenvitriol und Silber.

Von

O. Mügge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 24. Mai 1913.

Die feinen Häärchen von Eisenvitriol, welche aus manchen Marcasit- und Eisenkiesstufen hervorwachsen, sind oft höchst unregelmäßig gekrümmt; da daneben aber auf denselben Stufen meist auch gradlinige vorkommen, so bestand bisher wohl allgemein die Ansicht, daß auch erstere ursprünglich gradlinig gewachsen, später aber irgendwie mechanisch deformiert seien. Nun zeigt aber ein Versuch, daß diese Häärchen auch bei großer Feinheit keineswegs wie solche von Gyps und Steinsalz unelastisch deformierbar sondern im Gegenteil sehr spröd sind, und da Eisenvitriol sonst auch nicht dünne prismatische Krystalle zu bilden pflegt, neben den Häärchen auch kleinkörnige Aggregate vorkommen, schien eine nähere Untersuchung wünschenswert.

Im Polarisationsmikroskop ergiebt sich nun zunächst, daß die Häärchen meist aus mehreren Krystallindividuen bestehen, deren Grenzen gewöhnlich der Längsrichtung parallel laufen, die sich aber meist so weit überlagern, daß sie in keiner Stellung vollständig auslöschen. An ihren flügelartig verbreiterten Rändern läßt sich zuweilen aber doch feststellen, daß sie hier trotz der ganz krummlinigen Umrisse krystallographisch durchaus einheitlich orientiert sind, und bei Durchmusterung zahlreicher Häärchen finden sich bald auch solche, welche aus nur einem Individuum bestehen, überall trotz Spiralen- oder Schraubenlinienform gleichzeitig auslöschen, auch an allen Stellen soweit erkennbar dasselbe Interferenzbild und in derselben Orientierung zeigen. Daraus geht

hervor, daß es sich hier also keineswegs um Kryställchen handelt, welche gebogen worden sind, sie verhalten sich vielmehr so, als wären sie aus einer mehr oder minder flüssigen oder plastischen in Fäden ausgepreßten Substanz unter Erhaltung ihrer Form in den krystallinen Zustand übergegangen und zwar in nur ein Individuum, wenn sie mit nur einem impfenden Keim in Berührung kamen, in ein Aggregat, wenn sie von mehreren Keimen geimpft waren. Der Umstand, daß im letzteren Falle die Grenze der Individuen fast stets auf lange Strecken der Längsrichtung der Häärchen folgt, würde sich dann so erklären, daß die flüssige oder quasi-flüssige Substanz sehr langsam ausgepreßt wurde und sehr bald jenseits der Austrittsstelle, etwa infolge Verlust von Lösungsmittel, krystallin wurde, sodaß die entstehenden Krystallindividuen gewissermaßen der Austrittsstelle entgegenwuchsen, während ihre seitlichen Grenzen sich nicht merklich verschoben. Dadurch, daß die Krystallisationsgeschwindigkeit größer war als die Wachstumsgeschwindigkeit der flüssigen Fäden, blieben letztere stets sehr kurz, konnten daher nicht mit einander verschmelzen, auf der Unterlage festkleben oder sich ausbreiten oder sich zu einem Tropfen zusammenziehen. Daher trifft man auf den Stufen auch keine flüssigen oder colloiden Fäden, obwohl die Vitriolescierung noch immer weiter geht. Mit dieser Annahme steht auch im Einklang, daß die zahlreichen Flüssigkeits- und Gas-Einschlüsse der Fäden niemals krystallographische Conturen zeigen und in ihrer Anordnung stets genau der Längsrichtung der Fäden, nicht aber bestimmten krystallographischen Richtungen folgen.

Die Flüssigkeit war wahrscheinlich ziemlich viscos, sodaß die Ungleichheit der Reibung auf verschiedenen Seiten der Austrittsöffnung Krümmungen des Fadens nach sich zog, während stärkere Viscosität der äußeren Teile des Fadens gegenüber seinen inneren, etwa infolge stärkerer Austrocknung der ersteren, zur Auflösung des einen Fadens in mehrere pinselartig aus einander tretende und spiralig gekrümmte führen konnte. Ob diese Flüssigkeit lediglich aus $FeSO_4$-Lösung bestand, die infolge des Fehlens von Eisenvitriolkeimen auf den feineren Spalten der Kiese bei ihrem Austritt stark übersättigt war [1]), oder ob sie daneben durch Hydrolyse entstandenes Ferrohydrat enthielt, also emulsionsartig war, zu der sich erst infolge fortschreitender Oxydation des Kieses weitere

1) Vielleicht colloid, ähnlich dem von Cavazzi (Gazz. chim. ital. 42, II, 626, 1912) beschriebenen Calciumsulfat. (Chem. Centralbl. 1913 I, 885.)

Schwefelsäure gesellte, welche die Hydrolyse zurückdrängte, ist nicht zu entscheiden. Daß Gel-artige Massen in Form feiner Fäden aus den Spalten längs der Grenzflächen krystalliner Aggregate bei deren Zersetzung herausgetrieben werden können, zeigt der von Richard Schmidt[1]) in Erinnerung gebrachte Versuch zur Hervorrufung der sog. Aluminiumpest.

Unter den natürlichen Eisenvitriolen kommen neben mehr oder minder deutlichen krystallinen Bildungen auch solche vor, welche in der Form den colloiden Massen von Opal gleichen, aber aus sehr feinen, vermutlich von der Oberfläche nach dem Centrum dieser kugligen oder traubigen Bildungen gewachsenen Fäserchen bestehen.

Die vielfach gekrümmten Fäserchen von Eisenvitriol erinnern sehr an das natürliche Haar- und Drahtsilber, über dessen künstliche Bildung durch Erhitzen von Schwefelsilber schon Schreiber[2]) berichtet. Nach den Angaben von De la Beche[3]), Bischof[4]) und Moesta[5]) soll die Zersetzung von Schwefelsilber schon in Wasserdampf von 100° vor sich gehen. Nach Friedrich und Leroux[6]) wachsen aber Silberfäden nur aus künstlichem Schwefelsilber, welches stets schon kleine Mengen gediegenen Silbers enthält, heraus, aus natürlichem Silberglanz erst nach dem Schmelzen (bei welchem eine teilweise Oxydation an der Luft vor sich geht).

Nach meinen Beobachtungen beginnt das Herauswachsen von Haarsilber aus Schwefelsilber bei etwa 180°, und zwar sowohl aus künstlichem wie aus natürlichem (auch aus Akanthit). Angeschliffene und polierte Stückchen verändern schon vorher etwas ihre Oberfläche, werden matt, uneben und wie schon Hittorf beobachtete, weich. Die Abscheidung von Silberfäden wird beträchtlich erst bei ca. 300° und zwar erscheinen die Fäden zuerst stets da, wo auf das Schwefelsilber ein, wenn auch nur geringer Druck, ausgeübt wird, zugleich reichlicher in der Nähe der Ecken und Kanten als der Flächenmitten. Ob die Erhitzung in Luft oder Wasserstoff geschah, machte keinen erheblichen Unterschied, aber auch bei Erhitzung in indifferentem Gas wuchsen aus Silberglanz,

1) Dissert. Kiel, Halle 1911, p. 24.
2) Journ. de phys. mai 1784, p. 385, 386.
3) Bei Liversidge, Chem. News, 16. Febr. 1877, p. 68.
4) Pogg. Ann. **60**, 289, 1843.
5) Ueber das Vorkommen der Chlor-, Brom- und Jodverbindungen in der Natur. Marburg 1870, p. 39.
6) Metallurgie-Zeitschr. **3**, 361, 1906.

der nach mikroskopischer Untersuchung frei von Silbereinschlüssen war, Silberhäärchen in geringer Menge heraus, zugleich bildete sich ein Beschlag von Schwefel. Es findet also auch ohne Einwirkung von Sauerstoff, Wasserstoff oder Wasser eine geringe Dissociation beim Erhitzen statt, daneben anscheinend auch eine Reassociation, da sich länger erhitzte Stücke mit zahlreichen mikroskopisch kleinen Kryställchen bedeckten, die kaum etwas anderes wie Silberglanz sein können, da sie, wenn Aggregrate größerer Krystalle angewandt wurden, felderweise gleichzeitig aufschimmerten, also wohl orientierte Fortwachsungen ihrer Unterlage waren.

Woher die Erweichung des Silberglanzes schon bei 180° ca. rührt, ist nicht bekannt; vielleicht besteht die bei dieser Temperatur eintretende Zustandsänderung nicht in einer Umwandlung in eine andere krystallographische Modification, sondern in einem Zerfall in eine emulsionsartige Lösung von Silber in Schwefel[1]); dieser letztere wird an Sauerstoff oder Wasserstoff gebunden, und zwar zunächst nicht an der Oberfläche des Schwefel-Silbers, sondern in der Tiefe infolge einer Absorption von Sauerstoff bezw. Wasserstoff in seinen feinen Poren, auf deren Vorhandensein Weigel[2]) gelegentlich seiner Untersuchungen über die electrische Leitfähigkeit geschlossen hat. Daher erscheint das erste Silber bei mäßigem Erhitzen nicht an der Oberfläche als Ueberzug, sondern wird in feinen Fäden aus der Tiefe durch das entweichende Gas (SO_2 bezw. H_2S) mitgerissen.

Da das Silber aus dem bei ca. 200° selbst sehr weichen Schwefelsilber herausgepreßt wird, feine Silberfäden aber, wie der Versuch zeigt, auch bei Temperaturen weit oberhalb 200° durch einen gleich großen Druck wie er auf das Schwefelsilber ausgeübt wurde, nicht erheblich deformiert wurden, muß es bei seinem Austritt in einer sehr weichen Modification vorliegen, etwa vergleichbar der von Schwefelcadmium wie es von Allen und Crenshaw[3]) beim Fällen erhalten wurde. Beim Austritt aus dem Schwefelsilber wird es aber alsbald in eine feinkrystalline Masse verwandelt, die analog wie beim Eisenvitriol von ihrer flüssigen oder sehr plastischen Basis aus je nach der mehr gleichmäßigen oder ungleich-

---

1) Der elektrische Leitungswiderstand ist nach Beijerinck (Neues Jahrb. f Min. etc. B. B. **11**, 440, 1897) bei 180° ca. 1000 mal geringer als bei 80°.

2) Neues Jahrb. f. Min. etc. B. B. **21**, 326, 1907.

3) Zeitschr. f. anorg. Chemie, **79**, 189, 1912. Der Niederschlag ballte sich zu Kugeln zusammen.

mäßigen Reibung an den Rändern der Austrittsöffnung in graden oder krummen Linien vorwärts geschoben wird.

Die feinen und gröberen Drähte von Silber sind wie die Eisenvitriolhäärchen stets fein parallel ihrer Längsrichtung gestreift, zugleich fast stets um Richtungen senkrecht zur Längsrichtung viele Male geknickt, trotzdem aber unter dem Mikroskop glatt und glänzend; nur bei Häärchen, die durch langes Erhitzen von Schwefelsilber erhalten waren, erschienen ihre ältesten Teile fein gekörnelt, mit kleinen Knötchen etc. versehen, welche wohl eine Kornvergrößerung andeuten; sie sind zuweilen auch schon wieder geschwärzt, d. h. oberflächlich wohl wieder in Schwefelsilber übergeführt.

Das Silber erscheint aber keineswegs bloß in Haarform, fast ebenso häufig bilden sich auf dem Schwefelsilber kleine Kegelchen, flache Warzen etc., aber alle deuten auf einen flüssigen oder breiartigen Zustand des austretenden Silbers. Diese nicht haarförmigen Massen entstehen vielleicht dann, wenn durch rasches Erhitzen die Zersetzungsgeschwindigkeit des Schwefelsilbers größer ist als die Krystallisationsgeschwindigkeit des Silbers, sodaß letzteres noch eine kurze Weile an der Oberfläche flüssig oder quasiflüssig bleibt. Indessen muß hinzugefügt werden, daß auch unter diesen Umständen niemals eine Bewegung des Silbers nach Art einer Flüssigkeit beobachtet werden konnte; bei schnellem Erhitzen sieht man zwar wie die Silberbildung fortschreitet, aber es erscheint etwa so wie die Umwandlung einer krystallinen Modification in eine andere oder mehr noch wie die Verwitterung krystallwasserhaltiger Salze, indem fortwährend neue Wachstumscentren entstehen, die sich als weiße Flecke nach allen Seiten in der Oberfläche ausbreiten.

Das natürliche Haar- und Drahtsilber stimmt in seinen Formen mit dem künstlichen im Allgemeinen überein, indessen scheinen Warzenformen, wie sie namentlich bei schnellem Erhitzen entstehen, seltener zu sein. Die Drähte haben stets die gleiche Streifung parallel der Längsrichtung, zuweilen auch die zahlreichen Knickungslinien senkrecht dazu. In den Handbüchern wird dieses Silber zuweilen als „amorph“ bezeichnet, aber das gilt wohl nur für seinen ursprünglichen Zustand, jetzt stellt es zweifellos Pseudomorphosen von regulärem nach solchem „amorphen“ Silber vor und bei manchem ist es unter stetiger Kornvergrößerung nach und nach zur Ausbildung jener schönen Krystalle wie z. B. der von Kongsberg gekommen, die wegen ihrer mannigfaltigen Verzerrung, sonderbaren Aneinander-Reihung und Durchwachsung oft so schwer

zu entziffern sind. Zwischen deutlichen Krystallen und den glatten Haar- und Drahtformen giebt es alle Uebergänge. An den Krystallen fällt es bald auf, daß ihre Flächen selbst an Stellen, wo der Draht stark gekrümmt ist, doch ganz ebenflächig sind und daß auch da, wo letzteres nicht der Fall ist, ihre Krümmungen keineswegs der des Drahtes folgen. Im Allgemeinen erscheinen vielmehr ebenflächige Krystalle der Form (111).(001) längs krummen, und zwar meist windschiefen Leitlinien treppenförmig an einander gereiht, wobei die Individuen je nach ihrer Orientierung zur Axe des Drahtes verzerrt zu sein pflegen. Aber Verzerrung und Aneinanderreihung bedingen nicht die Drahtform, sondern umgekehrt. Die Krystalle sind auch nach dem Fehlen der Translationsstreifung nicht als deformierte zu betrachten; wo einzelne Partien, auch nach Maßgabe dieser Streifung wirklich deformiert sind, erscheinen sie nur etwa wie Beulen an einem im Großen und Ganzen noch wohl erhaltenen Gefäß.

Friedrich und Leroux (l. c.) beobachteten, daß Schwefelsilber auch schon durch Belichtung zerlegt wurde. In der Tat bemerkt man auf polierten Flächen von künstlichem oder natürlichem Schwefelsilber (auch von Akanthit), wenn auf sie Sonnenlicht konzentriert wird, schon in Bruchteilen einer Minute matte Stellen, welche sich mit einem feinen Pulver bedecken und nach Abwischen desselben unter dem Mikroskop eine feine Runzelung. In indifferenter Atmosphäre bestrahlte polierte Platten wurden gar nicht oder nur schwach angegriffen, einige Male war allerdings der Weg, den das Sonnenbildchen auf der Platte zurückgelegt hatte, unter dem Mikroskop erkennbar. Da die natürlichen Krystalle in den vor Sonnenlicht etwas geschützten Winkeln zwischen den größeren Krystallen einer Stufe auffallend oft stärker glänzende und ebenere Flächen aufweisen als mehr nach außen liegende, scheint es möglich, daß ihre zu Winkelmessungen weniger geeignete Beschaffenheit z. T. auf Lichtwirkung beruht. Nach der Oberflächenbeschaffenheit, welche noch mehr an die erhitzten Krystalle erinnert, scheint es aber, daß eine langsame Zersetzung der natürlichen Krystalle vermutlich auch ohne Lichtwirkung schon bei den Temperaturen der Erzgänge unter dem Einfluß von Sauerstoff und Wasserdampf vor sich geht. Dafür sprechen auch Angaben von Collins [1]) und von Readwin [1]), wonach aus Silberglanz hervorragende Silberdrähte schon bei gewöhnlicher Temperatur innerhalb eines Jahres ge-

---

1) Chem. News, 13. April 1877 p. 154 u. 4. Mai 1877 p. 186.

wachsen sein sollen, sodann Beobachtungen Hittorf's[1]) über die Zersetzung von Schwefelsilber, das vom Strome eines Grove'schen Elementes durchflossen wird, schon bei gewöhnlicher Temperatur im Zusammenhang mit denen von Chr. A. Münster[2]), daß das gediegene Silber von Kongsberg an diejenigen Teile der Gänge gebunden ist, deren Nebengestein elektrisch leitend ist. In der Natur mag aber Zersetzung von Silberglanz und seine Neubildung aus den Zersetzungsproducten vielfach abwechselnd auf demselben Gange vor sich gegangen sein, je nachdem ob die Reactionsproducte (außer Silber) vollständig entfernt wurden oder sich mehr oder weniger anhäuften, die Neubildungen von Silberglanz auf Silberdraht machen dies sehr wahrscheinlich. Dabei fand dauernd eine Kornvergrößerung des Silbers durch frühere Aufzehrung der kleinen Krystalle gegenüber den großen statt.

Die Tatsachen, über welche V. Kohlschütter und E. Eydmann[3]) hinsichtlich des Haarsilbers berichten in einer Abhandlung, die mir erst nach Abschluß vorstehender Untersuchung bekannt wurde, stimmen mit den hier mitgeteilten z. T. überein, namentlich auch hinsichtlich der Fähigkeit des Ag_2S in indifferenter Atmosphäre in geringem Grade flüchtig zu sein (wobei aber eine Dissociation nicht beobachtet wurde). Die Besonderheit des Ag_2S gegenüber anderen Sulfiden wird darin gesehen, daß seine Reduction in gasförmigem Zustande vor sich gehen könne, sodaß sich das Metall im statu nascendi in einer Art molekularer Zerteilung befinde. Dieses soll nun am leichtesten da sich niederschlagen, wo schon eine Spur von Metall vorhanden ist und da der Dampf des Ag_2S eine nur sehr dünne Schicht auf dem festen Sulfid bilden soll, wird angenommen, daß die Abscheidung weiteren Silbers unter den zuerst abgesetzten Teilchen erfolge, sodaß letzteren neues Material von der Seite des Sulfids untergeschoben werde und das Silber daher scheinbar aus dem Sulfid herauswachse. Unter gewissen Umständen (nämlich bei reichlicherer Verdampfung des Sulfids z. B. in Schwefeldampf) soll aber auch von den Spitzen des zuerst reducierten Silbers eine Keimwirkung ausgehen und das Metall so zu langen Fäden auswachsen.

Dieser Erklärung kann ich mich nicht anschließen. Da die Silberdrähte fest mit dem Silber verwachsen sind, ihre Spuren beim Abschleifen der erhitzten Silberglanzkrystalle in diesen

---

1) Pogg. Ann. **84**, 1851.
2) Neues Jahrb. f. Min. etc. 1898 II — 77 —
3) Ann. d. Chem. **390**, 340—365, 1912.

noch zu verfolgen sind, ist es wohl nicht wahrscheinlich, daß das ihnen zugeführte Material von der Oberfläche des Sulfids stammt; auch wäre dann nicht einzusehen, weshalb das Silber nicht, statt in Haarform mit allen Anzeichen der Auspressung in plastischem Zustande, in den gewöhnlichen Formen der durch Sublimation gebildeten Krystalle erscheinen sollte, wie es bei dem oben beschriebenen Versuch z. B. auch der Silberglanz tut.

Seismische Registrierungen in Göttingen im Jahre 1909.

Von

Ludwig Geiger.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. März 1913 von E. Wiechert.

Allgemeine Bemerkungen.

Dieser Bericht bildet die Fortsetzung der früheren ebenfalls in diesen Nachrichten erschienenen Jahresberichte. Zuerst ist ein Instrument beschrieben, das mechanisch die Dichte der Luft registriert; ist so der zeitliche Verlauf der Luftdichte gegeben, so kann man den Gang einer Uhr recht gut berechnen, also mit einiger Sicherheit extrapolieren und mit großer Sicherheit interpolieren [1]. Für die Seismik ist das natürlich während längeren Perioden trüben Wetters recht vorteilhaft.

Bezüglich der Instrumente sei auf des Verfassers Bericht 1907 [2]) verwiesen. Die Instrumente wurden sehr gewissenhaft von unserem Hauswart, Herrn Hilke, besorgt.

Als Grundlage der vorliegenden Jahresberichte dienten des Verfassers wöchentliche Erdbebenberichte. Die Bezeichnungen sind für das Jahr 1909 unverändert (vergl. S. 367), für das Jahr 1910 wurden jedoch neue Symbole eingeführt, entsprechend der vertieften Erkenntnis der Erbebenwellen. Ein Strich (—) bei den Amplituden bedeutet, daß dieselben unmeßbar klein sind, ein Fragezeichen, daß kein brauchbares Diagramm vorgelegen hat.

---

1) Wegen der Ausreise von Dr. Geiger nach Samoa zur Übernahme der Leitung des dortigen geophysikalischen Observatoriums muß die Beschreibung dieses Instrumentes noch zurück gestellt werden. [E. Wiechert.]

2) L. Geiger, Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1909.

Zum Schluß jeden Jahresberichtes ist eine Übersicht über die mikroseismische Bewegung gegeben, wie sie an jedem Tage morgens 7^h Greenwich geherrscht hat. Es wurde jeweilen die größte Amplitude der Schwebungen in der E-W-Komponente gemessen. Wenn jegliche Bewegung fehlte, so ist auch die Periode durch einen Strich ausgefüllt. Diese Messungen der mikroseismischen Bewegung hat für das Jahr 1909 Herr Dr. B. Gutenberg ausgeführt, wofür ihm auch an dieser Stelle bestens gedankt sei.

Die Zeit wurde während der ganzen Berichtsperiode vom Verfasser ca. alle 2 Wochen mit dem Durchgangsinstrument bestimmt [1]).

---

1) Vergl. L. Geiger, Gött. Nachr. math.-phys. Kl. 1909.

Zeichenerklärung.

Charakter des Erdbebens:

I = merklich, II = auffallend, III = stark.
d = (terrae motus domesticus) = Ortsbeben (am Orte fühlbar).
v = („ „ vicinus) = Nahbeben (unter 1000 km).
r = („ „ remotus) = Fernbeben (1000—5000 km).
u = („ „ ultimus) = sehr fernes Beben (über 5000 km).

Phasen:

P = (undae primae) = erste Vorläufer (Longitudinalwellen).
PR_n = n mal an der Erdoberfläche reflektierte erste Vorläufer.
S = (undae sekundae) = zweite Vorläufer (Transversalwellen).
SR_n = n mal an der Erdoberfläche reflektierte zweite Vorläufer.
PS = sog. Wechselwellen, d. h. Wellen, die bei der Reflektion an der Erdoberfläche ihren longitudinalen Charakter in transversalen oder umgekehrt verwandelt haben.
L = (undae longae) = Hauptbeben (lange Wellen).
M = („ maximae) = größte Bewegung im Hauptbeben.
$M_{rep\,I}$ = Oberflächenwellen, die die Station über den Gegenpunkt erreichen.
$M_{rep\,II}$ = Oberflächenwellen, die über Station, Gegenpunkt, Herd die Station zum 2. mal erreichen.
C = (coda) = Nachläufer.
F = (finis) = Erlöschen der sichtbaren Bewegung.

Art der Bewegung:

i = (impetus) = Einsatz.
e = (emersio) = Auftauchen.
T = Periode = doppelte Schwingungsdauer.
A = Amplitude der Erdbewegung, gerechnet von der Ruhelinie aus.
A_N = NS-Komponente von A.
A_E = E-W- „ „ „

Zeit und Maß:

Zeit = mittlere Greenwicher, gezählt von Mitternacht zu Mitternacht.
μ = Mikron = $^1/_{1000}$ Millimeter.

A ist kein geeignetes Maß für die Heftigkeit eines Bebens, sondern $\frac{\Delta g}{g}$, worin g die Beschleunigung der Schwere, Δg deren Änderung ist. Bei periodischen Störungen ist angenähert $\Delta g = \frac{4A}{T^2}$. Wird A in μ, T in Sekunden gemessen, so erhält man Δg in Milligal. 1 Milligal = $^1/_{1000}$ Gal = $^1/_{1000}$ c-g-s-Einheit der Beschleunigung. Weil g = ca. 980 Gal ist, ist 1 Milligal ca. 1 Milliontel der Schwerebeschleunigung g.

Datum		Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	μ	
Jan.	1	I	e L	21 49					
			M	51	10	1½	2	3	
			F	22 7					
„	3	I	e	22 14					
			e L	23 23					
			M	25	18	1¼	3	—	
			F	43					
„	5	I	e L	7 47					
			M	57	18	3	5	6	
			F	8 9					
„	13	I v	i P	0 47 13	1	—	0,9	—	Im 17000 kg-Pendel bes. gut.
			(S)	48 30	0,8	0,9	1½	0,6	VonFlorenz-Innsbruck gefühlt.
			M	49 42	1½	12	6	6	
			F	56					
„	13	I	e L	17 5					
			M	7½	17	1½	3		
			F	10				—	
								—	
„	15	I	e L	17 26					
			M_1	34	19	3	5		
			M_2	44	18	1½	3		
			F	50				—	
„	19	I	P	5 0 42	2	?	0,3		P nach dem 17000 kg-Pe
			e L	5				|	del. In Phokia (Kl.-Asien) v
			M	8	12	10	14	12	heerendes Beben.
			F	13					
„	23	III r	i P	2 55 1	4	5	3½	5	Herd 3600 km E-W-lich.
			S	3 0 26	11	20	40	15	Verheerendes Beben in
			SR_1	2 40	9	50	50	12	ristan (Persien).
			e L	5					
			M_1	11	17	250	450	300	
			M_2	12	17	350	300	500	
			F	5½					
„	24	I	e L	17 44					
			M	56	14	2½	3	8	
			F	18 20					
„	29	I	e	1 17	—	—	—	—	
			e	28	—	—	—	—	
			e L	39					
			M_1	42	21	3½	4	—	
			M_2	47	21	4½	5	—	
			M_3	53	18	2	1¾	—	
			F	2 10					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h	m	s	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h	m	s	s	μ	μ	μ	
Febr. 2	I	eL	19	57						
		M	20	4		14	0,8	$1^1/_2$	—	
		F		30						
„ 5/6	I	e	23	11,1		10	0,5	0,5	—	
		(e)		16,9		?	(0,5)	(0,5)	—	
		M		51		12	0,5	0,8	—	
		F	$0^1/_2$							
„ 9	II r	eP	11	28	59	4	$4^1/_2$	2	$3^1/_2$	Herd 2500 km E-W-lich.
		S		33	9	17	13	35	45	
		eL		35						
		M		39		22	130	120	100	
		F	13,2							
„ 9	I r	P	14	43	34	4	$1^1/_4$	0,6	$1^3/_4$	Herd 2500 km E-W-lich.
		S		47	43	14	$2^1/_2$	6	[illegible]	
		eL		49						
		M		53		21	25	30	25	
		F	15,7							
„ 10	I r	P	19	54	59	4	0,9	?	0,6	Herd 2500 km.
		S		59	11	14	$2^1/_2$	$4^1/_2$	7	
		eL	20	1						
		M		4		24	20	25	35	
		F	20,8							
„ 13	I	eL	5	4						
		M		13		12	2	$2^1/_2$	$3^1/_2$	
		F		21						
„ 13	I	eL	6	9						
		M		24		14	0,5	$1^1/_2$	—	
		F	7							
„ 13	I	eL	19	33						
		M		34		17	2	4	$7^1/_2$	
		F		48						
„ 14	I	eL	3	21						
		M		25		12	0,5	0,8	—	
		F		28						
„ 14	I r	P	15	51	18	4	4	2	4	Herd 2100 km E-W-lich.
		S		54	57	10	$1^1/_2$	3	4	
		eL		58						
		M	16	1		12	$3^1/_2$	$5^1/_2$	7	
		F		30						
„ 15	I r	e (S)	1	12		(12)	—	(0,3)	—	
		eL		19						
		M		25		17	$3^1/_2$	6	5	
		F		50						

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Febr. 15	II	e	9 36,7	?	—	—	(½)	
		(S)	39 44	6	?	1,2	0,7	
		e L	41					
		M	44	10	15	20	15	
		F	10¾					
„ 16	I	e	8 26					
		e L	31					
		M	38	17	4	8	7½	
		F	9 20					
„ 16	I	e L	17 7					
		M	16	14	1½	2	1½	
		F	36					
„ 16	I	L	18 38 bis 53	12	—	0,8	—	
„ 19	I	e L	10 11					
		M	16	14	1	2	—	
		F	33					
„ 20	I	L	22 36 bis 23	21	0,6	1½	—	
„ 22	I u	i P	9 40 23	3	5	4	20	
		i	42 46	7	1½	2½	10	
		e	45,5	4	3	3	4	
		i	49 45	8	2½	3	2½	
		e	54,4	12	2½	2½	12	
		i	56 45	12	3½	2	—	
		e	10 1,9	17	9	7	7½	
		i	5 36	18	35	7	—	
		i	12 47	16	13	6	6½	
		M	22	(30)	(25)	(25)	(25)	
		F	12					
„ 22	I r	e P	14 21 14	4	1¼	0,6	0,8	
		S	25 20	12	2½	3½	3½	
		e L	27					
		M	33	17	7	10	15	
		F	15					
„ 22	I	L	21 47 bis 22¼	15	0,6	1½	—	
„ 24	I	L	12 42 bis 51	(18)	(0,4)	(1½)	—	
„ 26	I u	P	16 59 29	7	1½	0,3	3	Herd 9300 km E-W-lich.
		S	17 9 55	9	5	2	0,6	
		e L	19					
		M	31	30	25	15	35	
		F	18,3					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
März 1	I	L	1 59 bis 2 12	17	0,7	1	—	
„ 2/3	I	i	23 39,7	(14)	(1)	—	—	
		e L	53					
		M	55	21	1½	2½	—	
		F	0 4					
„ 5	I	e (S)	12 27,1	17	½	½	—	
		e L	32					
		M	35½	14	1½	2	—	
		F	13					
„ 7	I	(e)	18 41,4	(17)	—	½	—	
		e L	19 8					
		M	14½	17	2	3	5	
		F	25					
„ 7	I	e L	20 36					
		M	40	14	1	2	—	
		F	21					
„ 8	I u	e	11 43	8	0,7	2½	0,9	
		e L	12 28					
		M	42	21	3½	8	8	
		F	14					
„ 10	I	e L	22 43					
		M	44	9	3½	5	1¾	
		F	55					
„ 11	I	P	0 7 36	4	0,3	0,6	1¼	Herd 9200 km.
		S	18 1	14	7	7	1½	
		e SR_1	23,8	12	1¼	1	—	
		e L	38					
		M	50	15	15	7½	20	
		F	1½					
„ 11	I	e L	21 14					
		M	23	18	0,4	3	—	
		F	40					
„ 12	I	e L	1 7					
		M	13	17	1	1½	—	
		F	25					
„ 12	I	e L	1 49					
		M	55	16	0,3	1¾	—	
		F	2 5					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
März 12/13	II u	P	23 31 5	4	0,3	1	$1^1/_4$	Herd 9000 km.
		e PR_1	34,4	4	0,6	$1^1/_4$	0,8	
		e PR_2	36,1	4	0,6	$1^1/_4$	0,6	
		e S	41 20	18	$3^1/_2$	$5^1/_2$	10	
		SR_2	50,8	18	5	20	6	
		e L	0 0					
		M_1	6	24	50	35	15	
		M_2	$11^1/_2$	18	30	80	45	
		M_3	$16^1/_2$	18	25	7	15	
		M_4	$19^1/_2$	14	30	20	35	
		$M_{rep\,I}$	3 21 bis 34	18	0,8	1	—	
		F	ebenda					
„ 13	II u	i P	14 41 28	3	$4^1/_2$	7	$5^1/_2$	Herd 9000 km.
		i PR_1	44 41	4	$3^1/_2$	$5^1/_2$	4	
		e PR_2	46,8	4	3	$4^1/_2$	$1^3/_4$	
		S	51 45	19	10	20	30	
		SR_1	57,8	40	80	100	45	
		e L	15 4					
		M	20	14	12	70	35	
		F	18					
„ 17/18	I u	i(PR_1)	23 11 50	4	0,3	0,3	0,4	
		e(S)	19,4	12	0,9	1	$1^1/_4$	
		e(SR_1)	26,7	21	8	$3^1/_2$	—	
		e(SR_2)	30,1	(24)	8	9	—	
		e L	42					
		M_1	$53^1/_2$	24	15	35	10	
		M_2	0 0	17	$3^1/_2$	8	13	
		F	2					
„ 22	I	e L	5 7					
		M	24	17	$1^1/_2$	5	5	
		F	6,0					
„ 22/23	I	e(P)	20 16,1	(3)	—	—	0,2	
		e(PR_1)	19,1	(3)	0,6	0,3	0,5	
		e S	26,4	10	0,9	0,7	—	
		e L	48					
		M	57	17	5	15	8	
		($M_{rep\,I}$)	23 42 bis 0 13	17	1	$2^1/_2$	—	
		F	ebenda					
„ 22	I (v)	e	22 6 8					17000 kg-Pendel.
		M	21	$^3/_4$	?	0,2	?	
		F	7					
„ 24	I	L	22 25 bis 30	(17)	(0,7)	($1^1/_2$)	—	
„ 27	I	e L	14 26					
		M	$35^1/_2$	17	$1^1/_2$	2	—	
		F	50					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
April 1	I	L	19 2 bis 12	10	—	0,7	—	
„ 2	I	L	12 18 bis 37	17	0,7	1½	—	
„ 3	I	iP	2 39 54	4	0,9	1½	2	Herd 2200 km.
		S	43 40	8	2½	0,8	0,9	
		eL	45	—	—	—	—	
		M	49½	14	2	3	3	
		F	3¼					
„ 5	I(v)	i	12 55 9	1	0,3	0,8	3½	17000 kg-Pendel.
		F	13 1					
„ 8	I	L	11 11 bis 24	12	0,2	0,5	—	
„ 10	Iu	P	5 46 45	4	0,9	3	4	
		e	6 1½	9	0,7	3½	3½	
		e	8½	18	3	3½	3	
		eL	29					
		M	53½	18	23	20	23	
		$(M_{rep I})$	7 27	18	5½	7	10	
		F	?					F fällt in den Papierwechsel.
„ 10	IIr	iP	18 55 10	3	3	3	1½	
		PR_1	57 7	3	3	5½	1½	Herd 4900 km.
		S	19 1 48	14	8	14	10	
		SR_1	5 15	14	13	6½	8	
		eL	11					
		M_1	16	15	40	40	20	
		M_2	18½	18	45	40	50	
		F	geht in das fogende Beben über.					
„ 10	IIr	P	19 46 32	5	3	3½	2½	Herd 8100 km.
		iS	56 3	15	7	6	4	
		SR_1	20 1	21	3½	8	4	
		eL	13					
		M_1	21	18	65	65	30	
		M_2	24½	15	20	55	55	
		F	22					
„ 11	I	i(P)	4 7 57	4	—	—	0,2	
		e(S)	13 59	12	0,5	0,5	—	
		e	16½	9	0,9	1½	0,6	
		eL	20					
		M	25½	17	3	8	10	
		F	5					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
April 11	I u	P	14 12 3	4	0,3	0,6	0,8	
		e S	21,5	12	4	1½	1¼	
		e L	40					
		M	50	14	2	6	8	
		F	16					
„ 11	I	e L	20 32					
		M	45	14	0,8	1	—	
		F	21¼					
„ 12	I u	e	1 27,5	6	—	0,3	0,2	
		e	34½	10	—	0,5	—	
		e	40½	8	—	0,3	—	
		e	51	(9)	—	(0,5)	—	
		i	2 11 26	4	—	0,3	0,4	
		e L	14					
		M	49½	14	1¾	2½	3½	
		F	3½					
„ 13	I	(L)	7 34 bis 51	14	0,5	1½	—	Vielleicht nur mikroseismis Bewegung.
„ 13	I	(L)	8 31 bis 48	12	1	1	—	Vielleicht nur mikroseismis Bewegung.
„ 13	I	e L	16 43					
		M	48	14	0,8	1	1½	
		F	53					
„ 13	I	e L	23 25					
		M	36½	17	2	2	5	
		F	46					
„ 14	II u	i P	20 6 8	4	4½	1¼	4	Herd 8900 km E-W-licl
		i PR_1	9 19	6	2½	1¾	3½	
		i S	16 20	14	12	9	10	
		SR_1	21,4	14	2½	1½	—	
		e L	29					
		M	46½	19	15	30	30	
		F	21½					
„ 23	II r	P	17 43 49	6	5½	5½	7	Herd 2000 km. In Portu gefühlt.
		i S	47 20	12	6½	5	12	
		e L	49½					
		M	52½	14	100	50	200	
		F	19					
„ 25	I	e L	1 41					
		M	55	21	1¾	2½	—	
		F	2¼					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
April 25	I u	e L	22 39					Es ist unklar ob es sich um 1 oder 2 ferne Beben handelt.
		M	23 5	18	3	3	—	
		F	geht in das folgende Beben über.					
„ 25/26	I u	e L	23 24					
		M_1	31½	34	17	25	10	
		M_2	40	19	6½	8	10	
		F	0¼					
„ 26	I	L	0 53 bis 1 4	14	0,3	—	—	
„ 27	I u	e P	13 2,8	4	2¼	1¼	2	
		PR_1	5,6	6	1½	0,9	0,9	
		S	12,6	18	6½	8	8	
		e SR_1	18,8	30	15	20	8	
		e L	35					
		M	53	24	30	45	55	
		F	16					
„ 28	I	L	7 21 bis 8 11	(17)	0,4	1	—	
„ 29	I u	(e)	22 54,6	6	—	—	0,2	
		S	23 5,1	9	2	2	0,6	
		SR_1	12,4	18	3	8	3	
		e L	23					
		M	42	22	4	20	25	
		F	1¼					
„ 30	I	(L)	13 3 bis 46	14	—	1	—	Aus der mikroseismischen Bewegung tauchen lange Wellen auf.
Mai 1	I	L	22 49 bis 59	12	0,3	0,8	—	
„ 2	I u	i P	7 16 35	5	1¾	2½	5½	Zwischen P und e L fällt der Papierwechsel. S fehlt vollständig.
		e L	44					
		M	8 14	30	4	10	8	
		F	8¾					
„ 2	I u	i P	18 30 54	4	0,6	0,6	1¾	
		e L	19 13 56					
		M	38	21	1	4	4	
		F	20⅓					
„ 5	I	L	3 10 bis 22	17	1	1½	—	
„ 8	I	L	11 15 bis 39	18	0,4	1¾	—	

Datum		Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	μ	
Mai	10	I u	e (P)	20 28,2	3	—	—	0,3	
			e (S)	37,7	7	$1^1/_2$	0,8	—	
			e (SR_1)	42,6	(14)	(1)	(0,6)	—	
			M	49	30	$2^1/_2$	5	—	
			F	$21^1/_2$					
„	12	I u	e	0 19,3	(10)	(0,5)	—	—	
			e	22,8	(18)	(0,4)	—	—	
			i	29,8	12	2	4	—	
			e L	51					
			M	1 5	17	3	1		
			F	41					
„	13	I	L	3 39 bis (5)	(12)	—	(0,5)	—	
„	13	I u	e P	13 51,0	4	—	—	0,3	
			e (PR_1)	54,6	4	—	—	0,3	
			e (S)	14 1,5	14	$1^1/_3$	2	—	
			M	26	24	$2^1/_2$	$2^1/_2$	$5^1/_2$	
			F	15					
„	16	I	e L	4 42					
			M	50	21	1	2	—	
			F	5					
„	17	II	$(iP)_I$	8 16 2	5	0,9	0,3	$1^1/_2$	Wie es scheint 2 superponierte Beben I u. II. Herd I = 9000 km, Herd II = 10300 km. E-W-lich, II in Bolivia gefühlt.
			$(iP?)_{II}$	17 0	10	$2^1/_2$	0,7	9	
			$(iPR_1)_I$	20 5	5	3	2	3	
			$(iPR_1)_{II}$	8 20 58	10	7	$2^1/_2$	15	
			$(iS)_I$	26 19	14	60	25	20	
			$(PS)_I$	27 4	14	15	15	10	
			$(S)_{II}$	28 10	14	50	25	55	
			$(iPS)_{II}$	29 8	(14)	(40)	(25)	15	
			$(SR_1)_{II}$	31,8	(17)	(30)	(20)	25	
			$(SR_1)_{II}$	34,3	17	15	20	20	
			M_1	56	21	40	17	40	
			M_2	9 1	17	30	15	15	
			F	?					F fällt in den Papierwechsel.
„	17	I	e	18 $44^1/_2$	—	—	—	—	
			e	51,1	8	0,5	0,7	$1^3/_4$	Bis $19^h 25^m$ und von $19^h 39^m$ bis $20^3/_4{}^h$ folgen sehr schwache unregelmäßige Wellen.
„	18	I u	e (P)	16 57,5	6	—	—	0,4	
			e (S)	17 $7^1/_2$	(8)	(0,3)	(0,2)	—	
			e L	17					
			M	31	14	$2^1/_2$	3	$5^1/_2$	
			F	18					
„	18	I	e L	18 46					
			M	58	18	$1^1/_2$	$3^1/_2$	6	
			F	19 25					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Mai 23	I	e	5 54,7	(9)	(1)	(1¹/₄)	—	
		eL	6 15					
		M	(36)	17	0,7	0,5	—	
		F	50					
„ 23	I	eL	11 27					
		M	38	14	0,8	0,9	—	
		F	45					
„ 25	I	e	5 1¹/₂	19	0,5	2	—	Vielleicht ist e die Maximalbewegung eines selbständigen Bebens.
		eL	46					
		M	6 0	21	6	12	17	
		F	6¹/₂					
„ 26	Iu	e(P)	2 23 11	4	0,2	0,3	0,6	
		e(S)	34,3	8	0,8	0,7	0,6	
		(SR₁)	39,6	12	0,5	0,7	—	
		eL	54					
		M	3 14	21	6	14	17	
		F	4 20					
„ 30	IIr	P	6 18 30	3	2¹/₂	3	3	Herd ca. 1700 km.
		eS	21,5	9	5	3	3	
		eL	23					
		M	25¹/₂	14	40	100	100	
		F	7¹/₂					
„ 30	Iu	P	21 20 6	1	0,9	0,7	0,3	
		eS	30¹/₂	17	5	4	5¹/₂	
		SR₁	37,6	17	3	3	5¹/₂	
		(eL)	48					
		M	22 11	21	10	6	12	
		F	23 40					
Juni 3	IIu	P	18 53 53	4	0,9	0,6	2¹/₄	Reißen.
		iS	19 4 58	9	7¹/₂	30	6	S setzt allmählich ein.
		SR₁	11,8	19	15	25	20	Herd 10100 km.
		eL	18					
		M₁	26	46	85	200	80	
		M₂	31	35	150	180	100	
		M₃	37	24	60	200	55	
		M₄	44	16	90	120	65	
		M₅	47	20	100	110	120	
		M₆	49	14	40	55	70	
		$M_{rep. I}$	20 58	21	12	5	17	
		F	22¹/₂					
„ 6	I	e	5 19,2	12	0,5	1	—	
		eL	49					
		M	6 3	18	3¹/₂	4¹/₂	6	
		F	6³/₄					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Juni 8	II u	e P	6 0,8	6	0,6	—	0,4	P fällt in die Stundenmarke.
		e (PR₁)	5,0	(6)	(2½)	(1)	(1)	
		e (S)	11,4	10	4½	2	0,9	
		i	14 32	21	30	12	12	
		e L	34					
		M_1	41½	30	180	80	150	
		M_2	44	22	120	70	130	
		M_3	49	19	100	65	100	
		F	fällt in den Papierwechsel					
„ 9	I u	e	0 52,1	9	1	—	—	
		e	55,1	19	1½	2	—	
		e	1 1	17	1	1	—	
		e L	18					
		M_1	26	22	8	8	13	
		M_2	29	21	10	8	12	
		F	3					
„ 11	I r	(e)	21 7 38	—	—	—	—	} 17 000 kg-Pendel.
		e	8 8	1	—	0,3	—	
		e	18	{ 17 1	1	2	2½	Verheerendes Beben an der französischen Riviera.
		i (S)	9 33	8	6	8	6	
		M_1	10,9	12	110	50	100	
		F	22					
„ 12	I u	e (P)	20 40 57	4	0,6	—	0,6	
		e	21 4,7	14	0,8	0,9	—	
		e	10,7	(24)	(3)	(4½)	—	
		e L	26					
		M	57	19	4½	6½	3½	
		F	23¼					
„ 15/16	II r	P	23 34 7	3	0,6	1⅓	1¾	Herd 1650 km.
		S	37 2	5	1¼	1¼	0,3	
		e L	39					
		M	40	9	20	14	13	
		F	0 15					
„ 16	I	L	17 38 bis 45	14	0,3	1	—	
„ 16	I	i	17 47 52	1	—	0,2	2	
		i	48 48	1	—	0,1	0,6	
„ 19	I	e	17 53					
		M	55	14	3	4½	3½	
		F	18 21					
„ 22	I	e	13 23	9	0,5	0,2	—	
		e	29	(12)	(0,7)	(0,5)	—	
		e L	55					
		M	14 1	22	6½	9	9	
		F	15					

Datum		Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen.
				h m s	s	μ	μ	μ	
Juni	22	I	L	18 52 bis 19 9	14	0,5	0,6	—	
„	23	I	L	2 33 bis 49	11	0,2	0,5	—	
„	27	I u	i	7 34 44	6	0,3	0,6	1	
			e	37,7	(10)	$(2\frac{1}{2})$	$(2\frac{1}{4})$	(2)	
			e	8 1,4	(19)	$(2\frac{3}{4})$	(2)	—	
			e L	18					
			M_1	33	24	13	15	20	
			M_2	43	18	9	9	12	
			F	10 10					
Juli	2	I	i	21 6 49	1	?	0,05	?	17 000 kg-Pendel.
			e	10 0	$1\frac{1}{2}$	?	0,05	?	
			i	8	$1\frac{1}{2}$	?	0,1	?	
			F	$11\frac{1}{2}$					
„	3	I	P	19 55 20	4	0,3	0,6	0,3	
			e L	$59\frac{1}{2}$					
			M_1	20 $2\frac{1}{2}$	14	$2\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	
			M_2	$3\frac{1}{2}$	10	4	$1\frac{3}{4}$	—	
			F	25					
„	6	I r	P	16 57 19	2	0,3	—	0,3	
			S	17 1,8	10	$1\frac{1}{2}$	0,9	0,9	
			e L	$4\frac{1}{2}$					
			M	$6\frac{1}{2}$	14	1	$6\frac{1}{2}$	4	
			F	50					
„	6	I r	e P	19 19 56	1	—	0,3	0,3	
			e S	23,6	(6)	(0,6)	(0,8)	(0,4)	
			e L	26					
			M_1	27	14	$2\frac{1}{2}$	3	2	
			M_2	$28\frac{1}{2}$	10	0,5	$2\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{4}$	
			F	50					
„	7/8	III r	$(iP)_{I}$	21 45 44	6	75	10	80	Verheerendes Beben in Buchara. Anscheinend zwei Beben I und II, die sich mit einem Abstand von 1^m 16^s überlagern. Herd I: 4600 km, Herd II: 4500 km.
			$(iP)_{II}$	47 0	6	55	10	75	
			$(PR_1)_{I}$	36	6	50	14	35	
			$(PR_1)_{II}$	48 40	5	130	9	20	
			$(PR_2)_{II}$	49 2	5	80	20	45	
			$(iS)_{I}$	52 6	14	150	200	120	
			$(iS)_{II}$	53 17	17	250	200	100	
			$(eSR_1)_{I}$	55,6	14	150	175	100	
			$(SR_1)_{II}$	56,8	13	130	100	200	
			$(SR_2)_{II}$	57 28	17	150	120	300	
			M	59	30	?	400	1000	
			F	$1\frac{1}{2}$					
„	9	I	L	2 5 bis 15	14	0,5	0,6	—	

Datum		Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen.
				h m s	s	μ	μ	μ	
Juli	10	I	e	20 58,8					
			M	21 0	9	0,5	0,5	0,7	
			F	5					
„	13	I	P	13 24 32	6	0,6	0,8	2	
			i	26,0	6	—	0,6	1	
			e	33,8	8	$1^1/_2$	$2^1/_2$	—	
			i	35 23	10	$3^1/_2$	$1^1/_3$	1	
			eL	43					
			M	52	(19)	$(1^1/_3)$	$(2^1/_2)$	$(3^1/_2)$	
			F	$14^2/_3$					
„	15	II r	P	0 38 45	3	0,6	0,6	0,9	Herd 1800 km. Verheerendes Beben in Elis (Griechenland).
			S	41 53	9	3	$2^1/_2$	3	
			eL	43					
			M_1	$44^1/_2$	14	20	25	10	
			M_2	$46^1/_2$	14	35	30	30	
			F	$1^1/_2$					
„	22	I	e	23 20 51	1	—	0,04	—	e nach dem 17000 kg-Pendel.
			M	$36^1/_2$	10	0,3	0,5	—	
			F	24 0					
„	23	I	e	21 9 51	$^2/_3$	—	0,15	—	17000 kg-Pendel.
			M	12 3	(6)	$(1^1/_4)$	$(8^1/_2)$	—	
			F	16					
„	26	I u	P	11 3 12	5	0,9	0,3	$1^3/_4$	
			e PR_1	5,1	5	0,3	0,3	0,3	
			e S	10,6	14	$2^1/_2$	$1^1/_3$	2	
			e SR_1	14,5	17	$1^1/_2$	1	—	
			e SR_2	16,7	14	$1^1/_3$	0,7	—	
			eL	21					
			M_1	26	19	5	$5^1/_2$	—	
			M_2	$28^1/_2$	17	$3^1/_2$	3	—	
			M_3	$31^1/_2$	19	$3^1/_2$	$4^1/_4$	7	
			F	13					
„	27	I	eL	16 20					
			M	$33^1/_2$	19	$2^1/_2$	2	7	
			F	17					
„	30	III u	P	11 4 44	9	$6^1/_2$	$3^1/_2$	20	Herd 9700 km. Verheerendes Beben in Mexiko.
			PR_1	8 10	7	15	$5^1/_2$	25	
			S	15 24	14	35	18	20	
			PS	15 58	23	70	45	60	
			e SR_1	20,9	23	45	25	40	
			e SR_2	$25^1/_2$	21	30	20	35	
			eL	30					
			M_1	45	21	180	35	160	
			M_2	49	18	140	85	130	
			M_3	$59^1/_2$	24	170	50	170	

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Juli 30		M_4	12 2	18	120	50	130	
		$M_{rep.I}$	14 40	18	2	1¼	3	
		F	15½					
„ 31	I u	P	18 57 42	2	0,3	—	0,6	Verheerendes Beben in Mexico.
		e(S)	7,1	6	0,6	0,6	—	
		e L	24					
		M	28½	21	2½	2¾	4½	
		F	geht in das folgende Beben über.					
„ 31	I u	P	19 31 46	5	?	?	2	„Reißen". Verheerendes Beben in Mexico.
		PR_1	35 16	5	3	3	4	
		e S	42,8	17	9	5½	5½	
		e SR_1	49,0	21	10	10	9	
		e L	57					
		M_1	20 12	20	55	15	45	
		M_2	16	18	40	25	30	
		F	22					
Aug. 2	I	e L	10 51					
		M	59	15	1¼	1½	2	
		F	11 16					
„ 2	I	e	14 48					
		(M)	53½	9	1	0,8	0,7	
		F	15 25					
„ 5	I	e	15 6 5					17 000 kg-Pendel.
		M	38	1½	?	0,2	?	
		F	8					
„ 7	I	(P)	17 8 16	4	—	—	0,6	
		(e PR_1)	11,6	6	0,3	0,6	0,7	
		e L	57					
		M	18 14	19	1½	3	3½	
		F	19					
„ 11	I	e L	12 54					
		M	55½	18	1¼	2½	—	
		F	13 21					
„ 12	I	e L	13 14					
		M	25	18	1¾	1¾	3	
		F	40					
„ 14	II u	i P	6 42 59	6	0,6	0,9	3	Herd 9000 km. Verheerendes Beben in Japan.
		S	53 15	9	1½	3½	0,7	
		e L	7 14					
		M	24½	14	40	40	55	
		F	fällt in den Papierwechsel					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Aug. 16	Iu	eP	7 11,9	5	?	—	0,6	„Reißen".
		i	15 15	5	?	0,3	0,6	
		eS	22,6	24	?	6	5½	
		SR_1	28,4	24	?	6	5½	
		eL	35					
		M	49½	18	?	30	40	
		F	fällt in den Papierwechsel					
„ 18	Iu	P	0 59 3	5	2	1¼	5½	
		PR_1	1 2,6	5	0,6	1¼	1¼	
		i(S)	9 14	5	1¼	4	0,3	
		eL	44					
		M	55	31	15	30	40	
		F	3					
„ 22	I	P	7 50 15	5	0,3	0,3	0,6	Vertikalseismometer.
		e(S)	56,5	5	0,3	0,6	—	
		eL	8 12					
		M	26	17	1	1½	3	
		F	fällt in den Papierwechsel.					
„ 22	Iu	iP	15 46 21	2	0,7	—	1¼	Vertikalseismometer.
		eS	56,9	12	0,5	0,3	—	
		eL	16 1					
		M_1	8½	13	2½	3	3	
		M_2	9½	17	6	2½	8	
		F	50					
„ 22	I	P	17 52 20	3	—	—	0,3	Vertikalseismometer.
		eS	18 3,2	12	—	0,5	—	
		eL	8					
		M_1	11	14	2	3	2	
		M_2	16	17	2	5½	8	
		F	18¾					
„ 25	Iv	e	0 24 3	½	?	0,05	—	17000 kg-Pendel. Verheerendes Beben in Siena.
		i	49	1½	?	0,3	0,3	
		eL	26					M_2 scheint das Maximum eines 2. Bebens zu sein.
		M_1	28	9	9	6	12	
		M_2	36	9	2½	3	4½	
		F	1					
„ 29	Iu	P	10 41 47	2	—	—	0,3	Vertikalseismometer.
		e(S)	52,4	12	0,5	0,5	—	
		eL	11 10					
		M	25½	12	2	2	3⅔	
		F	12					
„ 30	Iu	P	13 12 38	5	0,3	?	1¼	
		eS	23,2	9	1	0,8	—	
		eL	39					
		M	44	22	5½	6	10	
		F	14 20					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Aug. 31	I u	i(P)	11 57 1	3	—	1	0,8	17 000 kg-Pendel.
		S	12 6 20	13	2¹/₂	0,6	—	
		e L	16					
		M	29	19	2	3	3¹/₂	
		F	13 35					
„ 31	I	i	13 52 46	9	1	1¹/₂	5	Vielleicht künstliche Störung.
		F	14 1					
Sept. 5	I	L	13 46 bis 14 1	10	0,3	0,5	2	
„ 5	I	L	15 39 bis 51	12	0,8	0,8	1¹/₄	
„ 6	I	e L'	15 32					
		M	48¹/₂	18	0,9	1³/₄	3	
		F	16 4					
„ 6	I v	e	11 22,8	¹/₂	?	0,05	?	17 000 kg-Pendel.
		S	23 27	1¹/₂	?	0,3	?	
		M	36	1¹/₂	1	1¹/₂	0,6	
		F	25¹/₂					
„ 7	I u	P	15 38 34	5	0,9	0,6	0,9	
		S	45,5	9	0,8	0,8	1¹/₂	
		e L	54					
		M	16 1	14	5¹/₂	5¹/₂	5¹/₂	
		F	17					
„ 8	I u	P	17 1 27	4	2	4	12	Herd 8300 km.
		S	11 7	14	5¹/₂	5¹/₂	3²/₃	
		e L	21					
		M	41	20	10	20	15	
		F	19					
„ 8/9	I u	e	23 48,0	17	1	1	—	
		e	54¹/₂	17	1	0,5	—	
		e L	0 12					
		M	32	17	2¹/₄	2	2³/₄	
		F	1					
„ 10	I u	P	18 21 18	2	0,3	—	0,3	Herd 9100 km.
		S	31 35	8	1	0,6	0,6	
		e L	52					
		M	19 2¹/₂	20	1	1¹/₂	—	
		F	19¹/₃					
„ 11	I	e	5 10,8	3	0,3	0,4	0,3	
		e	18,8	8	0,8	0,8	0,6	
		e L	22					
		M	26	14	2¹/₄	7	5¹/₂	
		F	6					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Sept. 11	Iu	e(P)	11 8,8	6	0,6	0,3	0,7	
		e(S)	15,8	8	1²/₃	1²/₃	—	
		e(SR₁)	18,6	14	1	1¹/₃	2	
		eL	41					
		M	51	24	7¹/₂	12	5¹/₂	
		F	12²/₃					
„ 12	I	eL	0 27					
		M	32	18	0,9	1¹/₄	—	
		F	1					
„ 12	Iu	e(P)	15 48,5	4	—	0,3	0,3	Vertikalseismometer.
		e(S)	58,4	6	0,3	0,3	—	
		eL	16 17					
		M	30	17	1	1¹/₂	—	
		F	17					
„ 16	I	e(P)	19 2,7	3	0,3	0,3	0,5	
		e	5,9	3	0,7	0,3	1	
		L, F	gehen in das folgende Beben über					
„ 16	Iu	eP	19 50,7	4	?	?	1¹/₃	
		(S)	20 0,6	9	1	3²/₃	0,8	
		eL	18					
		M	29	19	9	14	20	
		F	21¹/₄					
„ 19	Iu	P	20 31 35	3	—	0,3	1	
		eS	40,6	10	0,8	0,5	—	
		L	51 bis 21 25	17	0,8	1	—	
„ 19	I	(P)	21 57,1	2	—	—	0,3	
		eL	22 1					
		M	2¹/₂	10	1¹/₂	2	1	
		F	22¹/₂					
„ 21	I	e	19 8					
		M	54¹/₂	21	4	5	4¹/₂	
		F	20¹/₂					
„ 22	Iu	e(P)	14 54,6	1	0,7	0,4	0,3	
		e	57¹/₂	3	0,7	0,3	0,3	
		S	15 4,9	14	2¹/₂	0,7	2	
		M	24¹/₂	27	10	6	7¹/₂	
		F	16¹/₄					
„ 23	I	eL	16 39					
		M	43¹/₂	18	1³/₄	1¹/₄	3	
		F	17¹/₄					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Sept. 29	I	L	18 31 bis 36	17	0,8	—	—	
Okt. 2	I	e	14 20					
		M	29	9	0,3	0,5	—	
		F	38					
„ 2	I	i (P)	18 23 27	(5)	—	—	(0,6)	
		e (L)	30					
		M	34	14	$1^{3}/_{4}$	1	4	
		F	40					
„ 2	I	e (P)	18 42,8	5	0,6	0,3	0,6	
		e L	50					
		M	54	14	3	$1^{1}/_{3}$	4	
		F	$19^{1}/_{4}$					
„ 2	I	e (P)	21 40,7	5	0,3	0,3	0,6	
		e L	47					
		M	$51^{1}/_{2}$	14	3	1	4	
		F	22 10					
„ 8	II v	i P	10 0 58	1	—	0,3	0,6	In Agram gefühlt.
		e L	$2^{1}/_{2}$					
		M	3 23	7	120	130	40	
		F	11 34					
„ 8	I	e	11 2,8					17 000 kg-Pendel.
		M	3 43	1	—	0,2	—	
		F	5					
„ 10	I	e	5 $40^{1}/_{2}$					In Agram gefühlt. 17 000 kg-Pendel außer Betrieb.
		M	41 19	8	$4^{1}/_{2}$	$4^{1}/_{2}$	6	
		F	47					
„ 10	I	e	5 58,2					In Agram gefühlt. 17 000 kg-Pendel außer Betrieb.
		M	59 11	9	11	8	15	
		F	6 3					
„ 11	I	e	15 3,7					17 000 kg-Pendel.
		M	4 28	$1^{1}/_{2}$	?	0,3	?	
		F	$5^{1}/_{2}$					
„ 12	I	e L	10 43					
		M	$50^{1}/_{2}$	18	2	$1^{1}/_{4}$	—	
		F	$10^{1}/_{4}$					
„ 17	I	e	22 36					
		M	47	12	$1^{1}/$[illegible]	$2^{1}/_{2}$	—	
		F	23,0					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Okt. 18	I	eL	9 11					
		M	16	17	2½	1	3	
		F	34					
„ 20/21	IIu	iP	23 49 51	5	2½	0,6	1¼	Herd 5800 km E-W-lich.
		iS	57 19	10	4	10	5	Verheerendes Beben in Beludschistan.
		SR_2	0 2 41	14	15	25	20	
		(SR_3)	3 56	10	20	10	6	
		eL	8					
		M_1	14¾	16	90	150	80	
		M_2	16	17	120	120	100	
		M_3	18	11	80	60	60	
		M_4	20¾	12	60	60	50	
		F	3					
„ 23	I	i(P)	21 30 12	3	?	0,3	0,8	17000 kg- / Z- } Pendel.
		F	36					
„ 26	I	°e	7 50,6					Ganz geringes Beben im 17000 kg-Pendel.
		M	44	½	?	0,1	?	
		F	51,3					
„ 28	Iu	e(S)	4 10,5	10	0,8	1⅓	0,9	
		(SR_1)	16,6	19	1½	5½	—	
		(SR_2)	20,5	19	1	2⅔	—	
		eL	33					
		M	46	19	3	8	11	
		F	5⅓					
„ 29	I	e	7 25					
		M	33	21	2	3½	—	
		F	48					
„ 29	I	e(S)	16 6,2	14	0,6	0,3	2	
		eL	9					
		M	14	15	7	5½	18	
		F	55					
„ 29	I	e(S)	17 40,8	9	0,5	0,3	0,8	
		eL	44					
		M	48¼	14	13	7	17	
		F	18⅔					
„ 30	Iu	i	10 35 46	3	0,7	0,3	0,5	
		i(S)	45 57	12	2½	0,8	8	
		(PS)	48¾	17	4	2	3	
		$e(SR_1)$	52	12	1½	1⅓	—	
		$e(SR_2)$	57	12	2½	2¼	1½	
		$e(SR_3)$	59	12	2	1⅓	1½	
		M	11 16	24	8	7	6	
		F	12					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Okt. 31	II u	P	10 36 5	6	0,3	0,3	1	Herd 10300 km.
		PR_1	39,8	4	3 1/3	1 1/3	0,5	
		iS	47 16	14	9	10	4	
		PS	48 12	14	10	3 1/2	2	
		SR_1	53 4	15	15	20	4 1/2	
		eL	11 0					
		M_1	8 3/4	36	60	85	15	
		M_2	14 3/4	21	35	9	40	Nach M_2 folgen bis $11^h 22^m$ noch mehrere relative Maxima.
		F	13 1/3					
Nov. 1	I	iP	6 28 22	5	0,3	0,3	0,6	Herd ca. 7000 km.
		S	36,9	17	4	4 1/2	3	
		eL	44					
		M	50 3/4	24	15	15	25	
		F	7 2/3					
„ 1	I	eL	9 30					
		M	37	14	1 1/4	1 3/4	2	
		F	10,0					
„ 8	I	L	17 5 bis 35	21	2 1/2	1 3/4	—	
„ 8	I	eL	21 20					
		M	30 1/2	18	3 1/2	2 1/2	10	
		F	55					
„ 10	III u	$(iP)_I$	6 25 31	14	20	15	200	Anscheinend 2 Beben I und II kurz hintereinander. $\Delta_I = 8400$ km, $\Delta_{II} = 8500$ km. Vielleicht kann man den vergangenen Herd so auffassen: Zuerst war ein Beben 8400 km von Göttingen und zwar an demjenigen Ende einer Bruchlinie, das näher bei Göttingen liegt. Die Auslösung durchlief dann die Bruchlinie und gipfelte in einem 2. Beben am entsprechenden Ende. Nimmt man an, daß die Auslösung mit der Geschwindigkeit der 1. Vorläufer in der Oberfläche läuft und daß der Großkreis durch die Bruchlinie Göttingen passiert, so erhält man als Länge der Bruchlinie nur 200 km, was durchaus denkbar ist.
		$(P)_{II}$	26,3	14	7 1/2	7 1/2	45	
		$(iPR_1)_I$	28 47	14	10	10	80	
		$(PR_1)_{II}$	29 43	14	12	15	55	
		$(PRn)_{I,II}$	33 1/3	17	15	20	35	
		$(S)_I$	35 15	12	20	25	10	
		$(S)_{II}$	36 1/3	20	55	45	40	
		$(PS)_{II}$	37 2/3	14	45	30	25	
		$(SR_1)_I$	41 5	14	15	20	8	
		$(SR_1)_{II}$	41 53	17	80	20	9	
		$(SR_2)_{II}$	46	17	30	17	17	
		$(SR_3)_{II}$	47	17	50	20	30	
		eL	52 1/3					
		M	7 6	14	75	50	90	
		F	9 1/4					
„ 12	I	(S)	4 37 57	20	6	3	—	
		M	5 11 1/3	19	2 1/2	2 2/3	—	
		F	50					
„ 12	I	e(S)	20 19,7					
		eL	22					
		M	29	14	2 2/3	4	6	
		F	21					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Nov. 20	I	e	13 28½					
		eL	30					
		M	46½	16	2	2	2½	
		F	14,1					
„ 21	II u	P	7 48 22	6	1¼	0,9	4½	
		PR_1	51 33	6	1¼	0,9	2	
		S	58,7	17	3	2	—	
	Zwischen S und eL fällt der Papierwechsel.							
		eL	8 19					
		M	29½	14	40	45	70	
		F	9½					
„ 27	I	e	4 0,6	17	1½	1	—	
		eL	9					
		M_1	15	19	2	2⅔	3½	
		M_2	25½	10	0,5	1½	1	
		F	4¾					
„ 28	I u	P	1 17 54	4	—	—	1½	P im Vertikalseismometer sehr scharf.
		eL	2 14					
		M	37	19	2½	3½	7	
		F	3					
Dez. 8	I	eL	10 6					
		M	18	18	1¾	2½	6½	
		F	11¼					
„ 9	I u	eP	15 53,3	4	0,3	0,3	0,5	Aus M, $M_{rep.I}$ folgt Δ = 15500 km.
		e	55,5	4	1⅓	1⅔	1½	
		i	56 38	10	3	4½	10	
		e	57,5	10	3	3⅔	5½	
		eL	16 25					
		M	54	21	18	35	45	
		($M_{rep.I}$)	17 41	17	6	4	6	
		F	18¾					
„ 9	I u	(e)	22 5,5	7	0,9	0,6	0,9	
		e	11,4	8	3	1	—	
		e	15,4	6	3	1¼	0,7	
		eL	41					
		M	52	19	4	12	7½	
		F	geht in das folgende Beben über.					
„ 9/10	II u	e	23 43,5	5	—	—	0,3	Aus M, $M_{rep.I}$ folgt Δ = 15350 km.
		e	46,2	5	—	—	0,6	
		e (PR_1)	47,4	6	6	4½	12	
		S	53 23	14	14	15	6	
		i (PS)	54 1	14	9	12	4	
		e	56,0	17	9	10	35	

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	T	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
		eL	0 14					
		M	27½	17	20	55	17	
		($M_{rep. I}$)	1 37	24	3½	3½	—	
		F	2					
Dez. 13	I	iP	0 23 30	½	0,3	0,05	—	Herd 800 km.
		S	25 0	1	0,3	0,25	—	
		M	46	{ 1 7	3½	3½	4⅔	
		F	28					
„ 18	I	L	10 33 bis 36	9	1	1⅓	6	Aus der mikroseismischen Bewegung tauchen einige starke Wellen auf.
„ 22	Iu	iP	13 8 12	9	1⅔	2	10	
		eL	53					
		M	14 30	19	2½	6	10	
		F	15					
„ 23	I	e	18 55 12	1¼	—	0,15	—	17000 kg-Pendel.
		F	19 0					
„ 23	Iu	e	22 38,0	—	—	—	—	
		e	57½	—	—	—	—	
		eL	23 17					
		M	30	19	—	5½	—	
		F	46					
„ 24	I	e	0 16 13					
		M	18 19	1	—	0,3	—	17000 kg-Pendel.
		F	20					
„ 28	I	e	12 29					
		M	35	18	2	4	—	
		F	42					

Mikroseismische Bewegung 1909 7ʰ Greenwich.

Datum	Januar		Februar		März		April		Mai		Juni	
	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E
	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ
1.	6	0,4	6	0,4	4	0,1	5	0,2	5	0,1	—	—
2.	6	0,4	?	?	5	0,3	5	0,2	5	0,2	?	?
3.	6	0,1	6	0,3	5	0,1	5	0,2	5	0,1	?	?
4.	6	0,4	6	0,3	—	—	5	0,3	5	0,3	5	0,1
5.	6	0,4	6	0,3	4	0,1	5	0,3	5	0,3	—	—
6.	6	0,4	6	0,1	—	—	5	0,2	4	0,1	?	?
7.	7	$1^1/_2$	6	0,1	?	?	—	—	—	—	?	?
8.	8	0,8	5	0,3	5	0,2	—	—	?	?	?	?
9.	6	0,3	7	0,5	5	0,1	?	?	?	?	?	?
10.	6	0,3	8	2	—	—	?	?	?	?	?	?
11.	6	0,9	7	0,3	—	—	?	?	?	?	?	?
12.	8	2	5	0,1	4	0,1	—	—	?	?	?	?
13.	8	0,5	5	0,1	?	?	?	?	4	0,1	?	?
14.	8	$3^1/_3$	6	0,3	—	—	4	0,2	?	?	?	?
15.	7	$1^1/_2$	6	0,4	—	—	?	?	?	?	?	?
16.	7	$1^3/_4$	6	0,3	—	—	—	—	?	?	?	?
17.	8	$1^1/_3$	5	0,2	5	0,1	—	—	—	—	?	?
18.	8	$2^1/_2$	6	0,1	5	0,3	—	—	—	—	?	?
19.	7	2	5	0,1	5	0,4	—	—	—	—	?	?
20.	8	1	4	0,1	5	0,2	5	0,1	?	?	?	?
21.	7	0,5	4	0,1	5	0,1	5	0,2	5	0,1	—	—
22.	8	$2^1/_3$	4	0,1	5	0,1	5	0,2	—	—	?	?
23.	6	0,3	4	0,1	—	—	5	0,2	—	—	5	0,1
24.	5	0,4	—	—	?	?	5	0,1	?	?	?	?
25.	5	0,1	4	0,1	4	0,1	—	—	—	—	?	?
26.	4	0,1	4	0,1	—	—	—	—	5	0,2	?	?
27.	4	0,1	4	0,1	4	0,1	5	0,1	5	0,2	?	?
28.	6	0,3	4	0,1	?	?	?	?	—	—	?	?
29.	6	0,3			5	0,1	5	0,1	—	—	?	?
30.	7	1			5	0,3	5	0,1	?	?	—	—
31.	7	0,5			5	0,1			?	?		

Mikroseismische Bewegung 1909 7^h Greenwich.

Datum	Juli		August		September		Oktober		November		Dezember	
	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E
	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ
1.	?	?	?	?	—	—	5	0,1	4	0,1	7	0,4
2.	?	?	?	?	5	0,1	5	0,1	6	0,4	6	0,2
3.	?	?	?	?	5	0,1	5	0,1	?	?	?	?
4.	—	—	?	?	4	0,1	5	0,1	?	?	6	0,3
5.	?	?	—	—	?	?	?	?	?	?	6	0,3
6.	?	?	4	0,1	—	—	6	0,3	?	?	?	?
7.	?	?	4	0,1	5	0,2	7	0,4	5	0,2	7	0,3
8.	?	?	?	?	6	0,2	6	0,9	5	0,2	?	?
9.	?	?	4	0,1	?	?	?	?	6	0,3	5	0,2
10.	?	?	—	—	?	?	6	0,3	?	?	?	?
11.	?	?	?	?	?	?	6	0,3	6	0,3	6	0,4
12.	?	?	?	?	?	?	6	0,3	6	0,2	6	0,4
13.	?	?	5	0,2	?	?	6	0,1	?	?	?	?
14.	?	?	?	?	?	?	?	?	5	0,1	6	0,1
15.	?	?	5	0,1	?	?	6	0,4	5	0,1	6	0,1
16.	?	?	?	?	?	?	6	0,4	5	0,2	6	0,2
17.	—	—	?	?	5	0,2	7	0,9	6	0,3	5	0,1
18.	5	0,1	?	?	5	0,1	7	0,4	6	0,2	5	0,1
19.	5	0,1	5	0,1	?	?	5	0,1	6	0,3	?	?
20.	—	—	6	0,1	5	0,1	6	0,3	6	0,2	6	0,3
21.	?	?	5	0,1	5	0,1	5	0,2	6	0,3	6	0,3
22.	?	?	6	0,1	?	?	6	0,2	5	0,2	?	?
23.	5	0,1	?	?	?	?	6	0,4	5	0,2	6	0,3
24.	6	0,2	?	?	?	?	6	0,3	5	0,2	5	0,2
25.	?	?	5	0,1	?	?	5	0,4	5	0,1	5	0,1
26.	6	0,2	?	?	?	?	5	0,3	?	?	6	0,3
27.	6	0,2	—	—	?	?	5	0,2	5	0,1	5	0,2
28.	5	0,1	?	?	?	?	5	0,1	7	0,9	5	0,2
29.	4	0,1	?	?	?	?	4	0,1	7	0,9	6	0,3
30.	?	?	?	?	5	0,1	4	0,1	7	1,2	6	0,1
31.	?	?	?	?			4	0,1			8	1,2

Zur Embryonalentwicklung der Strepsipteren.

Vorläufige Mitteilung.

Von

R. W. Hoffmann.

Mit einer Tafel.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. Juli 1913 durch Herrn E. Ehlers.

Die nachfolgenden Seiten enthalten kurz die wichtigsten Resultate des embryologischen Teils meiner Strepsipterenstudien. Im Gegensatz zu dem hier nicht veröffentlichten morphologischen Abschnitt (über den ich später hier zu referieren gedenke), der mehrere Arten, darunter zwei exotische, behandelt, wurde für die vorliegenden entwicklungsgeschichtlichen Studien fast ausschließlich eine einzige Form benutzt. Ich entdeckte das betreffende Material in einem Glas stylopisierter Hymenopteren aus Paraguay, aus der Ausbeute des Herrn Dr. Bohls, das mir auf meine Bitten vom Direktor des Göttinger zoologischen Instituts, Herrn Geheimrat Ehlers, freundlichst zur Verfügung gestellt wurde, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank aussprechen möchte [1]).

Unsere Kenntnis der Embryonalentwicklung der hochinteressanten Gruppe der Strepsipteren beschränkt sich bis jetzt auf den Inhalt einer einzigen kleinen und dazu höchst fragmentarischen Arbeit von Brues [2]), die uns mit einer Anzahl sehr eigenartigen Entwicklungsstadien bekannt macht, für die in der

---

1) Zur Bestimmung des Wirts und seines Strepsipters bin ich bis jetzt noch nicht gekommen. In meiner ausführlichen Arbeit werde ich die Namen beider Formen angeben.

2) Brues Charles Thomas: A Contribution to our Knowledge of the Stylopidae. Zoologische Jahrbücher, Abt. f. Anat. u. Ontog. d. Tiere. 18. Bd. 1903.

Embryonalentwicklung anderer Insektengruppen bisher keine Homologa gefunden werden konnten. Eben dieser Umstand, sowie die Tatsache, daß zwischen den einzelnen Stadien des Forschers weite Lücken klaffen, ließen eine Untersuchung der interessanten Verhältnisse sehr wünschenswert erscheinen.

Ich beabsichtige hier nur einen kurzen Überblick über die Hauptergebnisse meiner embryologischen Forschungen zu geben. Von vergleichend embryologischen Betrachtungen sowie phylogenetischen Untersuchungen werde ich natürlich absehen müssen. Diese Dinge werden ausführlich in meiner Hauptarbeit behandelt werden.

Ei und Eihüllen.

Die ganze Embryonalentwicklung der Strepsipteren, bis zur ausgebildeten Trianguliniform, verläuft im Mutterleib. Die Art, wie die Eier heranreifen, scheint durchaus keine einheitliche zu sein. Während Brues für Xenos peckii konstatieren konnte: „Every one of the eggs contained in the ovaries of the same animal is in exactly the same stage of development. This condition persists throughout the entire development, all the embryos in one female hatching at practically the same time", fand ich bei der Paraguayform gelegentlich fast alle Stadien, von der frühesten Anlage des Keimstreifens bis zur ausgeschlüpften, bereits im Brutkanal befindlichen Trianguliniform, in einem Muttertier vereinigt. Bei einer javanischen Art, Neocholax jakobsoni, an der ich besonders morphologische Studien über die männlichen Geschlechtstiere machte [1]), konnte ich zum mindesten feststellen, daß verschieden weit ausgebildete ältere Stadien nebeneinander vorkommen — ebenso bei einem deutschen Stylops. Immerhin war auch bei der Paraguayform die Regel, daß nur eine geringere Anzahl verschiedener Stadien nebeneinander vorkamen. Gewöhnlich überwog ein Stadium an Zahl bei weitem. Die erwähnten Tatsachen und andere, die ich nicht anführe, werfen vielleicht ein gewisses Licht auf die Streitfrage, ob die Entwicklung der Strepsipteren auf parthenogenetischem oder geschlechtlichem Wege erfolgt. — Darauf werde ich in meiner ausführlichen Arbeit näher einzugehen haben. Hier nur noch soviel, daß auch in solchen Fällen, wo eine große Menge sehr differenter Stadien nebeneinander beobachtet wurden, keinerlei regelmäßige Verteilung innerhalb des Mutterkörpers zu sehen war. Von Ovarialschläuchen war bei den von mir untersuchten Tieren keine Spur mehr zu erkennen, die Eier und Embryonen lagen ein-

1) Ich verdanke sie der Liebenswürdigkeit des Herrn Edw. Jacobson in Java.

gebettet in dem Fettkörper, der bei jüngeren Stadien sich dicht an die äußere Eihülle anlegt, bei älteren nur noch lose mit ihr verbunden ist.

Es dürfte wohl außer Zweifel sein, daß der Fettkörper neben dem Eidotter bei der Ernährung der Embryonen eine hervorragende Rolle spielt: Im Laufe der Embryonalentwicklung erleidet er langsam eine Degeneration, die in einer allgemeinen Verminderung seiner Substanz und dem Auftreten zahlreicher Vacuolen seinen Ausdruck findet.

Über die Eireifung, die Brues eingehender beschreibt, vermag ich nichts mitzuteilen, da mir die Stadien vor dem Austritt des Weibchens aus dem Wirtskörper bei der Paraguayform fehlen. Bei einem deutschen Stylops fand ich allerdings ein Eibildungsstadium bei der schon ausgebildeten Form. Auf Schnitten zeigten sich hier im Innern des Eis zahlreiche Dotterzellen, die dicht aneinander gelagert waren. Umgeben war das Ei von mächtigen großkernigen Zellen, welche eine Art Follikelepithel um es bildeten. Von den sog. Polarzellen Brues war indessen nichts zu erkennen.

Die frühesten Stadien, die ich von der Paraguayform fand, zeigen das Ei in der Blastodermbildung begriffen. Das Ei ist erfüllt von Dotterkugeln, zwischen welchen eingestreut eine Anzahl Kerne liegen. Der größte Teil der Kerne hat sich schon in der Blastodermhaut angesammelt. Von Dotterzellen — wie ich sie im Stylopsei fand — sehe ich hier keine Spur mehr.

Die Hülle, welche das Ei umgibt, ist in diesem Stadium außerordentlich dick. Sie ist zelliger Natur. Auffällig erscheint die große Ähnlichkeit ihrer Zellelemente mit den sie umlagernden Fettkörperzellen. Auf einem späteren Stadium besteht die Eihülle aus einem Syncitium großer, stark vascularisierter Zellen. An einem Pole besitzt sie meist eine starke Verdickung. Ich will hier gleich die weiteren Schicksale dieser Eihülle schildern: Im Lauf der Entwicklung sehe ich zwischen Ei und Eihülle einen Lückenraum entstehen. Die plasmatische Substanz der Eihaut ist mit den Kernen gegen das Ei hin gelagert. Nach der äußeren Grenze hin sehen wir eine Verdickung der Substanz eintreten. Es erfolgt sodann eine Spaltung der ursprünglich einheitlichen Haut in einen äußeren zellenlosen und einen inneren zelligen Teil. Beide Häute — dies möchte ich hier besonders betonen, da Brues zu ganz anderen Anschauungen gekommen ist — entstehen unabhängig vom Ei. Auf späteren Stadien verbacken sie wieder miteinander, wohl infolge des Drucks, den die zwischen innerer Haut und Embryo ausgeschiedene Flüssigkeit auf die Hüllen ausübt.

Das Resultat ist eine einheitliche Haut, die wir nun als Chorion bezeichnen dürfen. Die Zellen sind in diesem Stadium schon längst abgestorben. Gegen Ende der Embryonalzeit verdünnt sich das Chorion sehr auffällig und wird dann leicht zerreißlich.

Neben dem Chorion, wird der Embryo jedoch noch von einer inneren Haut umkleidet, die eine ganz andere und sehr eigenartige Genese hat, davon später mehr.

Blastoderm und Keimstreifen.

Nach einiger Zeit sind sämtliche Kerne aus dem Innern in die periphere Zone des Eis gewandert und bilden hier ein Blastoderm. Es will mir indessen scheinen, daß niemals ein völlig geschlossenes Blastoderm entsteht, sondern daß am einen Pol von Anfang an eine Lücke klafft. An dieser Stelle liegen auch die Polkörperchen.

Brues fand für Xenos, daß das zweite Polkörperchen, kurz nachdem es ausgeschieden ist, eine Verschmelzung mit dem Eikern eingeht. Dies kann für meinen Fall nicht stimmen, da ich regelmäßig zwei Polkörperchen fand (s. Fig. 2, Po.), mehrmals sogar ein drittes, das dann, offenbar durch Teilung, aus dem zuerst ausgeschiedenen hervorgegangen war.

Nun setzt ein sehr merkwürdiger Prozeß ein: Das Blastoderm, das im Anfang fast das ganze Ei gleichmäßig überzieht (s. Fig. 1), beginnt sich allmählich nach dem bedeckten Eipol zurückzuziehen. Hand in Hand damit vergrößern sich seine Zellen zusehends. Anfangs plattenförmig, werden sie mehr und mehr zylindrisch, um endlich konische Form anzunehmen (Fig. 2, B.C.). Der gesamte ungewöhnliche Prozeß ist sehr auffällig, sodaß eine Täuschung ausgeschlossen ist. Es stehen mir übrigens viele Dutzende von Zwischenstadien zur Verfügung, die ihn einwandfrei beweisen.

Das Längenwachstum der ehemaligen Blastodermzellen ist nun nicht nur auf ihre Konzentration auf ein kleines Areal zurückzuführen, sondern vor allem auch auf Substanzzunahme, die ihren Ausdruck in einer erhöhten Dotterresorption findet. An dem Teil des Keims, an dem sich die Zellkappe befindet, ist die Dotterkugel stark verschmälert, ja sie bildet hier im Laufe des Entwicklungsprozesses eine Art Zapfen (s. Fig. 2, Do.Z.), um welchen sich die Zellen herumgruppieren. Dieser Dotterzapfen wird nun allmählich immer weiter resorbiert, bis er schließlich nur noch als wenig umfangreiches Gebilde zwischen die Zellhaube hineinragt. In diesem Stadium hebt sich die letztere bereits deutlich vom Dotter ab.

Infolge der fortgesetzten Verringerung des Dotterzapfens nähern sich die gegenüberliegenden Zellelemente immer weiter einander; zugleich erfolgt nach unten eine Überwucherung des Dotterzapfens, der allmählich, bis auf eine Hervorwölbung, von den Zellen resorbiert wird. Das Resultat des Prozesses ist eine ringsum geschlossene Hohlkugel [1]), in der sich ein anfangs nur sehr schmales schlitzförmiges Lumen von becherförmiger Gestalt vorfindet, dessen Konkavität nach unten gekehrt ist. Die Hohlkugel mit dem schlitzförmigen Lumem ist aber nichts weiter als die primitive Keimstreifenanlage.

Um diese Zeit finden sich im Dotter regelmäßig drei Kerne. Sie sind übrigens schon zu sehen, wenn das Blastoderm gerade erst angelegt ist. Da ich niemals ein Stadium ohne Kerne im Dotter fand, so schließe ich daraus, daß sie bei dem Zerklüftungsprozeß des Mutterkerns übrig bleiben und nicht sekundär aus dem Blastoderm in den Dotter einwandern. Im Anfang sind diese Kerne klein und sternförmig (s. Fig. 1, Vi.), sehr bald jedoch verändern sie sich bedeutend: Sie schwellen beträchtlich an, werden rund und bläschenförmig und verwandeln sich schließlich in mächtige, amoeboide Gebilde. In diesem Stadium finden wir sie auf Figur 3 (Vi.). Es ist keine Frage, daß sie nun zu echten Vitellophagen geworden sind, denen die Verarbeitung des Dotters obliegt. Sie bilden in allen Phasen ganz ähnliche Bilder, wie ich sie in meiner Arbeit über die Ernährung der Embryonen von Nassa mutabilis für die bei der Dotterresorption innig beteiligten Makromerenkerne beschrieben habe. Im Innern sind sie mit dunkel sich färbenden Körnchen erfüllt; sodann besitzen sie einen sehr großen, mit der Heidenhainschen Methode sich tief schwarz färbenden Nukleolus, der ebenfalls auf späteren Stadien Pseudopodienbildung zeigen kann.

Hand in Hand mit den Umwandlungen der Dotterkerne, sehen wir auch an der Dottersubstanz selbst eine Verwandlung vor sich gehen: Im Anfang (s. Fig. 1) besteht der Dotter aus einer großen Anzahl kleinerer und größerer Kugeln. Im Lauf der Entwicklung nimmt er ganz gewaltig an Volumen zu (Fig. 3). Es ist klar, daß dieser Vorgang auf Flüssigkeitsaufnahme zurückzuführen ist. Dafür sprechen auch die mächtigen, mit einer färbbaren Substanz erfüllten Flüssigkeitskugeln, die auf Schnitten sich häufig, wenn der Inhalt ausgewaschen ist, als leere Räume darstellen. Außer

1) Genau genommen handelt es sich nicht um eine echte Hohlkugel, sondern eher um eine solche mit eingedrücktem Boden, wobei die Konkavität dem Dotter zugekehrt ist.

diesen Kugeln findet sich in der Dottermasse eine kleinkörnigere Substanz, in welche die Vitellophagen ihre Pseudopodien ausstrecken.

Während sich diese Vorgänge im Dotter abspielen, verändert sich auch die Keimblase. Zunächst vergrößert sich ihre zentrale Höhle, wohl durch den Druck flüssiger Substanzen, die in sie ausgeschieden werden. Hierdurch erfolgt eine Dehnung der gesamten Blase, was, in Verbindung mit Zellteilungen, besonders in der dem Dotter zugekehrten Wand, schließlich zu einem schnellen Wachstum des gesamten Keims führt.

Gleichzeitig erfolgt hierbei eine bemerkenswerte Veränderung an der oberen Wand der Keimblase (Fig. 3): Während anfangs die gesamte Blasenwand ungefähr die gleiche Dicke hatte, sehen wir nun, daß sie sich sehr schnell dorsalwärts verdünnt, wogegen die dem Dotter aufliegenden Zellelemente ihren säulenartigen, epithelialen Charakter vorläufig beibehalten. Die Verdünnung des freien Epithels, die mechanisch wohl zum Teil auf die Druckwirkung der in der Blase ausgeschiedenen Substanz zurückzuführen ist, wird begünstigt durch eine Art Vacuolisierung seiner oberen peripheren Teile. Durch die hier geschilderten Vorgänge kommt es nun zur Bildung der eigentlichen Embryonalanlage: *Die dem Dotter aufliegende allmählich sich stark verdickende Platte* (K.) *wird zum Keimstreifen, die sich über sie hinziehende verdünnte Wand der Blase* (E.H.) *wird zur Embryonalhaut.*

Die Keimanlage umwächst nun allmählich den ganzen Dotter, wobei sie anfangs die Form einer gegen letzteren geöffneten Kugelschale, und später die Gestalt eines nach beiden Seiten aufgewölbten Streifens annimmt, dessen beide Enden unablässig aufeinander zustreben. Bei diesem Vorgang verdünnt sich die obere Zelllage der Keimblase immer mehr und legt sich schließlich dem Keimstreifen als dünnes Häutchen dicht an (Fig. 4, Eh.).

Währenddem hat die Dotterkugel ebenfalls ihre Gestalt verändert. Sie hat völlig ihre Kugelform eingebüßt und erstreckt sich nun allein als verbindende Masse zwischen den inneren Teilen des Keimstreifens (s. Fig. 4).

Auf diesem Stadium zerfällt der Keimstreifen bereits in drei Regionen, in den Kopflappenabschnitt, eine mittlere Partie und in einen Schwanzlappenteil.

Entwicklung der äusseren Form.

Sehr bald hat nun der Keimstreifen die Kopflappen erreicht. Da sein Wachstum hiermit nicht beendet ist, so sehen wir ihn seitlich ausweichen und an der linken oder rechten Seite des Kopflappens vorbeiwachsen. Auch die Kopfanlage macht hierbei eine Ausweiche-Bewegung: sie neigt sich entsprechend deutlich nach rechts oder links. Auf ihrem äußersten Stadium angelangt, finden wir die Schwanzanlage ziemlich scharf nach hinten abgeknickt und sich mit ihrer Spitze dem mittleren Teil des Keimstreifens nähernd.

Während dieses Umwachsungs- und Verlagerungsprozesses des Keimstreifens haben sich allmählich die Extremitätenanlagen herausgebildet. Soweit ich sehen kann entstehen dieselben ziemlich gleichzeitig, wenngleich auch ihre Weiterentwicklung später eine verschiedene ist. Es war zu erwarten, daß die embryologische Untersuchung viel kompliziertere Verhältnisse ergeben würde, als sie die ausgebildete Trianguliniform zeigte [1]), da die große Primitivität ihrer äußeren Organisation als sekundäre Abänderung infolge des Parasitismus, zu vermuten war. Dies hat sich in der Tat bestätigt. Sämtliche Mundorgane, einschließlich Labrum, Antennen, I. und II. Maxillen, von denen bei der Trianguliniform im ausgebildeten Zustand nur Reste zu erkennen sind, kommen auf dem Keimstreifen zur Anlage, außer den Thoracalbeinen überdies zwei Reihen Abdominalextremitätenanlagen.

Nur relativ kurze Zeit verharrt der Embryo auf dem Stadium mit extremster Schwanzabknickung. Bei fortschreitender Entwicklung bleibt der hintere Teil des Keimstreifens im Wachstum mehr und mehr gegen den vorderen zurück, was äußerlich in einer scheinbaren Verkürzung seinen Ausdruck findet: Der abgeknickte Teil gelangt allmählich wieder in die Sagittalebene und entfernt sich mehr und mehr von dem Kopfteil, der sich in der Folge wieder aufrichtet. Zum Teil werden diese Verschiebungen allerdings auch dadurch erzielt, daß sich der Vorderteil des Embryo gegen den vorderen Pol hin erstreckt. Während sich Kopf- und Schwanzteil dorsal von einander entfernen, hat sich der letztere allmählich vom Dotter, der nun ganz von einem Epithel überwachsen ist, abgehoben (s. Fig. 5). Am Ende dieses nun ziemlich vorgeschrittenen Stadiums, auf dem jedoch der primäre Mitteldarm noch nicht zur Anlage gekommen ist (s. unten), erfolgt nun ein plötzliches Um-

1) Das geht auch aus dem einzigen (sehr alten) Keimstreifenstadium hervor, das Brues gefunden und beschrieben hat.

klappen des Schwanzteils nach der ventralen Seite. Ungefähr um die Zeit des Eintritts dieses Ereignisses vollziehen sich am Embryo sehr wichtige Entwicklungsprozesse, die unten näher geschildert werden. Diese neue Lage, die auf Fig. 6 zum Ausdruck kommt, behält der Embryo bis zum Zeitpunkt des Ausschlüpfens bei.

Extremitätenanlagen.

Auf einem Stadium, auf welchem der Schwanzteil des Keimstreifens bereits seine charakteristische Krümmung gemacht hat, lassen sich die gesamten Extremitätenanlagen als kleine Höcker erkennen.

In der Mediame, ziemlich weit nach vorn am Kopfabschnitt, findet sich alsdann eine relativ starke dreieckige Hervorwölbung — die Labrumanlage — und hinter ihr eine kleine Zellenwucherung — die Stomodaeumanlage. Ebenso lassen sich mühelos im inneren Winkel des Kopflappens die Antennenanlagen als zwei längliche Ausstülpungen erkennen. In ganz regelmäßiger Anordnung folgen hinter dem Labrum die Anlagen der Mandibeln, I. Maxillen und II. Maxillen [1]); hieran schließen sich die drei Paar Thoracalextremitätenanlagen an und endlich eine größere Anzahl Abdominalextremitätenanlagen. Wie wir sehen, entwickeln sich also im Anfang die Extremitätenanlagen ganz auf die gewöhnliche Art.

Auch auf den späteren Stadien ist von einem anormalen Verhalten zunächst noch nichts zu sehen.

Was die Kopfextremitäten anbelangt, so erhalten sie anfangs noch eine weitere Ausgestaltung. Hiermit verbunden sind gewisse Wachstumsverschiebungen. Die Anfangs postorale Antennenanlage wandert weit nach vorne über den Mund hinaus an die seitlichen Teile der Kopflappen. Sie entwickelt sich hier nicht weiter, bleibt jedoch lange Zeit als ein rundliches flaches Körperchen unterscheidbar, bis endlich, zur Zeit des Auftretens der Augenflecke, jede Spur von ihr verschwindet.

Währenddessen haben sich die Anlagen sämtlicher übrigen Kopfextremitäten weiter entwickelt. Sie wechseln hierbei ebenfalls beträchtlich ihre Lage. Während sie auf einem frühen Stadium ungefähr in einer Reihe hintereinander lagen, verändern sie nun auffällig ihre Stellung zur Mediane und zwar derart, daß die Mandibeln mehr in die Nähe und zur Seite des Mundes rücken, während

---

1) Von praemandibularen Extremitätenanlagen, wie ich sie für Collembolen nachweisen konnte, fand ich bisher keine Spur.

die erste Maxille und mehr noch die zweite sich von der Mittellinie weiter entfernen. Gleichzeitig verändern sich hierbei die Größenverhältnisse ganz beträchtlich. Haben sämtliche drei Anlagen der Mundwerkzeuge anfangs ungefähr gleiche Dimensionen, so läßt sich nun sehr bald ein augenfälliges Überwiegen der ersten Maxille, sowie eine Größenreduktion der zweiten Maxille erkennen. Die Mandibel hingegen scheint zunächst ihre Dimensionen nicht bedeutend zu verändern.

Neben dieser Volumenänderung erfolgt nun gleichzeitig ein Differenzierungsprozeß. Am wenigsten ist er zunächst an der Mandibel zu erkennen, die längere Zeit nur einen kugeligen Höcker darstellt. Hingegen verwandelt sich die erste und die zweite Maxille in zwei längliche Gebilde. Später erfolgt bei der ersten Maxille eine deutliche Teilung in zwei Segmente. Auch bei der zweiten Maxille glaube ich einen ähnlichen Vorgang bemerkt zu haben, doch sind hier die Verhältnisse bedeutend rudimentärer. Nach Analogie mit den Entwicklungsverhältnissen anderer Insekten handelt es sich bei dem Distalsegment um die Palpusanlage, bei dem Proximalsegment um die Stipesanlage.

Die hier geschilderten Verhältnisse erhalten sich bis zu Ende des ziemlich späten Stadiums vor der Umklappung des Hinterleibs (s. Fig. 5, auf der wenigstens die Lage der drei Anhänge hintereinander bei Kombination zweier Schnitte eingetragen ist).

Wollte man nach dem bloßen Anschein der Entwicklungszustände der drei Paar Mundextremitäten in diesem Stadium auf ihr späteres Verhalten schließen, so müßte man annehmen, daß aus der ersten Maxille und nicht der Mandibel das spätere große hakenförmige Gebilde der fertigen Trianguliniform hervorginge. Die erste Maxille ist ja bis jetzt nicht nur das umfangreichste, sondern auch das differenzierteste der drei Organanlagen. Trotz allem glaube ich, daß das aktive Mundwerkzeug der Larve aus der später in die Länge wachsenden und in die Tiefe des Kopfes sich versenkenden Mandibelanlage hervorgeht. Beweisen kann ich es vor der Hand noch nicht, da ich noch nicht die entscheidenden Schnitte angefertigt habe. Soviel habe ich jedoch bereits gesehen, daß im Stadium, auf dem der Hinterleib gegen die Ventralseite des Embryos geklappt wird, eine eingreifende Veränderung der Mundwerkzeuge eintritt. Die Mandibel wird wahrscheinlich in die Tiefe versenkt, während die ersten und zweiten Maxillen fast völlig der Rückbildung unterliegen. Wie gesagt, bedarf letztere Tatsache noch der weiteren Untersuchung. Bei der fertigen Trianguliniform läßt sich, außer den hakenartigen Mundwerkzeugen,

noch ein mit zwei Borsten versehener papillenartiger Auswuchs unterhalb der ersteren erkennen, vielleicht haben wir es hier mit dem Rest der ganzen ersten Maxille oder nur ihrer Palpusanlage zu tun.

Für ein anderes Organ, das ich bei der Trianguliniform fand, habe ich bis jetzt embryonal keine Anlage entdecken können. Vielleicht werden auch hier erst Schnitte durch embryonale Stadien Klarheit bringen. Es handelt sich um ein flaches, plattenartiges Gebilde, das mich einigermaßen an den Zungenapparat der Collembolen erinnert. Vorne ist es — entsprechend der Glossa dieser Formen — an der Ventralwand des Kopfes befestigt. Dorsalwärts befindet sich auf ihm eine tiefe Höhlung, in welcher der Vorderteil des Darms verläuft. Nach hinten setzt sich das Organ in zwei beinartigen Bildungen fort, an welchen verschiedene Muskeln inserieren, z. B. ein solcher, der in dem Palpus endigt.

Entwicklung des Abdomen.

Zwei Punkte interessieren hier besonders: Die ursprüngliche Anzahl der Segmente und die Bedeutung der Anhänge der fertigen Trianguliniform. In bezug auf die Segmentierung fand ich, daß die an der ausgewachsenen Larve bisher konstatierten zehn Segmente tatsächlich embryonal zur Anlage kommen. Ich hatte dies, offen gestanden, nicht erwartet, da ich glaubte, aus den Verhältnissen der ausgebildeten Trianguliniform auf elf, vielleicht sogar zwölf ursprüngliche Segmente schließen zu dürfen.

Sobald sich am Embryo der Terminalteil über den Dotter erhoben hat, erkennt man am Abdomen 8 vordere Segmente, sowie, daran anschließend, ein hinteres, größeres Stück, das erst Andeutungen einer Segmentierung enthält. Dieser letzte Teil, welcher das Proctodaeum in sich schließt, ist etwas von ersterem abgesetzt. Dies ist bemerkenswert, weil dieses Merkmal durch die ganze Entwicklungsreihe hindurch, bis zur fertigen Trianguliniform zu verfolgen ist. Auch bei dieser hebt das 8. Segment sich ein wenig von dem nachfolgenden ab, sodaß hierdurch etwas wie die rudimentäre Andeutung eines Postabdomens entsteht.

Das ungegliederte Stück verjüngt sich nach hinten und läuft, noch ehe die Segmentgrenzen deutlich aufgetreten sind, terminal in zwei Zipfel aus. Betrachten wir den Endabschnitt von der Dorsalseite, so sehen wir ihn hier in eine ungegliederte Platte auslaufen, die kürzer als der ventrale Teil ist. Zwischen beiden liegt das Proctodaeum. Auf der Ventralseite dieses Anschnittes erheben sich nun zwei Paar Höcker. Zweifellos handelt es sich

um Abdominalextremitätenrudimente, da sie ganz ähnlich liegen und beschaffen sind, wie die bezüglichen vorhergehenden Bildungen.

Auf dem Stadium, auf dem das Hinterende bereits nach der Ventralseite geschlagen ist, zeigt auch der Terminalabschnitt des Hinterleibs eine deutliche Gliederung in zwei Segmente. Von der hinteren Segmentgrenze gehen außerdem zwei breite, hinten verjüngte Lappen aus. Auf den 4 Höckerpaaren erhebt sich je eine Borste.

Die weitere Ausgestaltung zu den Verhältnissen der Triangulinilarve geschieht nun folgendermaßen: Aus den Terminallappen entstehen durch Auswachsen die beiden Springborsten, die hinteren zwei Abdominalextremitätenhöcker verwandeln sich in zwei zipfelartige laterale Anhänge, auf deren First die Borste rückt. Die hinteren Höckerchen werden zurückgebildet; die zugehörige Borste persistiert und rückt etwas auf die Dorsalseite.

Was sich sonst noch an der fertigen Larve findet, sind sekundäre Erwerbungen. Ich erwähne der Vollständigkeit halber folgende Bildungen: Auf der Fläche des 9. Segments, dorsalwärts, eine aus drei Bogen bestehende scheinbare zarte Segmentgrenze, die an 2 symmetrischen Stellen von Borsten gekrönt wird; sodann ventralwärts, auf der Segmentgrenze des 9. Segments, medial, 2 mit Borsten versehene starke Höcker, die man geneigt sein könnte, als Abdominalextremitätenrudimente anzusehen. Als eine durch die Sprungaktion hervorgerufene sekundäre Bildung ist sodann ein kleines abgegliedertes Endstück des 9. Segments anzusehen, auf dem sich die Springborsten erheben. Beim Sprung wird es scharnierartig nach hinten abgebogen. Bei der fertigen Trianguliniform ist endlich das 9. Segment dorsalwärts in eine feine zugespitzte Platte ausgezogen. Am Grund des zwischen beiden Bildungen klaffenden Spaltes befindet sich der After. Die meisten der hier kurz erwähnten Verhältnisse der fertigen Larve sind bisher ebenfalls noch nicht bekannt gewesen.

Darmkanal.

In einem Stadium, wo der Keimstreifen sich nach der künftigen Dorsalseite des Embryos gewandt hat, zeigt sich auf Schnitten deutlich eine Stomodaeum- und eine Proctodaeumanlage. Beide stellen aus zylindrischen Zellen bestehende Einstülpungen dar, die unmittelbar an die Dottermasse anstoßen. Die Lage des Mundes ist anfangs eine mehr dorsale. Erst im Lauf der Weiterentwicklung nimmt er allmählich eine terminale Lage an. Das Proctodaeum hingegen bewahrt seine dorsale Lage sehr lange, fast bis zum

Triangulinistadium; allerdings ändert sie sich im Laufe der Entwicklung insofern bedeutend, als bei den älteren Stadien das Terminalende des Embryos sich mehr und mehr von der Dottermasse abhebt, um sich schließlich gegen das Ventralende des Embryos umzuschlagen.

Sehr eigenartig verhält es sich aber mit der Anlage des Mitteldarms. Seine Stelle nimmt zunächst die Dottermasse ein, die jedoch anfangs keinerlei Lumen aufweist und sich in ihrer äußeren Form noch völlig der Lage der sie umgebenden Gewebe anpaßt. Diese Dottermasse darf jedoch nicht als eine einfache Ansammlung von Nährsubstanz angesehen werden. Sie enthält je drei in lebhafter Tätigkeit befindliche Vitellophagen, d. h. Kerne, die von Cytoplasma umgeben sind, welches wahrscheinlich Fortsätze durch die Dottersubstanz schickt. Auf frühen Stadien ist letzteres nachzuweisen und es liegt kein Grund vor, anzunehmen, daß dies Verhalten sich auf späteren Stadien ändert. Morphologisch und physiologisch haben wir es also hier mit einem Syncitium zu tun, in dessen Cytoplasma die Dottersubstanz eingebettet erscheint. Diese Tatsache ist von großer Wichtigkeit, denn sie berechtigt uns zu der Auffassung der Dottermasse als primäre Mitteldarmanlage. Dieselbe wäre zufolge dessen entodermaler Herkunft (s. Fig. 5, Do.).

Später nimmt nun auch der Dotterkomplex den Charakter eines Darmabschnittes an. Dies geschieht auf zweierlei Weise: 1. durch Annahme einer gestreckten Gestalt, wobei er sich zum Teil von den Gewebelementen, die ihn begrenzen, abhebt und 2. durch Bildung eines rudimentären Lumens. Letzteres geht Hand in Hand mit einer bestimmten Anordnung der Kerne um dieses Lumen herum. Schon ziemlich bald, nachdem sich die Stomodaeum- und Proctodaeumanlage herausgebildet hat, zeigen die Vitellophagen keine ganz regellose Anordnung in der Dottermasse mehr. Auf einem frühen Stadium sehe ich regelmäßig einen großen Kern am inneren Ende des Stomodaeums liegen und einen kleineren am inneren Ende des Proctodaeums.

Auf einem späteren Stadium sehe ich eine andere, immer wiederkehrende Anordnung: Ein großer Kern liegt in der Nähe des Mitteldarmanfangs, jedoch nicht mehr in Berührung des Stomodaeums, und zwei weitere Kerne liegen an der ventralen Peripherie des Mitteldarms, und zwar befinden sie sich dort in einer Cytoplasmamasse, welches die ganze ventrale Circumferenz des Mitteldarms einnimmt. Auf einem dritten Entwicklungsstadium endlich besitzt der Mitteldarm Schlauchform. Er hebt sich dorsal

und ventral deutlich von den übrigen Eingeweideteilen ab, wobei ein größeres Stück Leibeshöhle sichtbar wird. Im Innern des Mitteldarms sehen wir alsdann einen Riesenkern am Vorderende und zwei sich gegenüberstehende kleinere Kerne am Hinterende. Die drei Kerne ordnen sich um ein Lumen, das ich allerdings auf Schnitten bis jetzt noch nicht als Lückenraum konstatieren konnte [1]), das aber deutlich aus seinen dunkel sich färbenden Rändern und der Anordnung der Kerne erschlossen werden kann. Ich wiederhole, daß sich die Anordnung und das Verhalten der Kerne stets auf einem gewissen Stadium, nicht nur der Mitteldarmanlage, sondern des ganzen Embryos nachweisen läßt, sodaß man aus dem Stadium des letzteren mit Sicherheit auf das Verhalten der Kerne des Mitteldarms schließen kann (s. Fig. 6).

Kehren wir nun zur Stomodaeum- und Proctodaeumanlage zurück, so hat sich aus ersterer eine lange Röhre gebildet, die sich gegen den Mitteldarm stark erweitert und hier kugelförmig abrundet (Fig. 6, St.). Das Proctodaeum andererseits ist ebenfalls weiter ausgewachsen und ist in zwei Abschnitte zerfallen, einen hinteren kanalartigen Abschnitt, der sich nach vorne etwas erweitert, und einen kugeligen Blasenteil (Eudb.), der durch einen Einschnitt von ersterem abgesetzt ist. Er besteht einerseits aus kleineren, andererseits aus größeren Zellelementen. Letztere scheinen Exkretionszellen zu sein. Die ganze Blase dürfte also eine Art Exkretionsorgan darstellen, was um so wahrscheinlicher ist, als sie sich an der Stelle des Darmes befindet, wo sonst die malpighischen Gefäße sind, die hier nicht zur Ausbildung kommen.

Wenden wir uns nun dem Mitteldarm wieder zu, so ist es klar, daß eine Weiterentwicklung der Anlage auf Basis von sich teilenden Vitellophagen nicht erfolgen kann. Es ist eine alte Erfahrung, daß derartige spezialisierte Zellindividuen nicht mehr imstande sind, sich fortzupflanzen. So sehen wir denn, wie sich ein neuer Mitteldarm dadurch bildet, daß von den Enden des Vorder- und Enddarmes aus Zellwucherungen stattfinden, die sich über die äußere Fläche des Mitteldarms hinweg erstrecken und allmählich das ganze Gebilde mit einem niederen Epithel überdecken (Fig. 6, V.K. und H.K.).

Die nun noch folgende Veränderung des Mitteldarms besteht in einem schnellen Zerfall der ursprünglichen Anlage und ihrer Resorption durch die sekundären Mitteldarmzellen. Noch lange

---

1) Ich habe die Verhältnisse bisher nur auf Sagittalschnitten studiert, die für diese Beobachtung nicht allein genügen.

sieht man jedoch die Trümmer der Dotterzellen im Lumen des sekundären Mitteldarms liegen, bis sie endlich völlig von dessen Zellen aufgenommen sind.

Um diese Zeit erfolgt nun auch der Durchbruch des Vorderdarmes in den Mitteldarm. Zu einem Durchbruch der Enddarmampulle in den Mitteldarm scheint es nicht mehr zu kommen. Auch bei der freien Triangulinifom dürfte der Enddarm nicht mit dem Mitteldarm kommunizieren, wenigstens fehlte die Verbindung noch bei ganz alten, wenn auch noch nicht ausgeschlüpften Larven. Von frei lebenden Trianguliniformen habe ich bis jetzt noch keine Schnitte angefertigt, kann also hierüber für diese nichts aussagen. Allem Anschein nach nimmt jedoch die frei lebende Larve bis zum Eintritt in ihren Wirt gar keine Nahrung auf. Woher sollte sie diese auch nehmen! Es läßt sich leicht nachweisen, daß die Larven, unmittelbar nachdem sie ausgeschlüpft sind, in den Brutraum der Mutter eintreten müssen, denn man findet stets nur ganz vereinzelt reife Larven unter den unreifen im Mutterkörper und dies auf Stadien, wo der ganze Brutraum von Triangulini vollgepfropft ist. Die Larven dürften also unmittelbar nach ihrem Ausschlüpfen in den Brutraum austreten. Ein Zurückkehren in ihn, etwa zur Aufnahme von Nährstoffen, gibt es hingegen nicht mehr. Um dies zu verhindern sind gewisse Vorkehrungen getroffen, die ich in meiner ausführlichen Arbeit näher beschreiben werde.

Das Nervensystem.

Es sollen hier nur zwei wichtige Punkte der Entwicklung des Zentralnervensystems herausgegriffen werden: Seine Reduktion während der Embryonalperiode und seine Verschiebung.

Alles läßt darauf schließen, daß wir es hier mit sehr eigenartigen *sekundären* Abänderungen zu tun haben. Zu einer Ganglienkette mit gut abgesetzten Ganglienknoten kommt es nicht einmal mehr embryonal. In einem Stadium, wo die Verkürzung des Schwanzabschnittes des Embryos schon eingetreten ist und er sich von dem Körper gut abhebt, sehen wir oberhalb der Stomodaeumeinstülpung die beiden Cerebralganglien liegen. Jedes enthält zwei Komplexe von Punktsubstanz. Das durch die Schlundkommissuren hiermit verbundene Bauchmark stellt ein einheitliches Band dar, dessen Zusammensetzung aus Ganglien nur durch die innere Struktur erweislich ist. Soviel ich sehe, lassen sich etwa 5—6 Ganglienmassen nachweisen. Der dem Thorax angehörige Anteil unterscheidet sich strukturell etwas von der Abdominalpartie, sowie durch seine größere Massigkeit. Auf späteren Stadien

verschwindet diese Abgrenzung wieder etwas. Was die Ausdehnung des Bauchmarks anbelangt, so reicht es auf dem erwähnten Stadium etwa bis zum 8. Abdominalsegment. Im Laufe der weiteren Entwicklung erfolgt nun noch eine Verkürzung und eine Konzentration des Bauchmarks, dessen Hauptmasse bei Paraxenos jacobsoni später nur noch bis zum 3. oder 4. Abdominalsegment reicht. Bei der ausgebildeten Trianguliniform bildet das Bauchmark eine rinnenförmig ausgehöhlte Platte mit stark aufgekrämpten Rändern, die zwischen sich den Mitteldarm aufnehmen.

Das interessanteste Moment der Entwicklung des Zentralnervensystems bildet jedoch seine ganz merkwürdige Rückverlagerung. Noch bis zu Ende des letzten Stadiums, auf dem die Hinterleibspitze nach oben gebogen ist, hat die obere und untere Schlundganglienmasse ihre gewöhnliche Lage. Mit dem Umklappen des Hinterleibsendes nach unten beginnt jedoch eine rasche Wachstumsverschiebung. Mehr und mehr wird das Zentralnervensystem nach hinten verlegt. Gegen Ende der Embryonalperiode ist der ganze Komplex bis in den Thorax zurückgerückt. Die Cerebralganglien reichen alsdann bis zur vorderen Mesothoraxgrenze, die Unterschlundganglien bis etwas über die hintere Mesothoraxgrenze. Auf die Einzelheiten sowie die Deutung des merkwürdigen Vorgangs soll hier nicht näher eingegangen werden.

Hauptergebnisse.

1. In ein und demselben Muttertier können sämtliche Embryonalstadien bis zur ausgebildeten Trianguliniform, einschließlich dieser, vorkommen.

2. Das reife Ei besitzt eine zelluläre Hülle, die sich in einem gewissen Stadium in zwei Schichten spaltet, von denen die eine zelliger, die andere cuticulaartiger Natur ist. Später verschmelzen beide wieder miteinander und bilden das Chorion.

3. Es kommt bei der Entwicklung zur Bildung eines Blastoderms. Nach vollendetem Furchungsprozeß bleiben drei Kerne im Dotter zurück. Das Blastoderm zieht sich sodann an den einen Eipol zurück und bildet hier eine Hohlkugel.

4. Indem sich die Hohlkugel abflacht und über den Eidotter ausbreitet, wobei die freie Wand sich stark verdünnt, entsteht der Keimstreifen mit der Embryonalhülle.

5. Im Gegensatz zur Trianguliniform, die nur ein Paar beißende Mundwerkzeuge besitzt, kommen beim Embryo sämtliche Mundorgane zur Anlage. Wahrscheinlich geht aus der Mandibel die

bewegliche Zange der Trianguliniform hervor, während die erste Maxille das Palpusrudiment liefert.

6. Am Abdomen legen sich zwei Reihen Extremitätenrudimente an, die bis zum vorletzten Segment reichen.

Embryonal werden 10 Abdominalsegmente angelegt. Aus dem 9. Abdominalextremitätenrudiment geht je ein seitlicher Fortsatz der Trianguliniform hervor. Die Springborsten entstehen aus zwei lappenartigen Anhängen des 10. Segments.

7. Der Darm entsteht aus drei primären Anlagen, dem Stomodaeum, dem Proctodaeum und dem Mitteldarm. Die beiden erstgenannten Anlagen stellen ectodermale Einstülpungen dar. Die primäre Mitteldarmanlage geht aus der Dottersubstanz mit ihren drei Vitellophagen hervor, indem sich die letzteren in bestimmter Weise um ein sich bildendes rudimentäres Darmlumen anordnen.

Durch Zellwucherungen, die von den blinden Enden des Stomodaeum und Proctodaeum ausgehen und sich über die gesamte Oberfläche der primären Mitteldarmanlage erstrecken, wird der sekundäre Mitteldarm erzeugt. Die Massen des primären Mitteldarms gelangen im Inneren des sekundären Mitteldarms später zur Resorption. Der ganze Darmkanal besteht also schließlich nur noch aus Ectoderm.

8. Das Nervensystem legt sich als umfangreicher cerebraler Komplex und als massive Bauchganglienkette an, die anfangs bis zum 8. Abdominalsegment reicht, sich aber später bis zum 3. oder 4. Abdominalsegment verkürzt.

Im Laufe der Entwicklung erfolgt eine höchst merkwürdige Rückverlagerung des ganzen Komplexes, sodaß in der Trianguliniform die anfangs normal gelegenen Cerebralganglien erst an der vorderen Mesothoraxgrenze, die Unterschlundganglien an der hinteren Mesothoraxgrenze beginnen.

Tafelerklärung.

Fig. 1. Längsschnitt durch einen jungen Keim. Das Blastoderm ist gebildet. Bl. = Blastoderm; Do. = Dotter; Vi. = Vitellophag; VP. = vegetativer Pol. Vergrößerung 634 fach.

Fig. 2. Längsschnitt durch einen jungen Keim. Das Blastoderm hat sich an den animalen Pol zurückgezogen. Seine Zellen sind säulenförmig geworden und haben sich stark vergrößert. Bl. C. = Blastodermcalotte; Do. = Dotter; Do. Z. = Dotterzapfen; Po. = Polkörperchen. Vergrößerung 634 fach.

Fig. 3. Längsschnitt durch einen jungen Embryo. Der Dotter ist durch Flüssigkeitsaufnahme bedeutend gewachsen. Er ist mit großen Vacuolen erfüllt. Die Vitellophagen haben amoeboide Gestalt angenommen. C. H. = centrale Höhle des Keims; E. H. = Teil der Wand des Keims, aus welchem die Embryonalhülle hervorgeht; K. = Teil der Wand des Keimes, aus dem der Keimstreifen hervorgeht. No. = Nucleolus; Vi. = Vitellophage. Vergrößerung 634 fach.

Fig. 4. Längsschnitt durch einen jungen Embryo. Der Keimstreifen hat den größten Teil des Dotters umwachsen. Man unterscheidet an ihm bereits drei Territorien. Die freie Wand der auf Fig. 3 abgebildeten Hohlblase hat sich zur Embryonalhülle verdünnt. Eh. = Embryonalhülle; Ko. = Kopflappen; Sch. = Schwanzlappen; Vi. = Vitellophag. Vergrößerung 574 fach.

Fig. 5. Segittalschnitt durch einen mittleren Embryo. Bm. = Bauchmark; C. G. = Cerebralganglion; Do. = Dotter; Eh. = Embryonalhülle; M. = Mandibel; 1. Max. = 1. Maxille; 2. Max. = 2. Maxille; Pr. = Proctodaeum; St. = Stomodaeum; Th. Ex. = Thoracalextremitäten; Vi. = Vitellophag. Vergrößerung 574 fach.

Fig. 6. Sagittalschnitt durch einen älteren Embryo. In diesem Stadium ist der Schwanz bereits nach unten geklappt. Das Zentralnervensystem ist schon ein beträchtliches Stück nach hinten verlagert worden. C. G. = Cerebralganglion; Dl. = Lumen des primären Mitteldarms; Endb. = Endblase des Enddarms; H. K. = hintere Knospungszone des Mitteldarms; K. M. = Kerne des primären Mitteldarms (frühere Vitellophagen); Lh. = Leibeshöhle; Pr. M. = primärer Mitteldarm; V. K. = vordere Knospungszone des Mitteldarms. Vergrößerung 448 fach.

Bemerkungen zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie.

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 19. Juli 1913.

In meinem auf der Naturforscherversammlung zu Münster 1912 gehaltenen Vortrage [1]) habe ich die Grundlagen der elementaren (phänomenologischen) Strahlungstheorie behandelt. Aus meinen Betrachtungen läßt sich — und dies zu ermöglichen war ihr Hauptziel — unmittelbar eine Darstellung jener Disziplin entnehmen, die den neueren Anforderungen einer axiomatischen Behandlungsweise nach dem Muster der Geometrie genügt. Inzwischen habe ich mich davon überzeugt, daß außer denjenigen Axiomen, die meiner Beweisführung zugrunde liegen, auch noch andere wesentlich verschiedene Axiome oder Axiomensysteme zu einer strengen Begründung der Kirchhoffschen Sätze dienen können. Da ich gerade in der klaren Auffassung der verschiedenen möglichen Axiome einer Disziplin und in der Aufdeckung ihrer Gleichwertigkeit bzw. ihrer Zusammenhänge eine Hauptaufgabe der axiomatischen Behandlungsweise erblicke, so stelle ich im folgenden so kurz als möglich die wichtigsten Gesichtspunkte zusammen, die mir nunmehr für die Begründung der elementaren Strahlungstheorie nach der axiomatischen Methode erforderlich erscheinen [2]).

Zu Anfang meines Vortrags werden die drei Koeffizienten: die Lichtgeschwindigkeit q, der Emissionskoeffizient η und der

1) Begründung der elementaren Strahlungstheorie, abgedruckt in diesen Nachrichten, 1912 und im Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung Bd 22, 1913.

2) Einen Teil der nachfolgenden Entwicklungen habe ich bereits im Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung l. c. als Zusatz veröffentlicht.

Absorptionskoeffizient α eingeführt. In diesen Definitionen sind eine Reihe von Axiomen mitenthalten; ich begnüge mich, auf folgende Punkte hinzuweisen.

Zu der Annahme, daß die Energie ausschließlich längs der Kurven raschester Ankunft transportiert werde, ist zugleich die axiomatische Forderung hinzuzudenken, daß bei Betrachtung des thermischen Gleichgewichts so verfahren werden darf, *als wenn* Zerstreuung und Reflexion des Lichtes nicht vorhanden wären [1]).

Die drei Koeffizienten q, η, α sind außer von der Stelle $x y z$ noch von der Wellenlänge λ und der Temperatur abhängig. Da die Temperatur für die ganze Betrachtung stets einen konstanten Wert besitzt, so haben wir die Koeffizienten q, η, α lediglich als Funktion von $x y z$ und λ anzusehen.

Die weiteren Axiome formuliere ich nunmehr, wie folgt:

Axiom 1. (Axiom vom Ausgleich der Gesamtenergie.) Im Zustande des thermischen Gleichgewichts der Strahlung ist die gesamte, aus irgendeinem Volumenelement emittierte Energie aller Farben gleich der gesamten in demselben absorbierten Energie.

Axiom 2. (Axiom vom Ausgleich der Energien jeder einzelnen Farbe.) Im Zustande des thermischen Gleichgewichts der Strahlung findet an irgendeiner Stelle der Materie ein Austausch von Strahlungsenergien verschiedener Farbe nicht statt; vielmehr steht die Strahlung jeder Farbe für sich allein im Gleichgewicht.

Aus meinem Vortrage geht hervor, daß das eben aufgestellte Axiom 2 vom Ausgleich der Energien jeder einzelnen Farbe zur Herleitung der Kirchhoffschen Sätze und mithin zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie vollkommen ausreichend ist: die Integralgleichung (8) in meinem Vortrage bringt den Inhalt des Axioms 2 unmittelbar zum Ausdruck.

Im folgenden möchte ich zunächst zeigen, daß ohne das Axiom 2, allein auf Grund des Axioms 1 vom Ausgleich der Gesamtenergie ein Beweis der Kirchhoffschen Sätze unmöglich ist. In der

---

1) Die Aussage dieses Axioms kann durch eine ähnliche Betrachtung physikalisch plausibel gemacht werden, wie sie M. Planck (Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig 1913, S. 29—30) hinsichtlich der Zertreuung anwendet; vergl. hierzu auch eine demnächst in den mathematischen Annalen erscheinende Abhandlung von W. Behrens: Lichtausbreitung in geschichteten Medien auf Grund der Maxwellschen Gleichungen.

Tat bei Benutzung des Axioms 1 erhalten wir an Stelle der Integralgleichung (8) als Gleichgewichtsbedingung die folgende durch Integration von (8) nach λ entstehende Gleichung

$$\int_0^\infty \left\{\eta - \frac{\alpha}{4\pi q^2}\int K\eta_1 dv_1\right\} d\lambda = 0, \tag{26}$$

worin, wie schon erwähnt, q, η, α außer von der Stelle $x\,y\,z$ noch von der Wellenlänge λ abhängig sind.

Nunmehr wählen wir insbesondere q und α von $x\,y\,z$ unabhängig, etwa $q = 1$ und $\alpha = 1$; dann wird K eine von λ unabhängige Funktion von $x\,y\,z$, $x_1\,y_1\,z_1$. Setzen wir endlich

$$H = \int_0^\infty \eta d\lambda,$$

so geht die Gleichung (26) über in

$$H - \frac{1}{4\pi}\int KH_1 dv_1 = 0,$$

und diese Gleichung ist erfüllt, wenn H von $x\,y\,z$ unabhängig ist wir nehmen etwa $H = 1$.

Wählen wir jetzt — was auf mannigfache Weise möglich ist — η als Funktion von $x\,y\,z$ und λ derart, daß für alle Werte von $x\,y\,z$ stets

$$\int_0^\infty \eta d\lambda = 1$$

wird, so erkennen wir, daß bei den so getroffenen Festsetzungen über q, η, α die Kirchhoffschen Sätze in der Tat nicht gelten, während alle unsere Annahmen mit Ausnahme des Axioms 2 erfüllt sind. Damit ist der gewünschte Unmöglichkeitsbeweis vollkommen erbracht — analog dem bekannten Verfahren, wie es in der Theorie der arithmetischen und geometrischen Axiome seit langem angewandt wird.

Bei dem in meinem Vortrage dargelegten Beweise für die Kirchhoffschen Sätze ist nirgends davon Gebrauch gemacht worden, daß der Emissionskoeffizient η, ebenso wie die Größen α und q bereits durch die physikalische Beschaffenheit der Materie eindeutig als Funktion von λ bestimmt sind; vielmehr könnten die Werte für η, α, q noch durch die Umgebung der Stelle $x\,y\,z$ und durch die begrenzenden Wände mitbedingt sein, so daß sie sich im allgemeinen änderten, sobald man die Materie von der Stelle $x\,y\,z$ an eine andere Stelle desselben Systems oder in ein anderes System versetzt: die Kirchhoffschen Sätze, insbesondere der

Satz, daß der Quotient $\frac{q^2\eta}{\alpha}$ stets eine vom Ort unabhängige Größe ist, bleiben also meinem Beweise zufolge auf Grund des Axioms 2 dennoch stets gültig, auch wenn wir davon absehen, daß die Größen η, α, q bereits durch die physikalische Beschaffenheit der Materie allein eindeutig bestimmt sind.

Um jedoch die in Rede stehende physikalisch sehr einfache und für reine Temperaturstrahlung gewiß gültige Annahme ebenfalls axiomatisch zu untersuchen, formulieren wir dieselbe wie folgt:

Axiom 3. (Axiom von der physikalischen Natur der Koeffizienten q, η, α.) Die für die Strahlung von irgendeiner Wellenlänge charakteristischen Größen: die Lichtgeschwindigkeit q, der Emissionskoeffizient η und der Absorptionskoeffizient α sind allein durch die physikalische Beschaffenheit der Materie an der Stelle eindeutig bestimmt, an welcher sich die Materie gerade befindet.

Bezeichnen wir mit p irgendwelche unendlichviele Parameter, die die physikalische Beschaffenheit der Materie eindeutig festlegen, so können wir das Axiom 3 mathematisch auch folgendermaßen ausdrücken: die Größen q, η, α hängen bei konstanter Temperatur außer von der Wellenlänge λ nur von den Parametern p, nicht aber noch von der Beschaffenheit der Materie an anderen Stellen im Raume ab. Wählen wir daher wie oben

$$q = 1, \qquad \alpha = 1$$

und η irgendwie als Funktion von λ und den Parametern p, so daß für alle Werte von p stets

$$\int_0^\infty \eta(p)\, d\lambda = 1$$

wird, so erkennen wir wie vorhin, daß die Kirchhoffschen Sätze nicht gelten, während Axiom 1 und 3, aber nicht Axiom 2 erfüllt ist. Damit ist gezeigt, daß ein Beweis der Kirchhoffschen Sätze auch auf Grund der Axiome 1 und 3 vom Ausgleich der Gesamtenergie und von der physikalischen Natur der Koeffizienten q, η, α — ohne Hilfe des Axioms 2 vom Ausgleich der Energien jeder einzelnen Farbe — nicht möglich ist.

Als Ersatz für Axiom 2 kann jedoch ein Axiom dienen, welches im wesentlichen die Formulierung einer Tatsache ist, die M. Planck

in seinen Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung [1]) mittels des zweiten Wärmesatzes beweist und sodann ebenfalls zur Begründung der Kirchhoffschen Sätze verwendet. Dieses Axiom lautet:

Axiom 4. (Axiom von der physikalischen Natur der Strahlungsdichte.) Im Zustande des thermischen Gleichgewichts ist die Dichte der Strahlungsenergie einer jeden Wellenlänge, für welche die Materie nicht diatherman ist, allein durch die physikalische Beschaffenheit der Materie an der Stelle eindeutig bestimmt, an welcher sich die Materie gerade befindet.

Wir denken uns nunmehr irgendeinen Raum, etwa das Innere einer spiegelnden Kugelfläche homogen mit einem Stoffe erfüllt, dessen physikalische Natur durch das Parametersystem p charakterisiert wird. Nach Axiom 3 werden die Koeffizienten q, η, α bestimmte Funktionen von λ, p und sind mithin von der Stelle $x\,y\,z$ im Kugelinnern unabhängig. Wegen Formel (6) wird die Energiedichte im Mittelpunkt der Kugel

$$u = \frac{1}{4\pi q^3}\int \frac{e^{-A}}{S}\,\eta_1\,dv_1$$

oder wegen (11)

$$u = \frac{1}{4\pi q^3}\int\int_0^\infty e^{-\int\limits_0^{s_1}\alpha_1\,ds_1}\,q_1^2\,ds_1\,d\chi_1\,,$$

$$u = \frac{\eta}{q\alpha}.$$

Wenden wir nunmehr Axiom 4 an, so stellt die eben erhaltene Gleichung

$$u = \frac{\eta}{q\alpha}$$

die Strahlungsdichte allgemein in jedem beliebigen Systeme dar. Aus ihr folgt in Verbindung mit (6) die Integralgleichung (8) und auf Grund der letzteren läßt sich dann, wie in meinem Vortrage

---

1) Vgl. Ende § 34, S. 34. Hiernach nehme ich meine gegen den Planckschen Beweis der Kirchhoffschen Sätze erhobenen Einwendungen (l. c.) zurück. Das Verfahren von M. Planck befindet sich keineswegs — wie ich früher geglaubt hatte — im Widerspruch mit meinen Ausführungen, da eben in den physikalischen, auf der Heranziehung des zweiten Wärmesatzes beruhenden Überlegungen von M. Planck die meinem Axiom 2 äquivalenten Annahmen zu erblicken sind.

gezeigt worden ist, der Beweis der Kirchhoffschen Sätze und mithin die elementare Strahlungstheorie überhaupt begründen.

Endlich möge noch das folgende Axiom hinzugezogen werden:

Axiom 5. (Axiom vom Vorhandensein gewisser Verschiedenartigkeiten der Stoffe.) Es gibt Stoffe mit solchem Absorptionskoeffizienten α und Brechungsvermögen, daß der Quotient $\frac{\alpha}{q^2}$ gleich einer willkürlich vorgeschriebenen Funktion der Wellenlänge λ ausfällt[1]).

Dieses Axiom läßt sich in zweierlei Weisen auffassen. Die engere Auffassung verlangt nur: es sollen sich stets materielle Systeme von der Art herstellen lassen, daß darin der Quotient $\frac{\alpha}{q^2}$ eine willkürlich vorgeschriebene Funktion der Wellenlänge λ und der Stelle xyz ist. Die Integralgleichung (26) drückt dann, wie vorhin, das Erfülltsein des Axioms 1 vom Ausgleich der Gesamtenergie aus, und da jene Integralgleichung außer der Lösung

$$\eta = \frac{\alpha}{q^2} f(\lambda)$$

gewiß noch andere Lösungen zuläßt, so folgt wiederum, daß die Herleitung der Kirchhoffschen Sätze auf Grund der Axiome 1 und 5 in dieser engeren Auffassung ohne Hilfe des Axioms 2 oder des Axioms 3 unmöglich ist.

Zu einer allgemeineren Auffassung des Axioms 5 gelangen wir, wenn wir dasselbe in Verbindung mit Axiom 3 bringen. Wir können alsdann Axiom 3 und 5 zusammengenommen folgendermaßen mathematisch formulieren.

Es sei irgendein endlicher von Wänden begrenzter Raum gegeben: alsdann ist es stets möglich, die Parameter p, welche die physikalische Natur der Materie bestimmen, derart als Funktionen der Stelle xyz des Raumes zu wählen, daß der Quotient $\frac{\alpha(\lambda p)}{p^2(\lambda, p)}$ dadurch innerhalb jenes Raumes eine willkürlich vorge-

---

1) Ein ähnliches Axiom hat zuerst Herr E. Pringsheim in der Abhandlung „Herleitung des Kirchhoffschen Gesetzes" (Zeitschr. f. wissensch. Photographie 1, 360, 1903) aufgestellt und zum Beweis der Kirchhoffschen Sätze zu benutzen gesucht. — Die obigen Ausführungen über das Axiom 5 habe ich bereits in dem Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung l. c. veröffentlicht; die gegen dieselben von Herrn E. Pringsheim in der physikalischen Zeitschr. (14, 589, 1913) erhobenen Einwendungen erscheinen mir in keinem Punkte als berechtigt.

schriebene Funktion der Veränderlichen λ und xyz wird. **Bei dieser Auffassung gelingt es, aus den Axiomen 1, 3 und 5 die Kirchhoffschen Sätze ohne Heranziehung der Axiome 2 oder 4 zu beweisen.**

Um dies zu erkennen, denken wir uns irgendeinen Raum, etwa das Innere einer spiegelnden Kugelfläche auf folgende Art mit Materie erfüllt. Es seien p_0 bzw. p_* Parametersysteme, die die physikalische Natur zweier bestimmter Stoffe charakterisieren; wir bezeichnen ferner mit r die Entfernung des Mittelpunkts 000 der Kugel von einem Punkte xyz im Kugelinneren; endlich bedeute ε eine Konstante; dann ist durch

$$p(\nu, \varepsilon) = \frac{p_0 \varepsilon^2 + p_* \nu^2}{\varepsilon^2 + \nu^2} \tag{27}$$

für jeden positiven Wert ε an jeder Stelle xyz im Kugelinneren ein Parametersystem p festgelegt. Wir wollen uns nun das Kugelinnere derart mit Materie erfüllt denken, daß ihre physikalische Natur an jeder Stelle durch das Parametersystem (27) charakterisiert ist. Durch Einsetzen von (27) werden auch die Größen $q(\lambda, p)$, $\eta(\lambda, p)$, $\alpha(\lambda, p)$ bestimmte Funktionen von λ und xyz.

Die Gleichgewichtsbedingung (26) nimmt, wenn wir darin an Stelle von η die Funktion

$$\varphi = \frac{\eta q^2}{\alpha}$$

einführen, die Gestalt an

$$\int_0^\infty \frac{\alpha}{q^2}\left\{\varphi - \frac{1}{4\pi}\int K \frac{\alpha_1 \varphi_1}{q_1^2}\, dv_1\right\} d\lambda = 0,$$

oder, wenn wir für xyz den Mittelpunkt 000 der Kugel wählen, wegen (11)

$$\int_0^\infty \frac{\alpha(\lambda, p_0)}{q^2(\lambda, p_0)}\Big\{\varphi(\lambda, p_0) - \tag{28}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\int_0^\infty \alpha(\lambda, p)\, e^{-\int_0^s \alpha(\lambda, p)\, ds}\, \varphi(\lambda, p)\, ds\, d\chi\Big\}\, d\lambda = 0.$$

Nunmehr nehmen wir in dieser Gleichung den Grenzwert $\varepsilon = 0$. Da für $\nu > 0$ wegen (28)

$$\lim_{\varepsilon = 0} p(\nu, \varepsilon) = p_*$$

ist und mithin

$$\lim_{\varepsilon=0} \varphi(\lambda,p) = \varphi(\lambda,p_*)$$

von $x\,y\,z$ unabhängig wird, so erhalten wir aus (28)

$$\int_0^\infty \frac{\alpha(\lambda,p_0)}{q^2(\lambda,p_0)} \{\varphi(\lambda,p_0) - \varphi(\lambda,p_*)\}\, d\lambda = 0.$$

Ersetzen wir hierin p_* durch irgendein anderes Parametersystem p_{**} und subtrahieren, so entsteht die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\alpha(\lambda,p_0)}{q^2(\lambda,p_0)} \{\varphi(\lambda,p_*) - \varphi(\lambda,p_{**})\}\, d\lambda = 0,$$

und aus dieser folgt nach Axiom 5 wegen der Willkür der Funktion.

$$\frac{\alpha(\lambda,p_0)}{q^2(\lambda,p_0)}$$

notwendig

$$\varphi(\lambda,p_*) - \varphi(\lambda,p_{**}) = 0,$$

d. h. die Funktion $\varphi(\lambda,p)$ ist von der Wahl der Parameter unabhängig und daher gleich einer universellen Funktion der Wellenlänge λ.

Zusammenfassend gewinnen wir nunmehr das Resultat, daß für sich allein das Axiom 2 vom Ausgleich der Energien jeder einzelnen Farbe und ebenso für sich allein die Axiome 3 und 4 von der physikalischen Natur der Koeffizienten q, η, α und der Strahlungsdichte u, sowie endlich auch für sich allein die Axiome 1, 3 und 5 vom Ausgleich der Gesamtenergie, von der physikalischen Natur der Koeffizienten q, η, α und vom Vorhandensein gewisser Verschiedenartigkeiten der Stoffe zur Begründung der Kirchhoffschen Sätze hinreichend sind, während diese Begründung allein mit Hilfe der Axiome 1 und 3, oder allein mittels 1 und 5 nicht möglich ist.

Über eine bei den Dirichletschen Reihen auftretende Aufgabe aus der Theorie der Potenzreihen von unendlichvielen Veränderlichen.

Von

Otto Toeplitz in Göttingen.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 19. Juli 1913.

Herr Bohr hat in einer soeben im Druck befindlichen Arbeit [1]), deren Resultat er mir vor kurzem brieflich mitgeteilt hat, ein Problem aus der Theorie der Dirichletschen Reihen

$$f(s) = \frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \cdots \tag{1}$$

auf eine Aufgabe über Potenzreihen von unendlichvielen komplexen Veränderlichen

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots) = c + \sum_{\alpha} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\alpha \leqq \beta} c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + \sum_{\alpha \leqq \beta \leqq \gamma} c_{\alpha\beta\gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma + \cdots \tag{2}$$

zurückgeführt. Es ist bekannt, daß bei der Frage nach der Konvergenzhalbebene einer Dirichletschen Reihe Unterscheidungen nötig werden, die in der Lehre von den Potenzreihen einer komplexen Veränderlichen kein Analogon besitzen: einmal kann sich der Halbebene absoluter Konvergenz nach links zu ein Parallelstreifen bedingter Konvergenz anschließen, der allerdings höchstens die Breite 1 haben kann. Ferner aber ist ohne weiteres nicht zu erkennen, inwieweit der Weierstraßsche Satz, daß der Konvergenzkreis einer Potenzreihe bis zum nächsten singulären Punkt der dargestellten Funktion reicht, in der Theorie der Dirichletschen

1) Diese Nachrichten, Sitzung vom 21. Juni 1913.

Reihen sein Analogon findet, ob also das Aufhören der absoluten Konvergenz durch die Natur der dargestellten Funktion bedingt ist, oder, wie es Herr Bohr präzisiert, ob die Halbebene der absoluten Konvergenz ebensoweit reicht wie die Halbebene der Regularität und Beschränktheit der dargestellten Funktion. Vielmehr ist dies ein Problem, das Herr Bohr durch seine Untersuchungen successive auf die folgende Aufgabe über Funktionen vom Typus (2) zurückgeführt hat.

Eine Potenzreihe vom Typus (2) *heiße begrenzt*[1]), *wenn die Potenzreihe*

$$\mathfrak{P}_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$$

für alle $x_1, \ldots, x_n$, *deren Betrag* $\leqq 1$ *ist, erstens absolut konvergiert und zweitens unter denselben Nebenbedingungen dem Betrage nach unter einer auch von n unabhängigen festen Grenze M gelegen ist.* Es leuchtet unmittelbar ein, daß $\mathfrak{P}$ begrenzt ist, wenn die Summe seiner sämtlichen Koeffizienten absolut konvergiert:

$$|c| + \sum_{\alpha} |c_\alpha| + \sum_{\alpha \leqq \beta} |c_{\alpha\beta}| + \cdots. \tag{3}$$

Es liegt schon weniger auf der Hand, daß die Umkehrung dieser Tatsache nicht gilt, daß also $\mathfrak{P}$ begrenzt sein kann, ohne daß (3) konvergiert, oder, um es noch anders auszudrücken, daß eine begrenzte Potenzreihe $\mathfrak{P}$ nicht für jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$, das der Bedingung:

$$|x_1| \leqq 1, \ |x_2| \leqq 1, \ \ldots, \tag{4}$$

genügt, absolut zu konvergieren braucht. Es gelingt Herrn Bohr, durch eine geläufige funktionentheoretische Abschätzung zu zeigen, daß ein begrenztes $\mathfrak{P}$ stets absolut konvergiert für solche $x_1, x_2, \ldots$, für die

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots \tag{5}$$

konvergiert. *Seine Aufgabe besteht nun in der Frage*, ob anstatt

1) Hilbert, der diesen Begriff gebildet hat (Palermo Rend. 27, 1909, pag. 59—74) sagt „beschränkt". Wir ziehen das Wort „begrenzt" vor, da speziell bei denjenigen Potenzreihen von unendlichvielen Veränderlichen, die sich auf quadratische Formen reduzieren, und die gerade in dieser Arbeit im Vordergrund stehen werden, dieser Begriff nicht übereinstimmt mit dem der Beschränktheit, den Hilbert in der Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen (diese Nachrichten 1906, pag. 157—227) aufgestellt hat, sondern wesentlich enger ist.

der Konvergenz von (5) nicht schon die Konvergenz von

$$|x_1|^\nu + |x_2|^\nu + \cdots \qquad (\nu > 2) \tag{6}$$

genügt, um die absolute Konvergenz jedes begrenzten $\mathfrak{P}$ zu garantieren, und *welches der Schnitt* A *ist zwischen denjenigen Werten von* ν, *für die die Konvergenz von* (6) *ausreicht, um für jedes Wertsystem, für das* (6) *konvergiert, die absolute Konvergenz jeder begrenzten Potenzreihe behaupten zu können, und den größeren Werten von* ν, *für welche dies nicht mehr gilt. Insbesondere kommt es darauf an zu entscheiden, ob* $\mathsf{A} = \infty$ *ist oder nicht; im letzteren Falle würde es auf Grund der Bohrschen Untersuchung eine Dirichletsche Reihe geben, bei der die Halbebene absoluter Konvergenz nicht so weit nach links reicht, wie die Halbebene der Regularität und Beschränktheit der dargestellten Funktion.* Der genauere Wert von A würde dann die mögliche Breite dieses überragenden Streifens ergeben, und zwar, wie Herr Bohr zeigt, gleich $1/\mathsf{A}$. Aus der Bemerkung $\mathsf{A} \geqq 2$ kann Herr Bohr aber bereits entnehmen, daß jener Streifen höchstens die Breite $1/2$ haben kann. Ob der Streifen sich stets auf Null reduzieren muß oder nicht, ist der Kernpunkt seines Problems.

Diese Frage wird in der vorliegenden Arbeit im negativen Sinne entschieden; *durch Konstruktion eines Beispiels wird bewiesen, daß* $\mathsf{A} \leqq 4$ *ist. Es gibt also Dirichletsche Reihen, bei denen der überschießende Streifen vorhanden ist und eine Breite hat, die dem Wert* $1/4$ *beliebig nahe kommt.* Die Frage, ob es Dirichletsche Reihen gibt, bei denen er die von Herrn Bohr als obere Schranke erkannte Breite $1/2$ tatsächlich hat oder ihr wenigstens beliebig nahe kommt, bleibt offen.

In Wahrheit leistet das Beispiel, das im folgenden konstruiert wird, mehr, als eben von ihm ausgesagt wurde. Es besteht nämlich nicht in einer wirklichen Potenzreihe unendlichhohen Grades, wie es der Ausdruck (2) im allgemeinen ist, sondern in einer *quadratischen Form*, d. h. vom Ausdruck (2) ist nur das dritte Glied tatsächlich vorhanden; die beiden ersten und alle weiteren vom vierten ab fehlen. *Bezeichnet man mit* A_n *den Schnitt, den man erhält, wenn man statt beliebiger begrenzter Funktionen nur begrenzte homogene Formen n-ten Grades in Betracht zieht, so ist*

$$\mathsf{A}_1 \geqq \mathsf{A}_2 \geqq \mathsf{A}_3 \geqq \cdots \geqq \mathsf{A}.$$

Denn besitzt man in F_n eine begrenzte Form n ten Grades und dazu ein Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$, für das (6) bei einem bestimmten Wert von ν konvergiert, während F_n für dieses Wertsystem nicht ab-

solut konvergiert, so wird $x_1 F_n$ eine begrenzte Form $(n+1)$-ten Grades sein, die genau dasselbe für eben diesen Wert von ν tut. Es wird also $\mathsf{A}_{n+1} \leqq \mathsf{A}_n$ sein. Daß aber $\mathsf{A} \leqq \mathsf{A}_n$ ist, versteht sich von selbst.

Ferner ist $\mathsf{A}_1 = \infty$. Denn der Definition nach ist die Linearform

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots$$

begrenzt, wenn für $|x_1| = 1, \ldots, |x_n| = 1$

$$|\mathfrak{P}_n| = |c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n| \leq M$$

ist, wo M von den x_α und n unabhängig ist. Erteilt man den Arcus von $x_1, \ldots, x_n$, die ja frei verfügbar sind, solche Werte, daß jedes Glied $c_\alpha x_\alpha$ reell und nicht negativ wird, so folgt

$$|c_1| + \cdots + |c_n| \leq M,$$

und daraus die absolute Konvergenz von $\sum c_n$. Mithin ist $\sum c_n x_n$ absolut konvergent, wenn $|x_n|$ beschränkt ist, also gewiß, wenn $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$ ist, und dies folgt aus der Konvergenz von (6), wenn ν auch einen noch so großen Wert haben mag, auf jeden Fall.

Das Resultat der Arbeit kann in dieser Bezeichnungsweise dann genauer dahin präzisiert werden, daß $\mathsf{A}_2 \leq 4$ *ist, nicht nur* A. Der ganze Zusammenhang wird $\mathsf{A}_2 = 4$ als wahrscheinlich erscheinen lassen. In der Sprache der Dirichletschen Reihen bedeutet, worauf mich Herr Bohr aufmerksam macht, die besondere Natur meines Beispiels, daß im Ausdruck (1) alle diejenigen $a_n = 0$ sind, bei denen n weniger oder mehr als zwei (gleiche oder verschiedene) Primfaktoren enthält. —

Die Lösung der Bohrschen Aufgabe, die im folgenden gegeben wird, beruht vor allem auf der Bemerkung, daß zwischen ihr und einigen Fragen aus der Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, die ihrerseits, wie mir schon längere Zeit bekannt ist, merkwürdigerweise unter einander zusammenhängen, ein unerwarteter und nicht ganz einfacher Zusammenhang besteht[1]). Die Zusammenfassung so vieler verschiedener Aufgaben entspringt im Grunde aus den Prinzipien, die ich in meiner Habilitationsschrift[2]) entwickelt habe. Ich werde es jedoch vorziehen,

---

1) An sich hat diese bekanntlich von Hilbert begründete Theorie mit der von ihm a. a. O. skizzierten Theorie der, wie wir sagen, „begrenzten“ Funktionen wenig Berührungspunkte.

2) Math. Ann. 70, pag. 351—376.

diesen Gedankengang, der mich geleitet hat, im folgenden zurücktreten zu lassen, weil es dadurch möglich wird, die Lösung der Bohrschen Aufgabe in einer Form zu geben, die keine Vorkenntnisse erfordert. Wegen der genannten anderweitigen Resultate verweise ich auf die zweite Hälfte dieser Arbeit.

Erste Hälfte: die Bohrsche Aufgabe.

1. Die erste algebraische Aufgabe. Ich ersetze die Bohrsche Aufgabe durch die folgende elementare algebraische Aufgabe. M_1 sei das Maximum des Betrages einer gegebenen quadratischen Form von n Veränderlichen mit komplexen Koeffizienten[1])

$$A(x, x) = \sum_{p,\, q = 1}^{n} a_{pq} x_p x_q \qquad (a_{pq} = a_{pq})$$

unter den Nebenbedingungen

$$(7) \qquad |x_1| = 1, \ldots, |x_n| = 1;$$

ferner sei

$$\mathsf{M}_1 = \sum_{p,\, q = 1}^{n} |a_{pq}|.$$

Offenbar ist $M_1 \leqq \mathsf{M}_1$, also $\frac{\mathsf{M}_1}{M_1} \geqq 1$. Variiert man nun die Form, d. h. die n^2 komplexen Koeffizienten a_{pq}, indem man nur die Anzahl n der Veränderlichen festhält, so wird M_1 und M_1 sich ändern, und zwar, wie man leicht überlegt, stetig mit den a_{pq}. Da $\frac{\mathsf{M}_1}{M_1}$ nur von den Verhältnissen der a_{pq} abhängt, wird es zulässig sein, sich auf solche Formen zu beschränken, deren $\mathsf{M}_1 = 1$ ist; und für alle diese, die nunmehr einen endlich begrenzten Bereich bilden, muß $\frac{\mathsf{M}_1}{M_1}$ als stetige Funktion ein Maximum haben. Dieses kann nur noch von der Zahl n abhängen; heiße diese zahlentheoretische Funktion $\varphi_1(n)$. Dann besteht die erste algebraische Aufgabe in der Untersuchung dieser Funktion $\varphi_1(n)$.

---

1) Im Gegensatz zu der in der Einleitung, insbesondere im Ausdruck (2) benutzten Schreibweise bedienen wir uns bei den im folgenden ausschließlich auftretenden *quadratischen* Formen der üblichen Schreibweise, die die Summationsindices p, q nicht durch die Ungleichung $p \leqq q$ beschränkt, m. a. W. wir versehen jetzt die Koeffizienten wie üblich mit Binomialkoeffizienten.

Es sei hier die Bemerkung hinzugefügt, daß es an dieser ersten algebraischen Aufgabe nichts ändern würde, wenn man die Nebenbedingung (7) durch die andere

$$(8) \qquad |x_1| \leqq 1, \ldots, |x_n| \leqq 1$$

ersetzt. Denn eine analytische Funktion auch von mehr als einer, aber natürlich endlichvielen Veränderlichen nimmt das Maximum ihres Betrages nie im Innern eines Gebietes an.

Der genaue Zusammenhang zwischen dieser und der Bohrschen Aufgabe läßt sich bequemer nachher, an der Hand eines Resultates über $\varphi_1(n)$ auseinandersetzen.

2. Die zweite algebraische Aufgabe. M_2 sei das Maximum des Betrages einer gegebenen quadratischen Form von n komplexen Veränderlichen mit reellen Koeffizienten

$$A(x, x) = \sum_{p, q = 1}^{n} a_{pq} x_p x_q$$

unter der Nebenbedingung

$$|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = 1;$$

M_2 sei die analoge Größe für die Form

$$\mathsf{A}(x, x) = \sum_{p, q = 1}^{n} |a_{pq}| x_p x_q.$$

Auch hier ist unmittelbar $M_2 \leqq \mathsf{M}_2$, also $\frac{\mathsf{M}_2}{M_2} \geqq 1$. Das Maximum dieses Quotienten für alle Formen der festen Zahl n von Veränderlichen und mit reellen Koeffizienten heiße $\varphi_2(n)$. In der Untersuchung dieser Funktion besteht die zweite algebraische Aufgabe.

3. Behandlung der zweiten Aufgabe. Ich zeige, daß $\varphi_2(n) \geqq \sqrt{n}$ ist für alle n, die Potenzen von 4 sind, indem ich ein Beispiel Π_α einer Form von 4^α Veränderlichen angebe, für die $\mathsf{M}_2/M_2 = 2^\alpha$ ist ($\alpha = 1, 2, \ldots$). Ich beginne mit $\alpha = 1$ und definiere $\Pi_1(x_1, \ldots, x_4)$ als die quadratische Form von $x_1, \ldots, x_4$ mit dem Koeffizientenschema

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

M_2 ist für diese Form leicht zu bestimmen; denn ersetzt man alle Koeffizienten durch ihre Beträge, so hat man die Form $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2$, und deren Maximum entnimmt man dem folgenden sehr elementaren

1. *Hilfssatz. Das Maximum von* $|(x_1+\cdots+x_n)^2|$ *für komplexe* $x_1, \ldots, x_n$ *unter der Nebenbedingung*

$$|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2 = 1$$

ist $\mathsf{M}_2 = n$.

Beweis. Da $|x_1+\cdots+x_n|^2 \leqq (|x_1|+\cdots+|x_n|)^2$, wird die Form dieses Maximum für positive reelle x erreichen. Es genügt also, nach dem Maximum von $(x_1+\cdots+x_n)^2$ unter der Nebenbedingung $x_1^2+\cdots+x_n^2 = 1$ für reelle Argumente zu fragen, und die Antwort ist nach den elementaren Regeln die, daß

$$\frac{\partial[(x_1+\cdots+x_n)^2+\lambda(x_1^2+\cdots+x_n^2)]}{\partial x_\alpha} = 2(x_1+\cdots+x_n)+2\lambda x_\alpha = 0$$

sein muß, also $x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; hierfür hat die Form den Wert n.

Für Π_1 ist also speziell $\mathsf{M}_2 = 4$. Zur Bestimmung von M_2 dient der

2. *Hilfssatz. Eine orthogonale Form mit reellen Koeffizienten d. h. also eine quadratische Form, für deren Koeffizienten* $\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha p} a_{\alpha q} = 0$ *ist für* $p \neq q$, $= 1$ *für* $p = q$, *hat für komplexe* $x_1, \ldots, x_n$ *unter der Nebenbedingung*

$$|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2 = 1$$

höchstens das Maximum 1.

Beweis. Überstreichen bedeute den Übergang zur konjugiert-komplexen Größe. Schreibt man die Form in der Gestalt:

$$A(x, x) = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha(a_{\alpha 1}x_1+\cdots+a_{\alpha n}x_n),$$

so ergibt die Anwendung der sog. Schwarzschen Ungleichung für komplexe Größen, d. h. der Ungleichung:

$$|\sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha v_\alpha|^2 \leqq \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha \overline{u}_\alpha \sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha \overline{v}_\alpha$$

im vorliegenden Falle:

$$|A(x, x)|^2 \leqq \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \overline{x}_\alpha \sum_{\alpha=1}^{n} (a_{\alpha 1}x_1+\cdots+a_{\alpha n}x_n)(a_{\alpha 1}\overline{x}_1+\cdots+a_{\alpha n}\overline{x}_n).$$

Die letztere Summe aber ist auf Grund der Orthogonalität gleich

$$\sum_{\alpha, p, q=1}^{n} a_{\alpha p} a_{\alpha q} x_p \bar{x}_q = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \bar{x}_\alpha ;$$

da weiter $x\bar{x} = |x|^2$ ist, ist wegen der Nebenbedingung die rechte Seite unserer Ungleichung gleich 1, also $|A(x, x)| \leqq 1$.

Daß das Maximum genau 1 ist, ist zwar auch leicht zu zeigen, wird aber hier nicht gebraucht.

Nun ist die Form $\frac{1}{\sqrt{4}} \Pi_1(x_1, \ldots, x_4)$ ihrer Bildung nach orthogonal, also ihr Maximum $\leqq 1$; für die Form Π_1 selbst ist daher $M_2 \leqq 2$, und da sie für $x_1 = \cdots = x_4 = \frac{1}{\sqrt{4}}$ den Wert 2 annimmt, $M_2 = 2$, mithin $\frac{\mathsf{M}_2}{M_2} = \frac{4}{2} = 2 = \sqrt{4}$.

Das Koeffizientenschema von Π_2 wird nun in der Weise gebildet, daß das 16-reihige Schema

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} -\Pi_1 & \Pi_1 & \Pi_1 & \Pi_1 \\ \Pi_1 & -\Pi_1 & \Pi_1 & \Pi_1 \\ \Pi_1 & \Pi_1 & -\Pi_1 & \Pi_1 \\ \Pi_1 & \Pi_1 & \Pi_1 & -\Pi_1 \end{pmatrix}$$

konstruiert wird, wo das Zeichen Π_1 überall nur das volle obige Koeffizientenschema ersetzt, und $-\Pi_1$ dasselbe, nur mit durchweg veränderten Vorzeichen.

M_2 ist hier das Maximum von $|x_1 + \cdots + x_{16}|^2$, also nach dem 1. Hilfssatz $= 16 = 4^2$. Ferner ist auch Π_2 nach Multiplikation mit einem passenden Faktor orthogonal. Denn komponiert man in Π_2 zwei Zeilen, deren Nummern sich nicht um ein Vielfaches von 4 unterscheiden, so sind wegen der Orthogonalität von $\frac{1}{2}\Pi_1$ schon die einzelnen viergliedrigen Bestandteile dieser 16-gliedrigen Kompositionen Null. Unterscheiden sich aber die Zeilennummern um ein Vielfaches von 4, so sind diese viergliedrigen Teile nicht Null, sondern zwei von ihnen gleich $+4$, zwei gleich -4, die Summe also wiederum Null. Die Kompositionen der einzelnen Zeilen mit sich selbst aber geben durchweg 16. Also ist $\frac{1}{4}\Pi_2(x_1, \ldots, x_{16})$ orthogonal; daher ist für Π_2 das $M_2 \leqq 4$, und da für $x_1 = \cdots = x_{16} = \frac{1}{4}$ die Form gleich $8\,\Pi_1(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = 4$ wird, ist $M_2 = 4$, $\frac{\mathsf{M}_2}{M_2} = \frac{16}{4} = 4 = \sqrt{16}$.

Nun sind alle Schlüsse eben so eingerichtet gewesen, daß sie

ohne weiteres gelten, wenn man genau so aus Π_2 eine Form $\Pi_3(x_1, \ldots, x_{64})$ bildet, aus Π_3 eine Form Π_4 von 256 Veränderlichen u. s. f.

Resultat. Es gibt eine Form Π_α von $n = 4^\alpha$ Veränderlichen, deren Koeffizienten alle ± 1 sind, für die $\mathsf{M}_2 = 4^\alpha$ ist, $M_2 = 2^\alpha$, also $\frac{\mathsf{M}_2}{M_2} = 2^\alpha = \sqrt{4^\alpha}$. Diese Form nimmt ihr Maximum M_2 für

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{4^\alpha}}, \ldots, x_n = \frac{1}{\sqrt{4^\alpha}}$$

an, also für positive, durchweg gleiche Werte.

4. Zusammenhang der beiden algebraischen Aufgaben. Der Zusammenhang zwischen beiden Aufgaben wird durch die kurze Vorbemerkung gekennzeichnet, daß im allgemeinen eine quadratische Form ihr Maximum M_2 nicht gerade für solche Werte $x_1, \ldots, x_n$ erreichen wird, die gleichen Betrages sind, daß dies aber gerade bei den Formen Π_α, die, wie eben gezeigt, einen hohen Wert von $\frac{\mathsf{M}_2}{M_2}$ liefern, der Fall ist.

Im einzelnen liegt es folgendermaßen. Zunächst ist M_1 für die Form Π_α von $n = 4^\alpha$ Veränderlichen gleich n^2, $\mathsf{M}_2 = 4^\alpha = n$, also $\mathsf{M}_1 = n\mathsf{M}_2$. Um das Verhältnis von M_1 und M_2 zu ermitteln, setzen wir für die Veränderlichen einerseits diejenigen Werte ein, für die Π_α sein Maximum M_1 im Sinne der ersten Aufgabe erreicht. Es ist dies ein System von Werten, die alle den Betrag 1 haben; setzen wir statt ihrer die Werte

$$\frac{x_1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{n}}$$

in Π_α ein, so ist dies ein Wertsystem, für das

$$\left|\frac{x_1}{\sqrt{n}}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right|^2 = \frac{|x_1|^2}{n} + \cdots + \frac{|x_n|^2}{n} = 1$$

ist, also ein Wertsystem, das der Nebenbedingung der zweiten Aufgabe genügt. Also ist der Wert von Π_α für dieses Wertsystem unter M_2 gelegen. Dieser Wert ist aber in Anbetracht des hinzugefügten Proportionalitätsfaktors $\frac{1}{n} M_1$; also ist $\frac{1}{n} M_1 \leq M_2$, $M_1 \leq n M_2$. Dieser Schluß hat die Besonderheit der Form Π_α noch garnicht benutzt.

Setzen wir nun aber andererseits für $x_1, \ldots, x_n$ ein solches Wertsystem ein, das das Maximum M_2 von Π_α liefert, so ist dies

auf Grund der bewiesenen Eigenschaften dieser Form das Wertsystem

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, x_n = \frac{1}{\sqrt{n}};$$

für dieses ist $\Pi_\alpha = M_2$; für $x_1 = \cdots = x_n = 1$ erhält man also das $n$fache, nM_2; dies ist aber nun ein Wertsystem, das aus lauter Werten vom Betrage 1 besteht, also den Nebenbedingungen der ersten Aufgabe genügt. Also ist $nM_2 \leqq M_1$.

Zusammenfassend erhalten wir $M_1 \leqq nM_2$, $nM_2 \leqq M_1$, mithin $M_1 = nM_2$. Nun war andererseits $\mathsf{M}_1 = n\mathsf{M}_2$. Mithin ist für die Form Π_α:

$$\frac{\mathsf{M}_1}{M_1} = \frac{\mathsf{M}_2}{M_2} = \sqrt{4^\alpha} = \sqrt{n} = 2^\alpha.$$

Resultat. Für solche n, die Potenzen von 4 sind, ist auch $\varphi_1(n) \geqq \sqrt{n}$.

5. Die Bohrsche Aufgabe. Das Beispiel einer quadratischen Form von unendlichvielen Veränderlichen, mit dessen Hilfe ich die Bohrsche Frage beantworte, konstruiere ich folgendermaßen aus den in Nr. 3 definierten Formen Π_α. Ich bilde

$$\Pi = \frac{\mu_1}{8}\Pi_1(x_1, \ldots, x_4) + \frac{\mu_2}{8^2}\Pi_2(x_{4+1}, \ldots, x_{4+4^2})$$
$$+ \frac{\mu_3}{8^3}\Pi_3(x_{4^2+4+1}, \ldots, x_{4^2+4+4^3}) + \cdots,$$

indem ich also in jedes Π_α immer wieder andere Veränderliche einsetze und nach Multiplikation mit noch näher zu bestimmenden konstanten positiven Faktoren alles addiere. Da M_1 für Π_α nach Nr. 4 gleich nM_2, dieses nach Nr. 3 gleich $n \cdot 2^\alpha = 4^\alpha \cdot 2^\alpha = 8^\alpha$ ist, dient der Faktor $\frac{1}{8^\alpha}$ gerade dazu, daß für den α-ten Summanden von Π das Maximum $M_1 = \mu_\alpha$ ist. Ist nun

(1) $$\mu_1 + \mu_2 + \cdots \qquad \text{konvergent,}$$

so ist Π eine begrenzte Funktion seiner unendlichvielen Veränderlichen. Denn diejenigen Abschnitte $\Pi(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ von Π, die gerade mit einem vollen Summanden der Π definierenden Reihe abschneiden, z. B.

$$\frac{\mu_1}{8}\Pi_1 + \cdots + \frac{\mu_\alpha}{8^\alpha}\Pi_\alpha,$$

haben das Maximum $\mu_1 + \cdots + \mu_\alpha$ für alle $x_1, \ldots, x_n$ vom Betrage 1, liegen also unter der festen Grenze $M = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \mu_\alpha$, die auch

von n unabhängig ist. Alle übrigen liegen unter dieser selben Grenze. Denn aus der Bemerkung am Ende von Nr. 1 folgt, daß

$$\operatorname{Max}|\Pi(x_1, \ldots x_n, 0, 0, \ldots)| \leqq \operatorname{Max}|\Pi(x_1, \ldots, x_{n+1}, 0, 0, \ldots)|$$

ist, daß also das Maximum des Betrages irgend eines Abschnittes von Π unter dem des nächstgrößeren Abschnittes aus der zuvor betrachteten Teilfolge von Abschnitten gelegen ist.

Die Summe der Beträge der sämtlichen Koeffizienten von Π ist

$$\text{(a)} \qquad \frac{\mu_1}{8}16 + \frac{\mu_2}{8^2}16^2 + \frac{\mu_3}{8^3}16^3 + \cdots = \sum 2^\alpha \mu_\alpha.$$

Es ist also sehr leicht, die μ_α so zu wählen, daß (1) erfüllt ist und diese Summe (a) divergiert. Darin liegt ein erstes Ergebnis:

Selbst bei einer quadratischen Form von unendlichvielen Veränderlichen, die begrenzt ist, braucht die Summe der Beträge ihrer sämtlichen Koeffizienten nicht zu konvergieren[1]).

Was nun aber die eigentliche Aufgabe von Bohr betrifft, so will ich jetzt ein Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$ bilden, für das

$$x_1^{4+\varepsilon} + x_2^{4+\varepsilon} + \cdots$$

konvergiert, hingegen $\Pi(x_1, x_2, \ldots)$ nicht absolut konvergiert. Genauer gesagt werde ich zeigen, daß bei beliebig klein vorgegebenem ε die innerhalb der Forderung (1) noch freien Größen μ_α und die $x_1, x_2, \ldots$ so gewählt werden können, daß auch die beiden eben gestellten Forderungen erfüllt sind. *Ich werde also m. a. W. nicht eine feste Form Π erhalten, die das Gewünschte bei noch so kleinem ε leistet, sondern für jedes ε eine andere passende Form vom Typus Π.*

Es liegt sehr nahe, diejenigen x_n einander gleich zu wählen, die in demselben Π_α auftreten, gleich h_α etwa, und ferner positiv. Die beiden weiteren Forderungen, die sich dann der obigen (1) anschließen, sind

$$\text{(2)} \qquad 4h_1^{4+\varepsilon} + 4^2 h_2^{4+\varepsilon} + \cdots \qquad \text{konvergent,}$$

$$\text{(3)} \quad \frac{\mu_1}{8}16h_1^2 + \frac{\mu_2}{8^2}16^2 h_2^2 + \cdots = 2\mu_1 h_1^2 + 2^2\mu_2 h_2^2 + 2^3 \mu_3 h_3^2 + \cdots \quad \text{divergent.}$$

Gelingt es, positive Größen μ_α, h_α zu finden, die diesen drei Forderungen genügen, so ist damit gezeigt, daß $A_2 \leqq 4$ ist.

Man bemerkt zuerst, daß h_α ungefähr die Größenordnung $\frac{1}{\sqrt{2_\alpha}}$ haben muß, um die Divergenz von (3) nicht unnötig stark zu

---

1) Für Funktionen $\mathfrak{P}$ unendlichhohen Grades war dies schon Herrn Bohr bekannt.

machen, daß dann aber auch gerade die Konvergenz von (2) in den Bereich der Möglichkeit tritt.

Es wird danach bequem sein

$$h_\alpha^2 = \frac{k_\alpha}{2^\alpha}$$

zu setzen, $\varepsilon = 2\varkappa$. Die drei Forderungen lauten alsdann:

$$\begin{array}{ll} 1) \ \sum \mu_\alpha & \text{konvergent,} \\ 2) \ \sum \frac{k_\alpha^{2+\varkappa}}{2^{\alpha\varkappa}} & \text{konvergent,} \\ 3) \ \sum \mu_\alpha k_\alpha & \text{divergent.} \end{array}$$

Es genügt, für μ_α und k_α geometrische Progressionen anzusetzen. Sei also

$$\mu_\alpha = \mu^\alpha, \qquad k_\alpha = k^\alpha,$$

sodaß nur noch über μ und k zu verfügen ist, so lauten die drei Forderungen

$$\begin{array}{ll} 1) \ \sum \mu^\alpha & \text{konvergent,} \\ 2) \ \sum 2^{-\alpha\varkappa} k^{\alpha(2+\varkappa)} & \text{konvergent,} \\ 3) \ \sum \mu^\alpha k^\alpha & \text{divergent,} \end{array}$$

und diese sind mit den folgenden äquivalent:

$$\begin{array}{l} 1) \ \mu < 1, \\ 2) \ 2^{-\varkappa} k^{2+\varkappa} < 1, \\ 3) \ \mu k \geqq 1. \end{array}$$

Der Vergleich der ersten und dritten Relation ergibt, daß $k > 1$ sein muß; da andererseits μ in 2) nicht vorkommt, wird es genügen, $k > 1$ so zu bestimmen, daß es (2) genügt; setzt man dann $\mu = 1/k$, so wird 1) und 3) erfüllt sein. Es bleibt also k so zu bestimmen, daß

$$k > 1, \qquad k^{2+\varkappa} < 2^\varkappa$$

ist. Da aber die zweite dieser beiden Forderungen,

$$k < 2^{\frac{\varkappa}{\varkappa+2}},$$

bei jedem noch so kleinen positiven $\varkappa$ durch $k > 1$ erfüllbar ist, ist alles bewiesen, was in der Einleitung behauptet war, nämlich $\mathsf{A}_2 \leqq 4$.

Resultat. Es existiert zu jedem ε eine begrenzte quadratische Form von unendlichvielen Veränderlichen und ein Wertsystem x_1, x_2, ...

$(0 \leqq |x_n| \leqq 1)$ *derart, daß* $\sum_n |x_n|^{4+\varepsilon}$ *konvergiert, während die quadratische Form für dieses Wertsystem nicht absolut konvergiert.* Und zwar ist dies die im Beginn dieser Nummer angegebene Form Π, falls man in ihr etwa

$$\mu_\alpha = \frac{1}{2^{\frac{\varepsilon\alpha}{\varepsilon+5}}}$$

wählt.

Zweite Hälfte: anderweitige Ergebnisse.

6. Weiterführung der ersten algebraischen Aufgabe. Die funktionentheoretische Abschätzung, deren sich, wie in der Einleitung erwähnt, Herr Bohr bedient, um $\mathsf{A} \geqq 2$ zu beweisen, kann man verwenden, um die Funktion $\varphi_1(n)$, die bisher nur nach unten abgeschätzt wurde, auch nach oben abzuschätzen. Jene Methode beruht auf dem bekannten Satze, daß die Quadratsumme der Beträge der Koeffizienten einer Potenzreihe, also speziell auch eines Polynoms $c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$,

$$|c_0|^2 + \cdots + |c_n|^2 \leqq M^2$$

ist, wo M das Maximum des Betrages des Polynoms längs des Einheitskreises ist, und auf der Bemerkung, daß das Analoge auch für Polynome von mehreren Veränderlichen (in endlicher Anzahl) gilt. Wendet man diesen Satz auf die quadratische Form $\sum a_{pq} x_p x_q$ aus Nr. 1 an, so kommt

$$\sum_{p,\,q=1}^{n} |a_{pq}|^2 \leqq M_1^2.$$

Nun ist ferner nach der sog. Schwarzschen Ungleichung[1])

$$\left(\sum_{p,\,q=1}^{n} |a_{pq}|\,|x_p|\,|x_q|\right)^2 \leqq \sum_{p,\,q=1}^{n} |a_{pq}|^2 \sum_{p,\,q=1}^{n} |x_p^2|\,|x_q^2|,$$

und die zweite Summe rechterhand ist das Quadrat von $\sum_p |x_p^2|$. Ist nun jedes $|x_p| = 1$, so ist diese Summe gleich n, die Summe linkerhand M_1, mithin

$$\mathsf{M}_1^2 \leqq M_1^2 n^2,$$

$$\frac{\mathsf{M}_1}{M_1} \leqq n.$$

1) Vgl. etwa Hellinger-Toeplitz, Math. Ann. 69, pag. 293.

Es ist daher $\varphi_1(n) \leqq n$, während oben für solche n, die Potenzen von 4 sind, gezeigt wurde, daß $\varphi_1(n) \geqq \sqrt{n}$ ist.

Damit ist die Aufgabe also nicht erledigt. Aber auch dann, wenn man gezeigt hätte, daß $\varphi_1(n) = \sqrt{n}$ ist, könnte man, wie nebenbei erwähnt sei, bezüglich der ursprünglichen Aufgabe von Bohr nicht folgern, daß $\mathsf{A}_2 = 4$ ist. Immerhin ist dies einigermaßen wahrscheinlich, zumal sich $\varphi(2) = \sqrt{2}$, nicht ohne Mühe, beweisen läßt.

7. Lösung der zweiten algebraischen Aufgabe. Mit größerer Vollständigkeit kann man die zweite Aufgabe lösen, *indem man zeigt, daß*

$$\varphi_2(n) \leqq \sqrt{n}$$

ist, und also $\varphi_2(n) = \sqrt{n}$ für solche n, die Potenzen von 4 sind.

Die zweite Aufgabe weicht von der Formulierung, in der sie sehr vielfach auftritt, darin ab, daß auch komplexe Werte der Veränderlichen zugelassen werden. Dieser Unterschied erweist sich jedoch als unwesentlich, da wir überhaupt den folgenden allgemeinen Satz beweisen:

Ist M das Maximum des Betrages der Bilinearform $\sum a_{pq} x_p y_q$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten und für beliebige komplexe Werte der beiden Reihen von Veränderlichen, die an die Nebenbedingungen

$$\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 \leqq 1, \qquad \sum_{q=1}^{n} |y_q|^2 \leqq 1$$

gebunden sind, und M das Maximum der Form $\sum |a_{pq}| x_p y_q$ unter den gleichen Bedingungen, so ist

$$\frac{\mathsf{M}}{M} \leqq \sqrt{n}.$$

Der Beweis beruht darauf, daß man, in der Schreibweise des Matrizenkalküls, die Bilinearform $A\bar{A}'$ bildet und bemerkt, daß $\sum |a_{pq}|^2$ die Summe der Diagonalglieder dieser definiten Hermiteschen Form ist. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die n (positiven) Eigenwerte (Säkulargleichungswurzeln) dieser Hermiteschen Form, so ist

$$\sum |a_{pq}|^2 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

Nun ist M^2 gleich dem Maximum der Form $A\bar{A}'$[1]), und dieses ist nichts anderes als die größte der Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Also ist

$$M^2 \leqq \sum |a_{pq}|^2.$$

1) Vgl. Hellinger-Toeplitz, Math. Ann. 69, pag. 304 und 306 Anmerkung.

Ferner ist das arithmetische Mittel der Größen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nicht größer als die größte unter ihnen, also

$$\frac{1}{n} \sum |a_{pq}|^2 \leqq M^2.$$

Endlich gilt dieselbe Argumentation auch für die Form $\sum |a_{pq}| x_p y_q$; da für diese aber die Quadratsumme der Beträge der Koeffizienten genau denselben Wert hat, wie bei A, folgt

$$\mathsf{M}^2 \leqq \sum |a_{pq}|^2,$$

also durch Division der beiden letzten Ungleichungen

$$\frac{\mathsf{M}}{M} \leqq \sqrt{n}, \quad \text{q. e. d.}$$

8. Anwendung der zweiten algebraischen Aufgabe auf die Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

Die in Nr. 3 konstruierten Formen Π_α kann man zu einer sehr elementaren Beantwortung der Frage benutzen, ob eine beschränkte quadratische Form von unendlichvielen Veränderlichen stets absolut beschränkt ist, d. h. ob mit $\sum a_{pq} x_p x_q$ stets auch $\sum |a_{pq}| x_p x_q$ beschränkt ist[1]). Man bilde zu diesem Ende die Form:

$$\mathsf{K} = \frac{1}{2} \Pi_1(x_1, \ldots, x_4) + \frac{1}{2^2} \Pi_2(x_{4+1}, \ldots, x_{4+4^2})$$
$$+ \frac{1}{2^3} \Pi_3(x_{4^2+4+1}, \ldots, x_{4^2+4+4^3}) + \cdots.$$

Jeder einzelne Summand hat im Sinne der 2. Aufgabe das Maximum $M_2 = 1$, während sein $\mathsf{M}_2 = 2^\alpha$ ist, nach dem Satz von Nr. 3. Nun ist allgemein das Maximum M_2 einer Summe zweier quadratischen Formen von verschiedenen Variabelnreihen:

$$Q_1(x_1, \ldots, x_n) + Q_2(x_{n+1}, \ldots, x_{n+\nu})$$

gleich dem größeren der beiden Maxima der einzelnen Formen Q_1, Q_2. Durch successive Anwendung dieses Prinzips ergibt sich die Beschränktheit der Form K, zugleich aber auch die Nichtbeschränktheit derjenigen Form, die aus K hervorgeht, wenn man alle Koeffizienten durch ihre Beträge ersetzt.

Man kann jedoch mit denselben Mitteln eine viel schärfere Frage erledigen, nämlich die, ob eine *vollstetige* Form absolut be-

---

1) Vgl. J. Schur, Journ. f. Math. 140, pag. 20.

schränkt sein muß. Man braucht zu diesem Zwecke bei der Bildung von K beim αten Glied nur noch den Faktor μ_α hinzuzufügen und die μ_α so zu wählen, daß $\lim\limits_{\alpha=\infty} \mu_\alpha = 0$ ist, ohne daß aber $\sum \mu_\alpha 2^\alpha$ konvergiert. $\mu_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ oder $\mu_\alpha = \frac{1}{2^\alpha}$ erfüllen z. B. diese Forderung. Alsdann ist die so modifizierte Form K′ vollstetig, aber nicht absolut beschränkt.

Es gibt eine beschränkte, sogar vollstetige, reelle quadratische und zugleich auch noch orthogonale Form unendlichvieler Veränderlichen, die nicht absolut beschränkt ist. Selbst eine vollstetige Form braucht also nicht für jedes Wertsystem der Veränderlichen von konvergenter Quadratsumme eine absolut konvergente Doppelreihe vorzustellen.

9. Beziehung zum Hadamardschen Determinantensatz. Es gibt noch eine dritte algebraische Aufgabe, deren Maximum auch von den Formen Π_α aus Nr. 3 geliefert wird. Es ist dies die Frage, für welche Determinanten die Hadamardsche Ungleichung

$$|a_{pq}| \leqq \sqrt{n}^n,$$

falls $|a_{pq}| \leqq 1$, zur Gleichung wird. $\frac{1}{2^\alpha}\Pi_\alpha$ hat als orthogonale Form die Determinante 1, also Π_α selbst, dessen Koeffizienten alle ± 1 sind, die Determinante

$$(2^\alpha)^{(4^\alpha)} = (\sqrt{4^\alpha})^{(4^\alpha)},$$

leistet also das Verlangte für solche n, die Potenzen von 4 sind.

Ich erwähne dies nur, um hervorzuheben, daß die Formen Π_α anläßlich dieser Frage stets verwendet worden sind [1]), und daß das Wesentliche an der obigen Untersuchung in der Bemerkung lag, daß dieselben Bildungen auch bei den obigen, scheinbar ganz anderen Aufgaben eine Rolle spielen.

1) Vgl. etwa E. Pascal, die Determinanten, Leipzig 1900, pag. 183.

Sur les involutions cycliques d'ordre 2^α et de genres un sur une surface de genres un.

Note de

Lucien Godeaux.

Vorgelegt von Herrn F. Klein in der Sitzung am 24. Mai 1913.

En me basant sur un théorème de M. Enriques[1]) d'après lequel une involution de genres un sur une surface de genres un, est cyclique ou est composée avec une involution cyclique, j'ai pu démontrer que l'ordre d'une pareille involution n'admet comme facteurs premiers que deux et trois[2]). En d'autres termes, considérant une correspondance rationnelle $(1, n)$ entre deux surfaces Φ, F de genres un, on a $n = 2^\alpha 3^\beta$, α et β étant des entiers positifs ou nuls.

Continuant mes recherches sur ce sujet, j'ai pu démontrer qu'une involution cyclique d'ordre 2^α et de genres un sur une surface de genres un, ne peut exister que si α est au plus égal à trois. C'est la démonstration de cette propriété que je me propose de donner dans cette note. D'une manière précise, je vais établir les théorèmes suivants:

I. — Si sur une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), il existe une involution cyclique d'ordre 2^α et de genres un ($p_a = P_4 = 1$), α est au plus égal à trois.

---

1) Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno. Rend. R. Accad. di Bologna, 1910.

2) Sur les transformations rationelles entre deux surfaces de genres un. C. R., 12 Août 1912. — Un exposé des résultats contenus dans cette note sera publié prochainement.

II. — Si $\alpha = 2$, on peut établir une transformation birationelle entre les groupes de l'involution et les points d'une surface d'ordre $2\varrho - 2$ à sections hyperplanes de genre ϱ, située dans un espace linéaire à ϱ dimensions, et possédant quatre points doubles biplanaires de deuxième espèce[1]) et deux points doubles coniques.

III. — Si $\alpha = 3$, on peut établir une transformation birationelle entre les groupes de l'involution et les points d'une surface d'ordre $2\varrho - 2$, à sections hyperplanes de genre ϱ, située dans un espace linéaire à ϱ dimensions, et possédant deux points biplanaires de sixième espèce, un point biplanaire de 2[e] espèce et un point double conique.

Avant de commencer, je rappellerai qu'une surface de genres un est caractérisée par $p_a = P_4 = 1$. Une telle surface a $p_a = p^{(1)} = p_g = P_2 = \cdots = P_i = \cdots = 1$, $I = 20$. Une courbe de genre virtuel π, donnée sur une surface de genres un, appartient à un système linéaire complet de degré $2\pi - 2$ et de dimension π. Ce systième est son propre adjoint, c'est-à-dire que ses courbes découpent, sur l'une d'elles, la série canonique $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$. Les courbes canoniques et pluricanoniques sont d'ordre zéro.

1. — Soit F une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et, sur cette surface, un involution I_α, cyclique, d'ordre 2^α, également de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Soit T la transformation birationelle de F en elle-même, de période 2^α, engendrant l'involution I_α.

Comme nous l'avons montré dans notre note des Comptes-Rendus, on peut toujours supposer l'existence, sur F, d'un système linéaire simple $|C|$, de degré $2\pi - 2$, de genre et de dimension π, sans points-bases, qui soit invariant pour T, c'est-à-dire tel qu'une de ses courbes est transformée par T en une de ses courbes, distincte ou non de la première.

Considérons une courbe C et ses $2^\alpha - 1$ transformées par les $2^\alpha - 1$ premières puissances de T. La somme de ces 2^α courbes est une courbe D, de genre $2^{2\alpha}(\pi - 1) + 1$ et de degré $2^{2\alpha+1}(\pi - 1)$,

1) Un point biplanaire d'espèce $2t$ est constitué par une suite de $t+1$ points doubles infiniment voisins successifs, le dernier étant un point conique. Une pareille singularité abaisse la classe d'une surface de $2(t+1)$ unités. Un point biplanaire est d'espèce $2t+1$ lorsqu'il est constitué par une suite de $t+1$ points doubles et d'un point simple infiniment voisins successifs.

invariante pour T, c'est-a-dire transformée en elle-même par T. Cette courbe D définit un système linéaire incomplet $|D|$, composé avec l'involution I_α et tel que chacune de ses courbes est invariante pour T.

Rapportons projectiveement les courbes $|D|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à $2^\alpha(\pi-1)+1$ dimensions. Nous obtenons une surface Φ, d'ordre $2^{\alpha+1}(\pi-1)$, à sections hyperplanes de genre $2^\alpha(\pi-1)+1$, telle qu'à un point de cette surface correspondent les 2^α points de F formant un groupe de I_α. En d'autres termes, nous avons une surface Φ en correspondance $(1, 2^\alpha)$ avec F. Par hypothèse, cette surface Φ est de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Nous désignerons par $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ.

2. — Ces choses étant rappelées, considérons un point de coïncidence P_1 sur F, c'est-à-dire un point comptant plusieurs fois dans le groupe de I_α anquel il appartient. Nous savons que de pareils points sont en nombre fini [1]). Le point P_1 est changé en lui-même par l'une des transformations $T, T^2, T^4, \ldots, T^{2^{\alpha-1}}$ [2]). Supposons, pour fixer les idées, que P_1 est invariant pour la transformation $T^{2^{\alpha-k}} (0 < k \leqq \alpha)$. Cette transformation a la période 2^k, par suite P_1 comptera pour 2^k points dans le groupe de I_α auquel il appartient. Pour cette raison, nous dirons que P_1 est un point de coïncidence d'ordre 2^k.

Les transformations $T, T^2, T^3, \ldots, T^{2^{\alpha-k}-1}$ changent P_1 en P_2, $P_3, \ldots$. Ces $2^{\alpha-k}-1$ nouveaux points sont distincts de P_1 et sont aussi des coïncidences d'ordre 2^k, de sorte que si un groupe de I_α contient un point de coïncidence d'ordre 2^k, ce groupe est formé de $2^{\alpha-k}$ pareils points. Le point P correspondant à ce groupe sur Φ sera dit point de diramation d'ordre 2^k.

Remarquons qu'une courbe D ayant en P_1 une certaine singularité en aura la même singularité en $P_2, P_3, \ldots$. Nous pourrons donc, dans la suite, ne parler de $P_2, P_3 \ldots$ que pour mémoire.

3. — Appelons D_1 les courbes D passant par P_1 (et par suite par $P_2, P_3, \ldots$), et soient Γ_1 les courbes Γ correspondantes.

Une courbe D_1 a en P_1 une certaine singularité; soit i l'abaissement produit sur le genre par cette singularité, de sorte que les courbes D_1 sont généralement de genre $2^{2\alpha}(\pi-1)+1-2^{\alpha-k}.i$. Sur une courbe D_1, T engendre une involution γ'_α, d'ordre 2^α et cette involution possédera, en P_1, $\delta > 0$ coïncidences.

---

1) Enriques, loc. cit.

2) Il est inutile de considérer $T^3, T^5, \ldots$, car un point invariant pour T^3 par exemple, est invariant pour (T^3). Or il est toujours possible de déterminer ν pour avoir $(T^3)^\nu \equiv T^{2\alpha}.T^{2k}$.

Supposons que Φ n'ait aucune singularité en P, et appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance entre une Γ_1 et la D_1 correspondante. Qu a

$$2^\alpha . 2^{\alpha+1}(\pi-1)+2^{\alpha-k}\delta = 2^{2\alpha+1}(\pi-1)-2.2^{\alpha-k}.i,$$

d'où $\delta = 0$, ce qui est absurde. Le point P est donc singulier pour Φ. Précisément, il est double, car, une multiplicité plus élévée donnerait, sur Φ, un système linéaire de dimension supérieure au genre, ce qui est impossible.

P étant double, la formule de Zeuthen donne

$$2^\alpha\{2^{\alpha+1}(\pi-1)-2\}+2^{\alpha-k}\delta = 2^{2\alpha+1}(\pi-1)-2.2^{\alpha-k}.i,$$

c'est-à-dire

$$\delta+2i = 2^{k+1}.$$

Mais δ est pair et de plus est multiple de $2-1$, car la γ'_α est cyclique. Donc on a

$$\delta = 2(2^k-1),\ i = 1.$$

Les courbes D_1 ont donc un point double en P_1 (et de même en $P_2, P_3, \ldots$).

Le point P étant double pour Φ, le système $|\Gamma_1|$ a de degré $2^{\alpha+1}(\pi-1)-2$ et par suite, le degré effectif de $|D_1|$ est $2^{2\alpha+1}(\pi-1)-2^{\alpha+1}$. Il en résulte qu'en P_1, les courbes D_1 ont 2^{k+1} intersections absorbées. Sur chaque branche d'une D_1 en P_1, il y a d'autre part une coïncidence (2^k-1)-uple, par suite les D_1 ont un contact $2(2^{k-1}-1)$ ponctuel sur chaque branche. En d'autres termes, il y a $2(2^{k-1}-1)$ points-simples infiniment voisins successifs de P communs à toutes les D_1 sur chaque branche de celles-ci.

De ce qu'il y a une coïncidence sur chaque branche de D_1 en P_1, on conclut que les Γ_1 ont généralement deux tangentes distinctes en P. Par suite, le point P est un point double conique ou biplanaire pour Φ.

4. — Nous allons maintenant construire un système linéaire de courbes D ayant en $P_1, P_2, \ldots$ des points 2^k-uples à tangentes variables.

Pour cela, considérons une courbe C, de genre π, et ses transformées au moyen de $T, T^2, T^3, \ldots T^{2\alpha-k-1}$. La somme de C et les $2^{\alpha-k}-1$ courbes ainsi obtenues (et qui sont aussi des courbes C) est une courbe C_1 de genre $2^{2\alpha-2k}(\pi-1)+1$ et de degré $2^{2\alpha-2k+1}(\pi-1)$. Cette courbe C_1 engendre un système complet $|C_1|$ de dimension $2^{2\alpha-2k}(\pi-1)+1$.

Considérons une courbe C_1 passant par P_1 et ayant avec une

des branches d'une courbe D_1 un contact $2(2^{k-1}-1)$ — ponctuel, passant par P_2 et ayant avec une branche (correspondante à celle choisie en P_1) un contact $2(2^{k-1}-1)$ — ponctuel et se comportant de la même manière en P_3, P_4 ... La transformation $T^{2^{\alpha-k}}$ et ses puissances changent cette C_1 en d'autres courbes ayant la même manière de se comporter en P_1, P_2, ... On a ainsi construit une courbe D', qui n'est évidemment autre qu'une courbe de $|D|$, ayant en P_1 une suite de $2(2^{k-1}-1)+1$ points 2^k-uples infiniment voisins successifs et ayant le même comportement en P_2, P_3, ... On peut construire une seconde courbe D'' ayant la même singularité que D' en P_1, P_2, ... mais telle que la suite de points 2^k — uples soit sur l'autre branche d'une D_1. Ces courbes D', D'' déterminent un système linéaire de courbes D ayant en P_1, P_2, ... des points 2^k - uples à tangentes variables. Nous désignerons ces courbes par D_2 et le système linéaire qu'elles engendrent sera $|D_2|$.

Soit $|\Gamma_2|$ le système correspondant à $|D_2|$ sur la surface Φ et soit ν le degré virtuel de ce système.

Supposons qu'en un point infiniment voisin de P_1, il n'y ait pas de coïncidence. Alors, la formule de Zeuthen appliquée à un couple de courbes Γ^2, D^2 correspondantes, donne

$$2^\alpha \nu = 2^{2\alpha+1}(\pi-1) - 2^\alpha(2^k-1).$$

Cela revient-à-dire que 2^k-1 est pair (car ν est pair), ce qui est absurde.

Supposons donc qu'en chaque point infiniment voisin de P_1 il y ait une coïncidence 2^t - uple ($o < t \leqq k$). La formule de Zeuthen donne actuellement

$$2^\alpha \nu + 2^{\alpha-k} . 2^k(2^t-1) = 2^{2\alpha+1}(\pi-1) - 2^\alpha(2^k-1),$$

c'est-à-dire

$$\nu = 2^{\alpha+1}(\pi-1) - 2^k - 2^t + 2.$$

Le degré effectif de $|D_2|$ est $2^{2\alpha+1}(\pi+1) - 2^{\alpha+k}$, donc le degré effectif de $|\Gamma_2|$ est $2^{\alpha+1}(\pi-1)-2^k$. Or, le degré virtuel d'un système linéaire est au moins égal au degré effectif, donc on a

$$\nu \geqq 2^{\alpha+1}(\pi-1) - 2^k,$$

d'où

$$2^{t-1} \leqq 1.$$

On a donc $t = 1$, c'est-à-dire:

En un point quelconque du domaine d'un point de coïncidence de I_α, il y a une coïncidence double.

Les degrés virtuels et effectifs de $|\Gamma_2|$ sont égaux à $\nu = 2^{\alpha+1}$

$(\pi-1)-2^k$, par suite la surface Φ a en P une singularité composée de 2^{k-1} points doubles. De plus, comme sur chaque D_2 il y a deux groupes de I_α, composés chacun de $2^{\alpha-1}$ coïncidences doubles, infiniment voisins de P_1, les branches des Γ_2 sont distinctes. Les branches des D_2 sont distinctes, donc il en est de même des branches des Γ_2, et le dernier point double de la suite en P est conique. Φ a donc en P un point biplanaire d'espèce 2^{k-2}.

En un point de diramation d'ordre 2^k, Φ a un point double biplanaire d'espèce 2^{k-2}.

On sait qu'une pareille singularité abaisse la classe de Φ de 2^k unités.

5. — Nous allons établir une première formule fondamentale liant le nombre de points de diramation de Φ et le nombre α.

Supposons que la surface Φ possède x_k points de diramation d'ordre $2^k (k = 1, 2; 3, \ldots, \alpha)$.

Soit m la classe effective de Φ.

Calculons l'invariant de Zeuthen-Segre I (que nous savons égal à $12p_a+9-p^{(1)} = 20$) au moyen d'un faisceau de sections hyperplanes Γ de Φ. On obtient

$$m+\sum_{k=1}^{\alpha} 2^k x_k = 24+2^{\alpha+1}(\pi-1)+2^{\alpha+2}(\pi-1).$$

L'invariant de Zeuthen-Segre de F calculé en utilisant le faisceau des D correspondantes, donne

$$m \, . \, 2^\alpha+\sum_{k=1}^{\alpha} 2^{\alpha-k} x_k = 24+2^{2\alpha+1}(\pi-1)+2^{2\alpha+2}(\pi-1).$$

L'élimination de m entre les deux formules établies donne la relation fondamentale

$$\text{(I)} \qquad \sum_{k=1}^{\alpha} (2^{2k}-1)\, 2^{\alpha-k} x_k = 3 \, . \, 2^3 (2^\alpha-1).$$

6. — On obtient une nouvelle relation entre les quantités x_1, $x_2, \ldots, x_\alpha$ de la manière suivante.

Considérons la transformation $T^{2^{\alpha-1}}$. Elle a la période deux et engendre sur F une involution du second ordre que nous désignerons par I_1. Soit Φ_1 une surface dont les points représentent les couples de I_1. Entre Φ_1 et F on a une correspondance (1, 2) et entre Φ et Φ_1, une correspondance $(1, 2^{\alpha-1})$. Par suite Φ_1 est de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Quels sont les points de diramation sur Φ_1 pour la corres-

pondance (1, 2) entre Φ_1 et F. Un point de coïncidence d'ordre 2^k sur F invariant pour $T^{2\alpha-k}$ l'est aussi pour $(T^{2\alpha+k})^{k+1} = T^{2\alpha-1}$, donc c'est un point de coïncidence pour l'involution I_1. Le nombre des points de diramation sur Φ_1 est donc $2^{\alpha-1}x_1 + 2^{\alpha-2}2_2 + \cdots + x_\alpha$.

Mais d'autre part, nous avons établi dans notre premier travail des Comptes-Rendus que si entre deux surfaces de genres un, il y a une correspondance (1, 2), il y a huit diramations. Par suite, on a

$$\text{(II).} \qquad \sum_{k=1}^{\alpha} 2^{\alpha-k} x_k = 8.$$

Remarquons tout de suite que si $x_{\alpha-3}$ n'est pas nul, on a nécessairement, par (II), $x_{\alpha-3} = 1$, tous les autres x étant nul. La formule (I) donne alors

$$2^{2\alpha-6} - 1 = 3(2^\alpha - 1)$$

avec $\alpha \geqq 4$. On vérifie aisément que cela est impossible. On conclut alors de la formule (II) que seuls x_α, $x_{\alpha-1}$ et $x_{\alpha-2}$ peuvent, ne pas être nul.

7. — Les formules fondamentales (I) et (II) s'écrivent, en posant $x_{\alpha-3} = \cdots = x_1 = 0$,

$$\text{(I')} \quad (2^{2\alpha} - 1)x_\alpha + 2(2^{2\alpha+2} - 1)x_{\alpha-1} + 4(2^{2\alpha-4} - 1)x_{\alpha-2} = 3 \,.\, 2^5(2^\alpha - 1),$$

$$\text{(II'')} \qquad x_\alpha + 2x_{\alpha-1} + 4x_{\alpha-2} = 8.$$

Supposons $\alpha > 2$ et éliminons $x_{\alpha-2}$ entre les équations précédentes, il vient:

$$2^{2\alpha-4}(2^4 - 1)x_\alpha + 2^{2\alpha-3}(2^2 - 1)x_{\alpha-1} = 2^4(3 \,.\, 2^{\alpha-1} - 2^{2\alpha-5} - 1).$$

Le second membre est au plus divisible par 24, donc on a $2\alpha - 4 \leqq 4$, c'est-à-dire $\alpha \leqq 4$.

Si $\alpha = 4$, on a, pour la dernière relation,

$$5x_4 + 2x_3 = 5.$$

Cette équation est incompatible avec (II'), donc on ne peut avoir $\alpha = 4$. On a $\alpha \leqq 3$ et le premier théorème énoncé est ainsi établi.

7. — Nous allons établir les deux autres théorèmes énoncés. Si $\alpha = 2$, les équations (I') et (II') deviennent

$$2x_1 + 5x_2 = 24,$$
$$2x_1 + x_2 = 8,$$

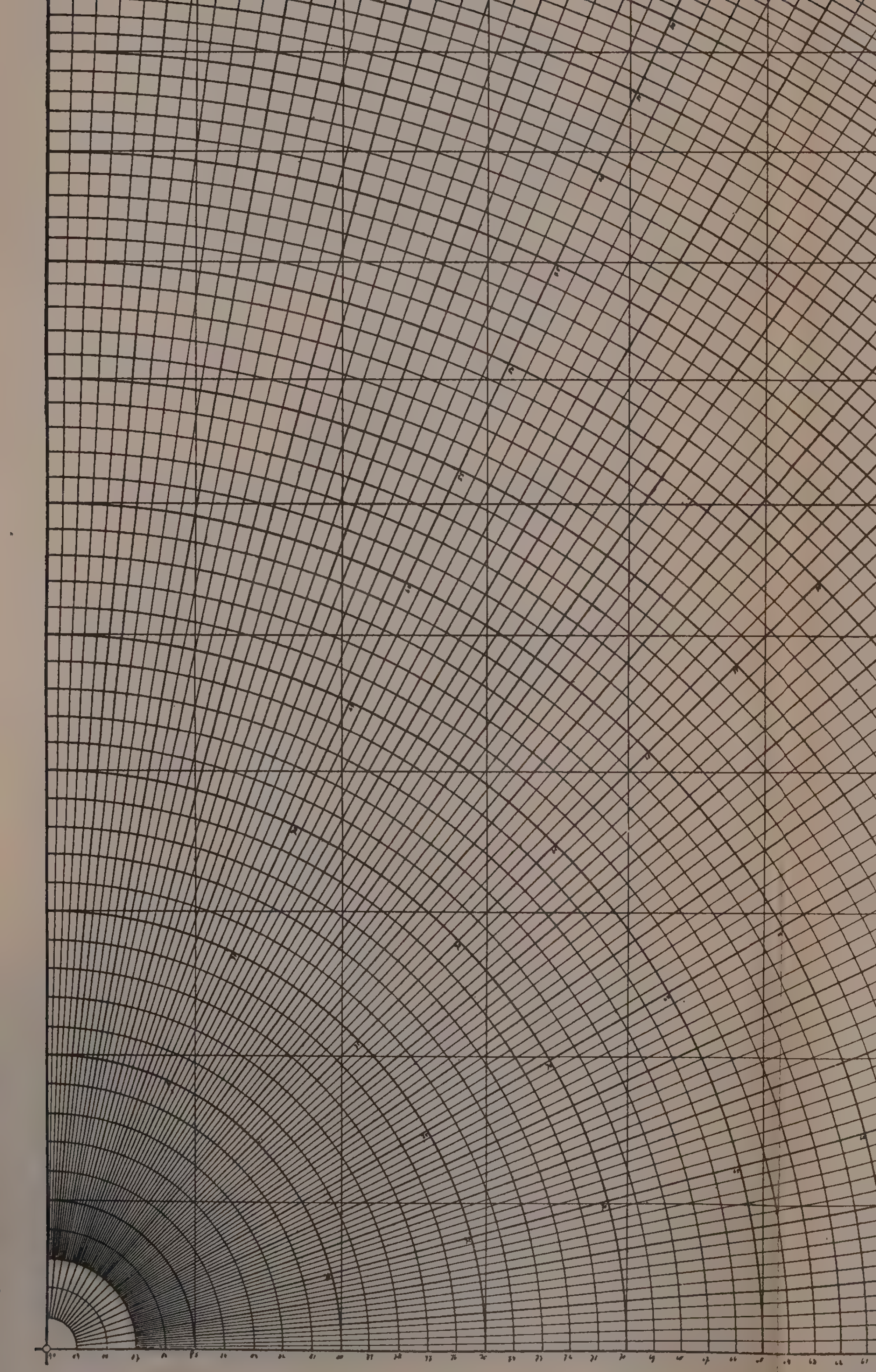
d'où $x_2 = 4$, $x_1 = 2$.

Si $\alpha = 3$, (I') et (II'') deviennent

$$4x_1' + 10\,x_2 + 21\,x_3 = 56,$$
$$4x_1 + 2a_2 + x_3 = 8.$$

On a nécessairement $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Goettingen, 15 Mars 1913.



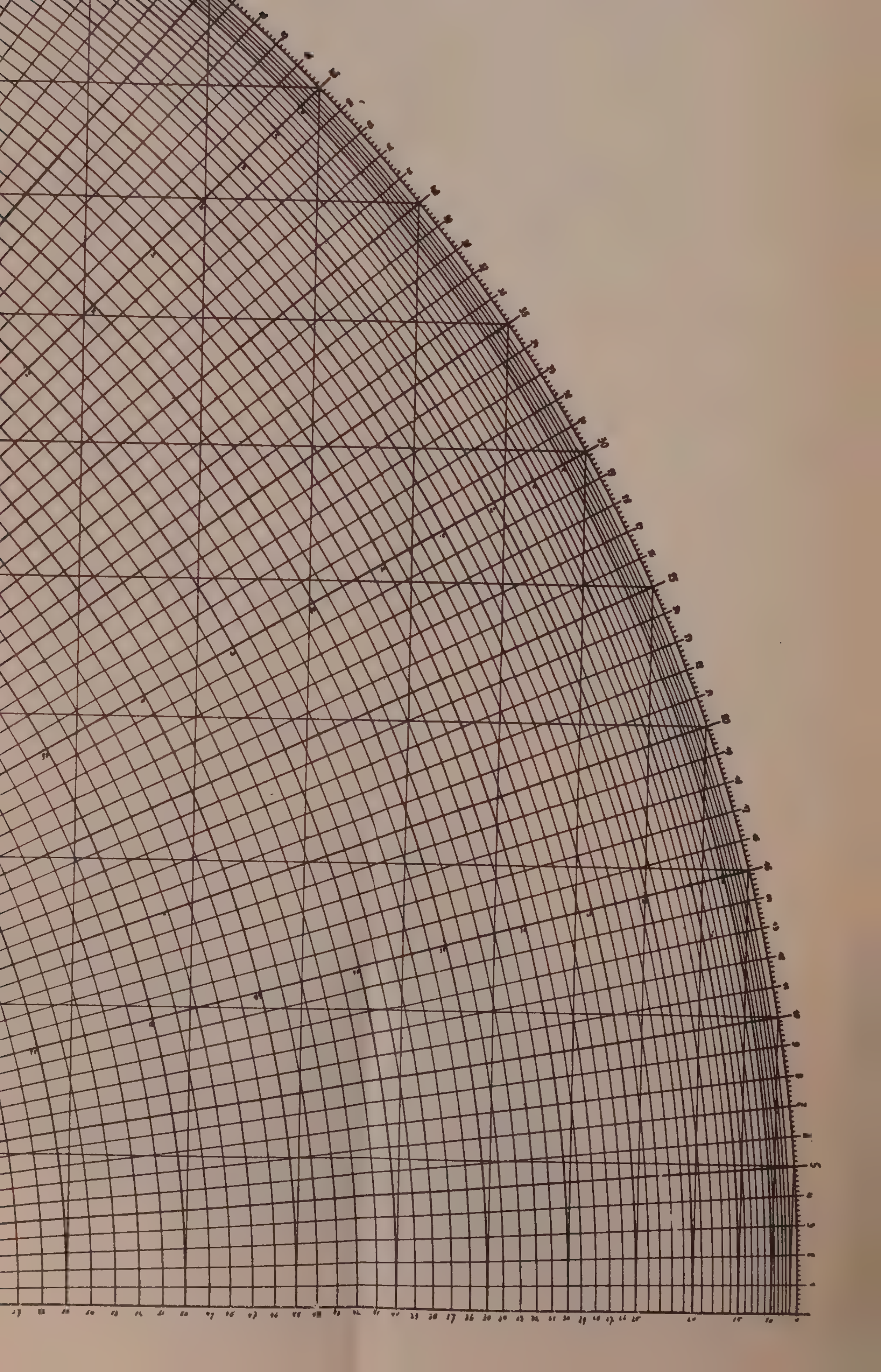


Fig. 1.

Bl.
Do.
Vi.
VP

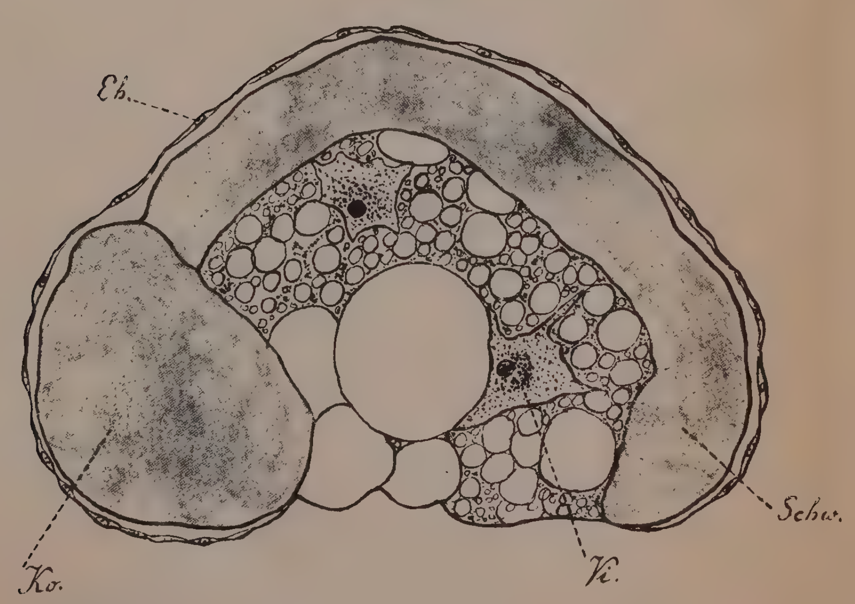
Fig. 2.

Do Z.
BC.
Do.
Po.

Fig. 3.

CH.
EH.
K
Vi.
No.

Fig. 4.



R. W. Hoffmann gez.

Fig. 5.

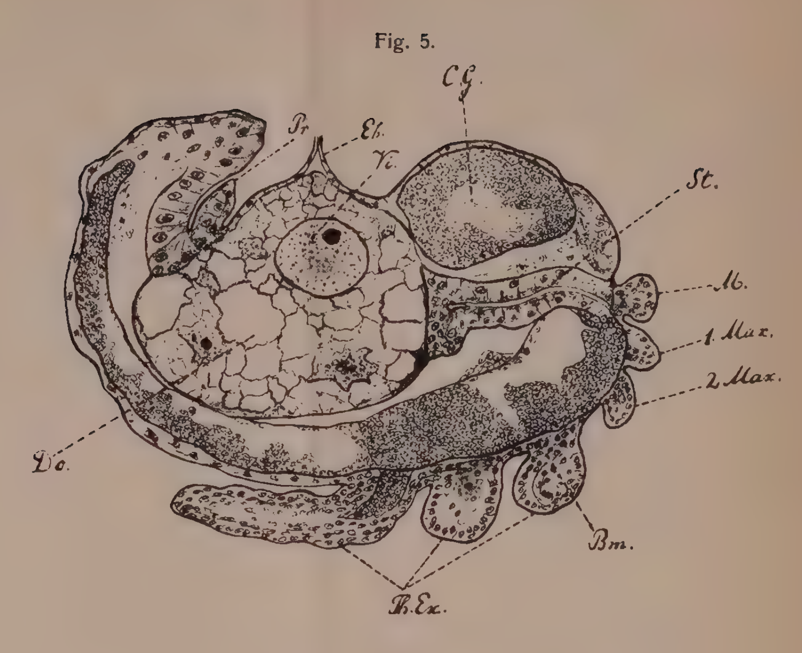
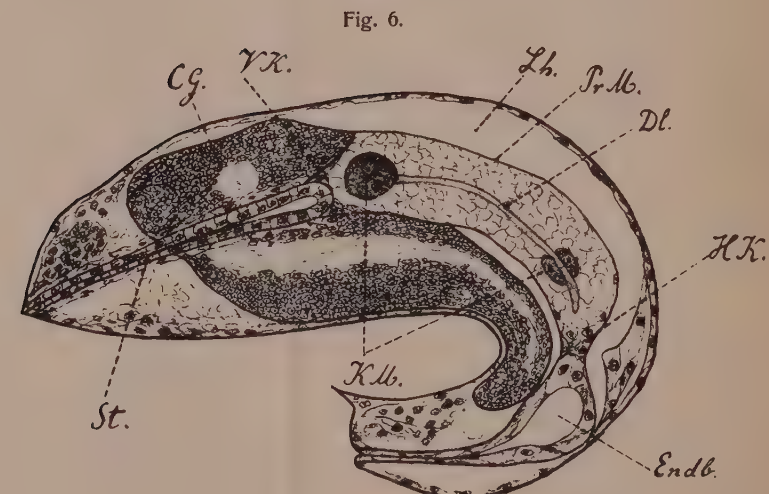


Fig. 6.



Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$.

Von

Harald Bohr aus Kopenhagen.

Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1913 von Herrn D. Hilbert.

Einleitung.

Es sei

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

eine Dirichletsche Reihe, und es sei

$$y_1 = \frac{1}{2^s}, \quad y_2 = \frac{1}{3^s}, \ldots, y_m = \frac{1}{p_m^s}, \ldots$$

gesetzt, wo p_m die m^{te} Primzahl bezeichnet. Auf Grund des Fundamentalsatzes der Zahlentheorie, daß alle ganze Zahlen $n \geqq 1$ sich eindeutig durch Multiplikation von Primzahlen

$$n = p_{n_1}^{\nu_1} p_{n_2}^{\nu_2} \cdots p_{n_r}^{\nu_r}$$

zusammensetzen lassen, folgt unmittelbar, daß die Reihe (1) — rein formal — sich als eine Potenzreihe der unendlich vielen Größen $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$,

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_{n_1}^{\nu_1} y_{n_2}^{\nu_2} \cdots y_{n_r}^{\nu_r}$$

$$= c + \sum_{\alpha=1,2\ldots} c_\alpha y_\alpha + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2\ldots \\ \alpha \leqq \beta}} c_{\alpha,\beta}\, y_\alpha y_\beta + \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=1,2\ldots \\ \alpha \leqq \beta \leqq \gamma}} c_{\alpha,\beta,\gamma}\, y_\alpha y_\beta y_\gamma + \cdots,$$

darstellen läßt, wo

$$c = a_1, \quad c_\alpha = a_{p_\alpha}, \quad c_{\alpha,\beta} = a_{p_\alpha p_\beta}, \quad c_{\alpha,\beta,\gamma} = a_{p_\alpha p_\beta p_\gamma}, \dots$$

ist.

Dieser Gebrauch des Wortes: Potenzreihe der unendlich vielen Größen $y_1, y_2, \dots, y_m, \dots$, könnte hier zunächst ungemäß scheinen; denn wenn von einer Potenzreihe $P(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ der unendlich vielen Größen $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ die Rede ist, denkt man sich die Größen $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ als von einander unabhängige Variable, während in der obigen Potenzreihe $P(y_1, y_2, \dots, y_m, \dots)$ die Größen $y_1, y_2, \dots, y_m \dots$ ja sämtlich Funktionen des einen Parameters $s = \sigma + it$ sind.

Wenn man aber, wie ich in einigen früheren Arbeiten über die Riemannsche Zetafunktion[1]) getan habe, die Theorie der Diophantischen Approximationen in die Untersuchungen über Dirichletsche Reihen hineinzieht, gewinnt die obige zunächst rein formale Darstellung von $\sum \frac{a_n}{n^s}$ als eine Potenzreihe $P(y_1, y_2, \dots, y_m, \dots)$ einen realen Sinn, und zwar derart, daß sogar bei manchen Untersuchungen über Dirichletsche Reihen der Kern des Problems erst durch den Umweg über die Potenzreihe $P(y_1, y_2, \dots, y_m, \dots)$ deutlich hervortritt; es ergibt sich nämlich auf Grund der Tatsache, daß bei jedem $N \geqq 1$ die N Zahlen $\log p_1, \log p_2, \dots, \log p_N$ im rationalen Körper linear unabhängig sind, daß die obigen Größen $y_1, y_2, \dots, y_m, \dots$, obwohl sie ja in Wirklichkeit Funktionen nur des einen Parameters s sind, sich in mancher Beziehung fast ganz benehmen, als wären sie von einander unabhängige Variable.

Es sei (1) eine Dirichletsche Reihe; dann werde ich im Folgenden unter der zugehörigen Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ die Potenzreihe

$$(2) \quad \begin{aligned} P(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x_{n_1}^{v_1} x_{n_2}^{v_2} \dots x_{n_r}^{v_r} \\ &= c + \sum_{\alpha=1,2..} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2..\\ \alpha\leqq\beta}} c_{\alpha,\beta}\, x_\alpha x_\beta + \cdots \end{aligned}$$

verstehen, wo

$$c = a_1, \quad c_\alpha = a_{p_\alpha}, \quad c_{\alpha,\beta} = a_{p_\alpha p_\beta}, \dots$$

1) Vgl. insbesondere: H. Bohr, Über die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$. Crelles Journal Bd. 141, 1912, S. 217—234. Der Leser braucht übrigens die zitierte Abhandlung nicht zu kennen.

ist. Es gehört also zu jeder Dirichletschen Reihe (1) eine und nur eine Potenzreihe (2), und umgekehrt ist jede Potenzreihe mit unendlich vielen Variabeln einer und nur einer Dirichletschen Reihe (1) gehörig.

Es sei die Reihe (1) für $\sigma = \sigma_0$ absolut konvergent. Dann werde ich in § 1, dessen Beweismethode einer früheren von mir ausarbeiteten Beweismethode[1]) nachgebildet ist, die Frage nach den Werten, welche die Reihe (1) auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, untersuchen. Es bezeichne $U = U(\sigma_0)$ die Menge (Punktmenge in einer komplexen Ebene) dieser Werte, d. h. die Menge aller Werte, welche die Funktion $f(\sigma_0 + it)$ annimmt, wenn die reelle Variable t von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. Auf Grund der absoluten Konvergenz von (1) für $\sigma = \sigma_0$ ist die zu (1) gehörige Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ im Gebiete

$$|x_1| \leqq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \quad |x_2| \leqq \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \ldots, \quad |x_m| \leqq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$$

absolut konvergent, d. h. es ist

$$|c| + \sum_{\alpha} |c_\alpha| \frac{1}{p_\alpha^{\sigma_0}} + \sum_{\alpha, \beta} |c_{\alpha,\beta}| \frac{1}{p_\alpha^{\sigma_0}} \frac{1}{p_\beta^{\sigma_0}} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{1}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{1}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}}$$

konvergent. Es bezeichne $V = V(\sigma_0)$ die Menge aller Werte, welche die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ annimmt, wenn die Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ (jede Variable in ihrer komplexen Ebene) unabhängig von einander die Kreise

$$|x_1| = \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \quad |x_2| = \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \ldots, \quad |x_m| = \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$$

durchlaufen. Dann beweise ich in § 1: Es ist die Menge U in der Menge V enthalten, und es liegt U in V überall dicht; d. h. es sei v eine beliebige Zahl in V und $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; dann gibt es eine Zahl u in U derart, daß

$$|u - v| < \varepsilon$$

ist, also eine reelle Zahl t_0 derart, daß

$$|f(\sigma_0 + it_0) - v| < \varepsilon$$

ist.

1) Vgl. insbesondere § 2 meiner oben zitierten Abhandlung.

Es sei wie oben die Reihe (1) für $\sigma = \sigma_0$ absolut konvergent, und es sei überdies angenommen, daß die Gerade $\sigma = \sigma_0$ im Innern des absoluten Konvergenzgebietes der Reihe (1) gelegen ist. Es bezeichne $W = W(\sigma_0)$ die Menge aller Werte w, welche die Reihe (1) in unendlicher Nähe der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, d. h. die Menge aller Zahlen w mit folgender Eigenschaft: bei jedem $\delta > 0$ nimmt $f(s)$ im Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ den Wert w an. Dann gilt, wie ich in § 2 beweisen werde, der Satz: Es ist die Menge W mit der obigen Menge $V = V(\sigma_0)$ identisch.

§ 3 enthält eine Untersuchung über Potenzreihen mit unendlich vielen Variabeln. Unter dem m^{ten} Abschnitt einer Potenzreihe

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = c + \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \\ \alpha \leqq \beta}} c_{\alpha, \beta} x_\alpha x_\beta + \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots \\ \alpha \leqq \beta \leqq \gamma}} c_{\alpha, \beta, \gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma + \cdots$$

versteht man nach Herrn Hilbert[1]) diejenige Potenzreihe der m Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_m$

$$P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = c + \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots m} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots m \\ \alpha \leqq \beta}} c_{\alpha, \beta} x_\alpha x_\beta + \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots m \\ \alpha \leqq \beta \leqq \gamma}} c_{\alpha, \beta, \gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma + \cdots,$$

welche entsteht, wenn in $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ die Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ sämtlich $= 0$ gesetzt werden. Es sei $G_1, G_2, \ldots G_m, \ldots$ eine Folge reeller positiver Zahlen; dann heißt die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, |x_2| \leqq G_2, \ldots, |x_m| \leqq G_m, \ldots$ beschränkt[1]), wenn sie die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

1) Es ist bei jedem $m \geqq 1$ der m^{te} Abschnitt $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, |x_2| \leqq G_2, \ldots |x_m| \leqq G_m$ absolut konvergent.

2) Es existiert eine von m unabhängige Zahl $K > 0$ derart, daß bei jedem $m \geqq 1$ im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, |x_2| \leqq G_2, \ldots |x_m| \leqq G_m$

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)| < K$$

ist.

In § 3 wird alsdann der Zusammenhang zwischen der Beschränktheit einer Potenzreihe mit unendlich vielen Variabeln

1) D. Hilbert, Wesen und Ziele einer Analysis der unendlich vielen unabhängigen Variabeln. Palermo Rendiconti Bd. 27, 1909, S. 59—74, S. 67.

und der absoluten Konvergenz der Reihe untersucht. Es wird hier u. a. der folgende Satz bewiesen:

Es sei die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, |x_2| \leqq G_2, \ldots, |x_m| \leqq G_m, \ldots$ beschränkt; es sei ferner $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen derart, daß, bei jedem $m \geqq 1$, $0 < \varepsilon_m < 1$ ist, und daß $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2$ konvergiert. Dann ist $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ im Gebiete $|x_1| \leqq \varepsilon_1 G_1, |x_2| \leqq \varepsilon_2 G_2, \ldots, |x_m| \leqq \varepsilon_m G_m, \ldots$ absolut konvergent.

Es sei $S \leqq \infty$ die obere Grenze aller positiven Zahlen α mit folgender Eigenschaft: „Jede für $|x_1| \leqq G_1, |x_2| \leqq G_2, \ldots$ beschränkte Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots)$ ist für $|x_1| \leqq \varepsilon_1 G_1, |x_2| \leqq \varepsilon_2 G_2, \ldots$ absolut konvergent, wenn nur $0 < \varepsilon_m < 1$ ist und $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{\alpha}$ konvergiert“. S ist also eine absolute Konstante $\leqq \infty$, und es ist nach dem obigen Satze $S \geqq 2$.

In § 4 zeige ich die wichtige Rolle, welche diese Zahl S beim Studium des absoluten Konvergenzproblems der Dirichletschen Reihen (1) spielt. Es sei (1) eine Dirichletsche Reihe, die ein Konvergenzgebiet besitzt, und es möge $\sigma = A$ die Konvergenzgerade, $\sigma = B$ die absolute Konvergenzgerade und $\sigma = C$ die gleichmäßige Konvergenzgerade[1]) der Reihe bezeichnen; hierbei ist $-\infty \leqq A \leqq C \leqq B < \infty$. Es sei ferner $D\,(-\infty \leqq D < \infty)$ diejenige Zahl, daß bei jedem $\varepsilon > 0$ die durch die Reihe definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma > D + \varepsilon$, dagegen nicht für $\sigma > D - \varepsilon$ regulär und beschränkt ist. Dann ist, wie ich am anderen Orte[2]) bewiesen habe,

$$C = D.$$

Dies enthält einen früheren Schneeschen Satz[3]), nach welchem $A \leqq D$ ist. Auf Grund der bekannten Relation $B - A \leqq 1$ folgt unmittelbar aus dem Schneeschen Satze, daß die absolute Kon-

1) Unter der gleichmäßigen Konvergenzgeraden $\sigma = C$ ist diejenige Gerade $\sigma = C$ zu verstehen, daß bei jedem $\varepsilon > 0$ die Reihe (1) in der Halbebene $\sigma > C + \varepsilon$, dagegen nicht in der Halbebene $\sigma > C - \varepsilon$ gleichmäßig konvergiert Vergl. H. Bohr, Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen, Crelles Journal 1913, Bd. 143, S. 203—211.

2) H. Bohr, Über die gleichmäßige Konvergenz ... l. c. § 1.

3) Vergl. z. B. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig und Berlin, 1909, Bd. II. S. 848. Das im Texte erwähnte Schneesche Resultat ist übrigens ein Spezialfall eines allgemeineren Schneeschen Satzes, wo statt der Beschränktheit von $f(s)$ nur $f(s) = O(|t|^{\delta})$ für jedes $\delta > 0$ vorausgesetzt wird.

vergenzabszisse B, die offenbar $\geqq D$ ist, $\leqq D+1$ ist. Ich untersuche nunmehr in § 4 die Differenz $B-C$, d. h. wegen $C=D$ die Differenz $B-D$, welche nach dem obigen eine nicht negative Zahl $\leqq 1$ ist. Es bezeichne $T \geqq 0$ die untere Grenze aller positiven Zahlen β mit folgender Eigenschaft: Für jede Dirichletsche Reihe, die ein Konvergenzgebiet besitzt, ist $B-D \leqq \beta$. Mit anderen Worten, es ist T diejenige Zahl $\geqq 0$, daß stets $B-D \leqq T$ ist, während zu jedem $\delta > 0$ eine Dirichletsche Reihe (1) derart existiert, daß $B-D > T-\delta$ ist. Dann beweise ich: Es ist

$$T = \frac{1}{S},$$

wo S die obige Zahl aus der Theorie der Potenzreihen mit unendlich vielen Variabeln bezeichnet. Aus dem oben erwähnten Resultate: $S \geqq 2$ folgt hieraus speziell

$$T \leqq \frac{1}{2},$$

also: Jede Dirichletsche Reihe (1), die ein Konvergenzgebiet besitzt, und für welche die durch die Reihe definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma > \eta$ regulär und beschränkt ist, ist wenigstens für $\sigma > \eta + \frac{1}{2}$ absolut konvergent.

Ob hier die Zahl $\frac{1}{2}$ durch eine kleinere Zahl (vielleicht sogar durch die Zahl 0, was $T=0$, $S=\infty$ bedeuten würde[1])) ersetzt werden kann, weiß ich nicht. Um dies Problem zu erledigen, ist ein tieferes Eindringen in die Theorie der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln nötig, als es mir in § 3 gelungen ist.

In § 5 werde ich zwei spezielle (aber z. B. fast alle in der analytischen Primzahlentheorie vorkommenden Dirichletschen Reihen umfassende) Typen Dirichletscher Reihen studieren, welche in dem allgemeinen Typus $\sum \frac{a_n}{n^s}$ enthalten sind, nämlich diejenigen Dirichletschen Reihen I bezw. II, welche, rein formal, eine Zerlegung in Addenden bezw. in Faktoren derart zulassen, daß dadurch die einzelnen Primzahlen separiert werden:

I: $$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = a_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{p_m^l}}{(p_m^l)^s},$$

wo bei jedem n, das mindestens zwei von einander verschiedene Primzahlen enthält, $a_n = 0$ ist.

1) Nach der Vorlegung dieser Arbeit ist es Herrn Toeplitz gelungen, das für die absolute Konvergenztheorie der Dirichletschen Reihen (1) sehr wesentliche Resultat $S < \infty$ zu beweisen. Vgl. den Nachtrag am Schluß dieser Abhandlung.

II: $$f(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{p_m^l}}{(p_m^l)^s}\right),$$

wo diejenigen Koeffizienten a_n, deren Index $n > 1$ eine Primzahl oder Primzahlpotenz ist, beliebig gegeben sind, während, für $n = p_{n_1}^{\nu_1} \ldots p_{n_r}^{\nu_r}$ $(r \geqq 2)$, a_n durch die Gleichung

$$a_n = a_{p_{n_1}^{\nu_1}} \, a_{p_{n_2}^{\nu_2}} \ldots a_{p_{n_r}^{\nu_r}}$$

bestimmt ist.

Für diese beiden Typen I und II gelingt es in § 5, auf Grund eines Satzes über Potenzreihen mit unendlich vielen Variabeln, die in § 4 für jede Dirichletsche Reihe (1) bewiesene Relation $0 \leqq B - D \leqq \frac{1}{2}$ durch die genaue Relation $B = D$ zu ersetzen, und damit das absolute Konvergenzproblem zu erledigen.

Von den Untersuchungen in § 5 über spezielle Typen Dirichletscher Reihen (1) wieder zu der allgemeinen Dirichletschen Reihe (1) zurückkehrend beweise ich schließlich in § 6:

Es besitze die Dirichletsche Reihe (1) ein Konvergenzgebiet; die hier durch die Reihe definierte Funktion $f(s)$ möge für $\sigma > \eta$ regulär und beschränkt sein. Dann ist die Dirichletsche Reihe

$$\sum_p \frac{a_p}{p^s} = \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \frac{a_5}{5^s} + \cdots$$

wo p die Primzahlen durchläuft, für $\sigma > \eta$ absolut konvergent.

§ 1.

Es sei die Dirichletsche Reihe

(1) $$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für $\sigma = \sigma_0$ absolut konvergent, d. h. es sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}}$$

konvergent. Es habe $U = U(\sigma_0)$ und $V = V(\sigma_0)$ die in der Einleitung erklärte Bedeutung, d. h. es sei U die Menge aller Werte u, welche die Funktion $f(\sigma_0 + it)$ annimmt, wenn die reelle Variable t von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, und es sei V die Menge aller Werte v, welche die zu (1) gehörige Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ an-

nimmt, wenn die Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ unabhängig von einander die Kreise

$$|x_1| = \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \quad |x_2| = \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \ldots, |x_m| = \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$$

durchlaufen.

Satz I: Es ist die Menge U in der Menge V enthalten, und es liegt U in V überall dicht, d. h. zu jeder Zahl v in V und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl u in U derart, daß

$$|u - v| < \varepsilon$$

ist, also ein reelles t_0 derart, daß

$$|f(\sigma_0 + it_0) - v| < \varepsilon$$

ist.

Beweis: Daß die Menge U der Werte von

$$f(\sigma_0 + it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0 + it}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{p_{n_1}^{\sigma_0 + it}}\right)^{\nu_1} \left(\frac{1}{p_{n_2}^{\sigma_0 + it}}\right)^{\nu_2} \cdots \left(\frac{1}{p_{n_r}^{\sigma_0 + it}}\right)^{\nu_r}$$

in der Menge V aller Werte von

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n_1}^{\nu_1} x_{n_2}^{\nu_2} \ldots x_{n_r}^{\nu_r},$$

wo $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ unabhängig von einander die Kreise

$$|x_1| = \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \quad |x_2| = \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \ldots, \quad |x_m| = \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$$

durchlaufen, enthalten ist, ist unmittelbar klar.

Es sei nunmehr v eine beliebige Zahl der Menge V und $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, dann ist zu beweisen: es gibt ein reelles t_0 derart, daß

$$|f(\sigma_0 + it_0) - v| < \varepsilon$$

ist.

Nach Voraussetzung gibt es zu der gegebenen Zahl v eine reelle Zahlenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots$, derart, daß

$$v = P\left(\frac{e^{i\varphi_1}}{p_1^{\sigma_0}}, \frac{e^{i\varphi_2}}{p_2^{\sigma_0}}, \ldots, \frac{e^{i\varphi_m}}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{i\varphi_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1} \left(\frac{e^{i\varphi_{n_2}}}{p_{n_2}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_2} \cdots \left(\frac{e^{i\varphi_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r}$$

ist. Ferner ist bei jedem reellen t, wenn $\mu_m = \mu_m(t) = -t \log p_m$ gesetzt wird,

$$f(\sigma_0+it)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\sigma_0+it}}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{p_{n_1}^{\sigma_0+it}}\right)^{\nu_1}\left(\frac{1}{p_{n_2}^{\sigma_0+it}}\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{1}{p_{n_r}^{\sigma_0+it}}\right)^{\nu_r}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{e^{i\mu_{n1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1}\left(\frac{e^{i\mu_{n2}}}{p_{n_2}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{e^{i\mu_{nr}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r}.$$

Zu der gegebenen Zahl $\varepsilon>0$ bestimme ich eine ganze Zahl $N\geqq 2$ derart, daß

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}}=\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|\left(\frac{1}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1}\left(\frac{1}{p_{n_2}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{1}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r}<\frac{\varepsilon}{3}$$

ist. Dann ist

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\left(\frac{e^{i\varphi_{n1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1}\left(\frac{e^{i\varphi_{n2}}}{p_{n_2}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{e^{i\varphi_{nr}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r}\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

sowie für alle reellen t

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\left(\frac{e^{i\mu_{n1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1}\left(\frac{e^{i\mu_{n2}}}{p_{n_2}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{e^{i\mu_{nr}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Es ist also für alle reellen t

$$|f(\sigma_0+it)-v|<\left|\sum_{n=1}^{N}a_n\left(\frac{e^{i\mu_{n1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1}\left(\frac{e^{i\mu_{n2}}}{p_{n_2}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{e^{i\mu_{nr}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r}\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{N}a_n\left(\frac{e^{i\varphi_{n1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1}\left(\frac{e^{i\varphi_{n2}}}{p_{n_2}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{e^{i\varphi_{nr}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r}\right|+\frac{2\varepsilon}{3}.$$

Nachdem N festgelegt ist, bestimme ich nunmehr, was offenbar aus Stetigkeitsgründen möglich ist, ein $\varepsilon_1>0$ so (d. h. so klein), daß die Ungleichung

$$\left|\sum_{n=1}^{N}a_n\left(\frac{e^{i\mu_{n1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1}\left(\frac{e^{i\mu_{n2}}}{p_{n_2}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{e^{i\mu_{nr}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r}\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{N}a_n\left(\frac{e^{i\varphi_{n1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1}\left(\frac{e^{i\varphi_{n2}}}{p_{n_2}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{e^{i\varphi_{nr}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

erfüllt ist, wenn für alle $m=1,2,\ldots M$, wo p_M die größte Primzahl $\leqq N$ bedeutet, die Zahl μ_m auf der Kreisperipherie, d. h. modulo 2π betrachtet, von der festen Zahl φ_m um weniger als ε_1 abweicht, d. h. wenn für alle $m=1,2,\ldots M$ eine Ungleichung der Form

$$|\mu_m - \varphi_m - 2\pi g_m| < \varepsilon_1$$

in ganzen Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_M$ besteht.

Ich wende nun mein übliches arithmetisches Verfahren an, d. h. benutze den folgenden Kronecker'schen Satz über Diophantische Approximationen:

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_M$ reelle Zahlen derart, daß keine Relation der Form

$$C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \cdots + C_M\lambda_M = 0$$

in ganzen, nicht sämtlich verschwindenden Größen $C_1, C_2, \ldots C_M$ besteht; es seien ferner $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_M$ beliebige reelle Zahlen. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon' > 0$ eine reelle Zahl t_0 sowie M ganze Zahlen $g_1, g_2, \ldots g_M$ derart, daß die M Ungleichungen

$$|\lambda_m t_0 - \varkappa_m - g_m| < \varepsilon' \qquad (m = 1, 2, \ldots M)$$

sämtlich erfüllt sind.

Ich wende diesen Satz an auf die Zahlen

$$\lambda_m = -\frac{1}{2\pi}\log p_m, \qquad (m = 1, 2, \ldots, M)$$

$$\varkappa_m = \frac{\varphi_m}{2\pi}, \qquad (m = 1, 2, \ldots, M)$$

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_1}{2\pi}.$$

Die Voraussetzungen des Satzes sind offenbar erfüllt; denn wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit einer ganzen positiven Zahl in Primfaktoren besteht keine Relation der Form

$$C_1\log p_1 + C_2\log p_2 + \cdots + C_M\log p_M = 0$$

(d. h. der Form $p_1^{C_1}\, p_2^{C_2} \ldots p_M^{C_M} = 1$) in ganzen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $C_1, C_2, \ldots C_M$.

Der Kroneckersche Satz ergibt alsdann die Existenz eines reellen t_0, sowie dazu gehöriger ganzer Zahlen $g_1, g_2, \ldots g_M$ derarti daß für alle $m = 1, 2, \ldots M$ die Ungleichung

$$\left|-\frac{1}{2\pi}\log p_m . t_0 - \frac{\varphi_m}{2\pi} - g_m\right| < \frac{\varepsilon_1}{2\pi},$$

d. h. wenn ich mit 2π multipliziere und $\mu_m = \mu_m(t_0)$ statt $-t_0 \log p_m$ schreibe, die Ungleichung

$$|\mu_m - \varphi_m - 2\pi g_m| < \varepsilon_1 \qquad (m = 1, 2, \ldots M)$$

besteht. Für dieses t_0 ist alsdann

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{e^{i\mu_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1} \left(\frac{e^{i\mu_{n_2}}}{p_{n_2}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_2} \cdots \left(\frac{e^{i\mu_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r} - \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{e^{i\varphi_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1} \left(\frac{e^{i\varphi_{n_2}}}{p_{n_2}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_2} \cdots \left(\frac{e^{i\varphi_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Hieraus ergibt sich nun weiter

$$|f(\sigma_0 + it_0) - v| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Damit ist der Satz I bewiesen.

§ 2.

Es besitze die Dirichletsche Reihe (1) ein Konvergenzgebiet, und es sei B die absolute Konvergenzabszisse der Reihe (1), also $-\infty \leqq B < \infty$. Es bezeichne, für jedes $\sigma_0 > B$, $W = W(\sigma_0)$ die Menge aller Werte w, welche die Reihe (1) in unendlicher Nähe der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, und $V = V(\sigma_0)$ die Menge V des § 1, d. h. die Menge aller Werte v, welche die zu (1) gehörige Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ annimmt, wenn die Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ unabhängig von einander die Kreise

$$|x_1| = \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \quad |x_2| = \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \ldots, \quad |x_m| = \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$$

durchlaufen.

Satz II: Es ist, bei jedem festen $\sigma_0 > B$, die Menge W mit der Menge V identisch.

Beweis: Der Beweis zerfällt in zwei Teile 1. und 2.; in dem ersten Teile beweise ich: es gehört jede zur Menge W gehörige Zahl w auch der Menge V an; in dem zweiten Teil beweise ich, daß umgekehrt jede zur Menge V gehörige Zahl v auch der Menge W angehört.

1. Es sei die der Menge $W = W(\sigma_0)$ angehörige Zahl w beliebig gegeben; dann gibt es offenbar nach der Definition der Menge W eine Folge komplexer Zahlen (die nicht von einander verschieden zu sein brauchen)

$$s' = \sigma' + it', \quad s'' = \sigma'' + it'', \ldots, \quad s^{(q)} = \sigma^{(q)} + it^{(q)}, \ldots$$

derart, daß

$$f(s^{(q)}) = w \qquad (q = 1, 2, \ldots)$$

und

$$\lim_{q=\infty} \sigma^{(q)} = \sigma_0$$

ist; hierbei darf offenbar (für alle $q = 1, 2, \ldots$) $\sigma^{(q)} > k$ angenommen werden, wo k eine von q unabhängige Zahl $> B$ ist.

Es bezeichne (für alle $m = 1, 2, \ldots; q = 1, 2, \ldots$) $\mu_m^{(q)}$ diejenige reelle Zahl im Intervalle $0 \leqq x < 2\pi$, die $\equiv -t^{(q)} \log p_m \pmod{2\pi}$ ist; dann ist bei jedem $q = 1, 2, \ldots$

$$f(s^{(q)}) = f(\sigma^{(q)} + it^{(q)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{p_{n_1}^{\sigma^{(q)} + it^{(q)}}}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{1}{p_{n_r}^{\sigma^{(q)} + it^{(q)}}}\right)^{\nu_r}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{i\mu_{n_1}^{(q)}}}{p_{n_1}^{\sigma^{(q)}}}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{e^{i\mu_{n_r}^{(q)}}}{p_{n_r}^{\sigma^{(q)}}}\right)^{\nu_r}.$$

Ich betrachte nunmehr die reelle Doppelfolge

$$\begin{array}{llll} \mu_1', & \mu_2', \ldots, & \mu_m', & \ldots \\ \mu_1'', & \mu_2'', \ldots, & \mu_m'', & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_1^{(q)}, & \mu_2^{(q)}, \ldots, & \mu_m^{(q)}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Da, für alle m und q, $0 \leqq \mu_m^{(q)} < 2\pi$ ist, also die sämtlichen Elemente $\mu_m^{(q)}$ der Doppelfolge absolut genommen unterhalb einer festen Schranke liegen, gibt es nach einem bekannten Satze eine zur Doppelfolge $\mu_m^{(q)}$ gehörige Folge positiver ganzer Zahlen $q_1 < q_2 < q_3 \ldots < q_l < \ldots$ derart, daß bei jedem festen $m = 1, 2, 3, \ldots$ die Folge

$$\mu_m^{(q_1)}, \mu_m^{(q_2)}, \ldots, \mu_m^{(q_l)}, \ldots$$

einem Grenzwert φ_m zustrebt, d. h. daß

$$\lim_{l=\infty} \mu_m^{(q_l)} = \varphi_m$$

existiert.

Dann behaupte ich: es ist

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{i\varphi_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{e^{i\varphi_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r}.$$

In der Tat, wegen der Konvergenz der Reihe mit positiven Gliedern

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^k},$$

wo k die obige Konstante $> B$ bedeutet, ist die unendliche Reihe

$$F(\sigma, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{i\lambda_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma}}\right)^{\nu_1} \left(\frac{e^{i\lambda_{n_2}}}{p_{n_2}^{\sigma}}\right)^{\nu_2} \cdots \left(\frac{e^{i\lambda_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma}}\right)^{\nu_r}$$

für

$$\sigma > k, \quad -\infty < \lambda_m < \infty \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

gleichmäßig konvergent. Daher ist, wegen $\sigma^{(q)} > k \quad (q = 1, 2, \ldots)$,

$$w = \lim_{q=\infty} f(s^{(q)}) = \lim_{l=\infty} f(s^{(q_l)})$$

$$= \lim_{l=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{i\mu_{n_1}^{(q_l)}}}{p_{n_1}^{\sigma^{(q_l)}}}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{e^{i\mu_{n_r}^{(q_l)}}}{p_{n_r}^{\sigma^{(q_l)}}}\right)^{\nu_r}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{l=\infty} \left\{ a_n \left(\frac{e^{i\mu_{n_1}^{(q_l)}}}{p_{n_1}^{\sigma^{(q_l)}}}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{e^{i\mu_{n_r}^{(q_l)}}}{p_{n_r}^{\sigma^{(q_l)}}}\right)^{\nu_r} \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{i\varphi_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{e^{i\varphi_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r}.$$

Es ist somit die Existenz einer reellen Zahlenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots$ derart bewiesen, daß

$$w = P\left(\frac{e^{i\varphi_1}}{p_1^{\sigma_0}}, \frac{e^{i\varphi_2}}{p_2^{\sigma_0}}, \cdots \frac{e^{i\varphi_m}}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots\right)$$

ist, d. h. es ist w ein Element der Menge V.

2. Es sei v ein beliebiges Element der Menge V; dann ist zu beweisen: es gehört die Zahl v der Menge W an, d. h. es nimmt die Funktion $f(s)$ bei jedem $\delta > 0$ im Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ den Wert v an. Es werde angenommen, dies sei nicht der Fall; dann gäbe es eine feste Zahl $d > 0$, die ich offenbar kleiner als $\sigma_0 - B$ annehmen darf, derart, daß im Streifen $\sigma_0 - d < \sigma < \sigma_0 + d$ $f(s) \neq v$ wäre. Ich werde zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt:

Nach Voraussetzung existiert zu der gegebenen Zahl v eine reelle Zahlenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots$ derart, daß

$$P\left(\frac{e^{i\varphi_1}}{p_1^{\sigma_0}}, \frac{e^{i\varphi_2}}{p_2^{\sigma_0}}, \ldots, \frac{e^{i\varphi_m}}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{i\varphi_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{e^{i\varphi_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r} = v$$

ist. Ich betrachte alsdann die für $\sigma > B$ definierte reguläre Funktion der komplexen Variabeln $s = \sigma + it$

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{i\varphi_{n_1}}}{p_{n_1}^s}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{e^{i\varphi_{n_r}}}{p_{n_r}^s}\right)^{\nu_r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}.$$

Dann ist speziell $g(\sigma_0) = v$. Ich wähle nunmehr eine reelle Zahl σ' im Intervalle $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0 + \frac{d}{3}$ derart, daß $g(\sigma') \neq v$ ist. Eine solche Wahl ist offenbar möglich; denn sonst wäre die analytische Funktion $g(s)$ im ganzen reellen Intervalle $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0 + \frac{d}{3}$, also in der ganzen Halbebene $\sigma > B$, konstant (nämlich gleich v), was nach dem Eindeutigkeitssatze der Dirichletschen Reihen nicht der Fall ist[1]).

Ich setze nunmehr $\sigma' = \sigma_0 + \delta'$; dann ist $0 < \delta' < \frac{d}{3}$ und $g(\sigma') = z$, wo $z \neq v$ ist. Ich werde nun zunächst beweisen: es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein reelles t_0 derart, daß die beiden Ungleichungen

$$|f(\sigma_0 + it) - v| < \varepsilon \quad , \quad |f(\sigma' + it) - z| < \varepsilon$$

für $t = t_0$ gleichzeitig erfüllt sind. Um die Existenz eines solchen t_0 zu beweisen, bestimme ich zunächst eine ganze Zahl $N \geqq 2$ derart, daß

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist; wegen $\sigma' > \sigma_0$ ist hierbei auch

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma'}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es folgt dann, wenn ich die Bezeichnung $\mu_m = \mu_m(t) = -t \log p_m$ wieder einführe, daß für alle reellen t

$$|f(\sigma_0 + it) - v|$$

$$< \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{e^{i\mu_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{e^{i\mu_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r} - \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{e^{i\varphi_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{e^{i\varphi_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{\nu_r} \right| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

und

$$|f(\sigma' + it) - z|$$

---

1) Nur wenn für alle $n = 2, 3, \ldots$ $b_n = 0$, d. h. wegen $|a_n| = |b_n|$, $a_n = 0$ ist, ist $g(s)$ konstant. In diesem Falle ist aber der Satz II eo ipso richtig, da alsdann die beiden Mengen V und W nur das eine Element $v = w = a_1$ enthalten. Es darf daher beim Beweise angenommen werden, daß nicht für alle $n \geqq 2$ der Koeffizient $a_n = 0$ ist.

$$< \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{e^{i\mu_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma'}}\right)^{v_1} \cdots \left(\frac{e^{i\mu_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma'}}\right)^{v_r} - \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{e^{i\varphi_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma'}}\right)^{v_1} \cdots \left(\frac{e^{i\varphi_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma'}}\right)^{v_r} \right| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

ist. Ich bestimme nunmehr mit Hilfe des Kroneckerschen Satzes über Diophantische Approximationen ein reelles t_0 derart, daß für alle $m = 1, 2, \ldots M$, wo p_M die größte Primzahl $\leqq N$ bedeutet, die Zahl $\mu_m(t_0) = -t_0 \log p_m$, wenn man sie auf der Kreisperipherie, d. h. modulo 2π, betrachtet, um so wenig von der festen Zahl φ_m abweicht, daß die beiden Ungleichungen

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{e^{i\mu_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{v_1} \cdots \left(\frac{e^{i\mu_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{v_r} - \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{e^{i\varphi_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma_0}}\right)^{v_1} \cdots \left(\frac{e^{i\varphi_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma_0}}\right)^{v_r} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

und

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{e^{i\mu_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma'}}\right)^{v_1} \cdots \left(\frac{e^{i\mu_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma'}}\right)^{v_r} - \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{e^{i\varphi_{n_1}}}{p_{n_1}^{\sigma'}}\right)^{v_1} \cdots \left(\frac{e^{i\varphi_{n_r}}}{p_{n_r}^{\sigma'}}\right)^{v_r} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für $t = t_0$ erfüllt sind. Dann ist für dieses t_0

$$|f(\sigma_0 + it_0) - v| < \varepsilon \quad , \quad |f(\sigma' + it_0) - z| < \varepsilon,$$

und somit die obige Behauptung bewiesen.

Es folgt hieraus unmittelbar die Existenz einer Folge von reellen Zahlen $t_1, t_2, \ldots t_n, \ldots$ derart, daß gleichzeitig

$$\lim_{n=\infty} f(\sigma_0 + it_n) = v \quad , \quad \lim_{n=\infty} f(\sigma' + it_n) = z$$

ist.

Nach Annahme ist $f(s)$ im Streifen $\sigma_0 - d < \sigma < \sigma_0 + d$ von v verschieden; es bezeichne unter dieser Annahme $F(s)$ einen beliebigen, für $\sigma_0 - d < \sigma < \sigma_0 + d$ regulären Zweig der Funktion $\log(f(s) - v)$. Dann ist $\Re(F(s))$ im Streifen $\sigma_0 - d < \sigma < \sigma_0 + d$ nach oben beschränkt; denn es ist in diesem Streifen

$$\Re(F(s)) = \log|f(s) - v| < \log\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0 - d}} + |v|\right) < k_1,$$

wo die positive Größe k_1 (sowie in der Folge $k_2 > 0$, $k_3 > 0, \ldots$) von s nicht abhängt. Ferner ist, wegen

$$\lim_{n=\infty} (f(\sigma' + it_n) - v) = z - v \neq 0,$$

für alle $n = 1, 2, \ldots$

$$-\Re(F(\sigma' + it_n)) = \log \frac{1}{|f(\sigma' + it_n) - v|} < k_2.$$

Ich betrachte nunmehr das Verhalten von $F(s)$ im Kreise K_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ mit dem Mittelpunkte $s_0 = \sigma' + it_n$ und dem Radius $r = 2(\sigma' - \sigma_0) = 2\delta'$. Es ist hier für alle $n = 1, 2, \ldots$

$$\Re(F(s_0)) < k_1 \quad , \quad -\Re(F(s_0)) < k_2,$$

also

$$|\Re(F(s_0))| < k_3,$$

wo k_3 die größere der beiden Zahlen k_1 und k_2 bedeutet; ferner ist im Streifen $\sigma_0 - d < \sigma < \sigma_0 + d$, also a fortiori im Kreise $|s - s_0| \leqq r$

$$\Re(F(s)) < k_1.$$

Hieraus folgt aber unmittelbar nach einem bekannten Carathéodoryschen Satze, daß für $|s - s_0| \leqq \frac{r}{2} = \delta'$

$$|\Re(F(s))| < 3k_3 + 2k_1 = k_4$$

ist, wo k_4 von n und s nicht abhängt.

Es wäre also speziell im Punkte $s = \sigma_0 + it_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, welcher vom Punkte $s_0 = \sigma' + it_n$ genau den Abstand δ' hat,

$$-\Re(F(s)) < k_4,$$

d. h. es wäre für alle $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{|f(\sigma_0 + it_n) - v|} = e^{-\Re(F(\sigma_0 + it_n))} < e^{k_4} = k_5$$

im Gegensatz zur obigen Gleichung $\lim\limits_{n=\infty} f(\sigma_0 + it_n) = v$.

Es muß also unsere Annahme $f(s) \neq v$ für $\sigma_0 - d < \sigma < \sigma_0 + d$ falsch gewesen sein. Damit ist der Satz II bewiesen.

Ehe ich diesen Paragraph abschließe, werde ich noch, als ein Beispiel der Verwendung der in § 1 und § 2 dargestellten Resultate, das Verhalten einer speziellen Dirichletschen Reihe (1) — oder vielmehr einer speziellen Klasse Dirichletscher Reihen (1) — auf vertikalen Geraden studieren, nämlich der Dirichletschen Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha_m}{p_m^s}\right),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \ldots$ beliebige komplexe Zahlen sind derart, daß für alle $m \geqq 1$ der absolute Betrag von α_m gleich 1 ist; hierbei ist offenbar $a_1 = 1$, sowie, für $n \geqq 2$, $|a_n| = 1$ bezw. $|a_n| = 0$, je nachdem n quadratfrei bezw. nicht quadratfrei ist; es ist also die Dirichletsche Reihe für $\sigma > 1$ absolut konvergent. (Zur Orientierung bemerke ich, daß $f(s)$ bei der speziellen Wahl $\alpha_m = -1$ in die reziproke Zetafunktion

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n^s} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_m^s}\right)$$

übergeht.)

Es sei

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n_1}^{\nu_1} x_{n_2}^{\nu_2} \ldots x_{n_r}^{\nu_r} = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + \alpha_m x_m)$$

die zugehörige Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$$

Für das Studium der Wertmenge, welche die Funktion $f(s)$ auf bezw. in unendlicher Nähe von einer vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0 > 1$ annimmt, ist nach den Sätzen I bezw. II die Bestimmung der Zahlenmenge V maßgebend, wo $V = V(\sigma_0)$ die Menge aller Werte bezeichnet, welche die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ annimmt, wenn die Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ unabhängig von einander die Kreise

$$|x_1| = \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ |x_2| = \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \ldots, |x_m| = \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$$

durchlaufen.

Da aber die Zahlen

$$\xi_1 = \alpha_1 x_1, \ \xi_2 = \alpha_2 x_2, \ldots, \xi_m = \alpha_m x_m, \ldots,$$

wenn $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ unabhängig von einander die Kreise $|x_1| = \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}$, $|x_2| = \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \ldots, |x_m| = \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$ durchlaufen, offenbar selbst, ebenfalls unabhängig von einander, die Kreise

$$|\xi_1| = \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ |\xi_2| = \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \ldots, |\xi_m| = \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$$

durchlaufen, ergibt sich zunächst die interessante Tatsache, daß bei jedem $\sigma_0 > 1$ die Menge $V(\sigma_0)$ — also nach dem Satz II die Menge der Werte, welche die Funktion $f(s)$ in unendlicher Nähe der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt — von der speziellen Wahl der obigen Zahlenfolge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \ldots$ unabhängig ist, und zwar daß $V = V(\sigma_0)$ die Menge aller Werte ist, welche die Potenzreihe

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + x_m)$$

annimmt, wenn die unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$ unabhängig von einander die Kreise $|x_m| = \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}$ durchlaufen.

In diesem letzteren Produkte durchläuft der einzelne Faktor $(1 + x_m)$, unabhängig von den übrigen Faktoren, einen Kreis mit dem Mittelpunkte 1 und dem Radius $\frac{1}{p_m^{\sigma_0}}$; es ist somit die Be-

stimmung der Menge V auf ein geometrisches Problem zurückgeführt, nämlich auf die Bestimmung der Punktmenge in einer komplexen Ebene, welche durch „Multiplikation von unendlich vielen Kreisperipherien" entsteht. Über die Lösung dieser letzten geometrischen Aufgabe verweise ich auf eine vorläufige Mitteilung in den Comptes Rendus[1]).

§ 3.

Es sei $G_1, G_2, \dots G_m, \dots$ eine Folge positiver Zahlen und die Potenzreihe

$$P(x_1, x_2, \dots x_m, \dots) = c + \sum_{\alpha = 1, 2, \dots} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, 2, \dots \\ \alpha \leqq \beta}} c_{\alpha, \beta} x_\alpha x_\beta + \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots \\ \alpha \leqq \beta \leqq \gamma}} c_{\alpha, \beta, \gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma + \cdots$$

im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, |x_2| \leqq G_2, \dots |x_m| \leqq G_m, \dots$ beschränkt, d. h. es sei bei jedem $m \geqq 1$ der m^{te} Abschnitt

$$P_m(x_1, x_2, \dots x_m) = c + \sum_{\alpha = 1, 2, \dots m} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, 2, \dots m \\ \alpha \leqq \beta}} c_{\alpha, \beta} x_\alpha x_\beta + \cdots$$

für $|x_1| \leqq G_1, |x_2| \leqq G_2, \dots |x_m| \leqq G_m$ absolut konvergent, sowie bei passender Wahl einer von m unabhängigen Zahl $K > 0$ bei jedem m im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, \dots |x_m| \leqq G_m$

$$|P_m(x_1, x_2, \dots x_m)| < K$$ [2]).

Ich werde alsdann in diesem Paragraphen untersuchen, was sich hieraus über die absolute Konvergenz der Potenzreihe $P(x_1, x_2, \dots x_m, \dots)$ folgern läßt.

Die sich zunächst darbietende Frage ist offenbar, inwiefern die Beschränktheit von $P(x_1, x_2, \dots x_m, \dots)$ im Gebiete $|x_m| \leqq G_m$ $(m = 1, 2, \dots)$ die absolute Konvergenz von $P(x_1, x_2, \dots x_m, \dots)$

1) H. Bohr, Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le demi-plan $\sigma > 1$, C. R. Paris t. 154, 1912, p. 1078.

2) Ich bemerke sogleich zur Orientierung, daß die Beschränktheit bezw. Nichtbeschränktheit einer Potenzreihe mit unendlich vielen Variabeln eine Eigenschaft ist, welche von der Reihenfolge der Variabeln unabhängig ist, d. h. wenn $P(x_1, x_2, \dots)$ im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, |x_2| \leqq G_2, \dots$ beschränkt ist, und $r_1, r_2, \dots$ eine Folge ist, welche durch Umordnung der Folge $1, 2, \dots$ entsteht, so ist die mit $P(x_1, x_2, \dots)$ formal identische Potenzreihe $Q(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots)$ im Gebiete $|x_{r_1}| \leqq G_{r_1}, |x_{r_2}| \leqq G_{r_2}, \dots$ beschränkt. Die Richtigkeit hiervon folgt unmittelbar daraus, daß es zu jedem m ein $M \geqq m$ so gibt, daß der m^{te} Abschnitt $Q_m(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots x_{r_m})$ aus dem Abschnitte $P_M(x_1, x_2, \dots x_M)$ entsteht, wenn in diesem letzten Ausdrucke gewisse der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_M$ gleich 0 gesetzt werden.

in demselben Gebiete $|x_m| \leq G_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, d. h. die Konvergenz von

$$|c| + \sum_\alpha |c_\alpha| G_\alpha + \sum_{\alpha, \beta} |c_{\alpha, \beta}| G_\alpha G_\beta + \cdots$$

mitführt. Ich werde durch ein Beispiel zeigen, daß dies nicht der Fall ist[1]). Zu diesem Zwecke verfahre ich folgendermaßen: Es existiert bekanntlich eine für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) Es ist $f(z)$ für $|z| < 1$ beschränkt.

2) Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent, also für zu 1 wachsendes $|z|$

$$\lim_{|z|=1} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n z^n| = \infty.$$

Hieraus folgt unmittelbar die Existenz einer Funktionenfolge

$$f_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} z^n \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) Es ist, bei jedem $m \geqq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} z^n$ für $|z| \leqq 1$ absolut konvergent.

2) Es ist, bei jedem $m \geqq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(m)}| > 1$$

sowie bei jedem $m \geqq 1$ und alle $|z| \leqq 1$

$$|f_m(z)| < \frac{1}{2^m}.$$

Ich betrachte alsdann die Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_m(x_m) + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a'_n x_1^n + \sum_{n=1}^{\infty} a''_n x_2^n + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} x_m^n + \cdots.$$

1) Die umgekehrte Frage ist natürlich bejahend zu beantworten, d. h. wenn $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, \ldots |x_m| \leqq G_m, \ldots$ absolut konvergiert, ist sie a fortiori in demselben Gebiete beschränkt.

Es ist diese Potenzreihe offenbar für $|x_1| \leqq 1, \ldots |x_m| \leqq 1, \ldots$ beschränkt; denn es ist bei jedem $m \geqq 1$ der m^{te} Abschnitt

$$P_m(x_1, x_2, \ldots x_m) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_m(x_m)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a'_n x_1^n + \sum_{n=1}^{\infty} a''_n x_2^n + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} x_m^n$$

für $|x_1| \leqq 1, \ldots |x_m| \leqq 1$ absolut konvergent, sowie bei jedem $m \geqq 1$ im Gebiete $|x_1| \leqq 1, \ldots |x_m| \leqq 1$

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)| = |f_1(x_1) + \cdots + f_m(x_m)|$$
$$\leqq |f_1(x_1)| + \cdots + |f_m(x_m)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m} < 1.$$

Dagegen ist, wegen der bei jedem $m \geqq 1$ gültigen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(m)}| > 1,$$

die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ nicht im Gebiete

$$|x_1| \leqq 1, \ldots |x_m| \leqq 1, \ldots$$

absolut konvergent, d. h. es ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(m)}|$$

divergent[1]).

---

1) Es sei die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ für

$$|x_1| \leqq G_1, \ |x_2| \leqq G_2, \ |x_3| \leqq G_3, \ldots$$

absolut konvergent, wo $G_1, G_2, G_3, \ldots$ positive Zahlen sind; dann setzt Herr Hilbert in seiner oben zitierten Abhandlung S. 67 durch Definition fest, „daß die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ eine analytische Funktion F der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots$ in der durch $|x_1| \leqq G_1$, $|x_2| \leqq G_2$, $|x_3| \leqq G_3, \ldots$ definierten Umgebung der Stelle $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0, \ldots$ darstellt". Herr Hilbert sagt danach ohne Angabe seines Beweises: „Es gilt der Satz, daß jeder in einer Umgebung beschränkte Ausdruck $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ daselbst eine analytische Funktion der unendlichvielen Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots$ darstellt". Wie es aus dem obigen Texte hervorgeht, kann dies nicht bedeuten: wenn $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete $|x_m| \leqq G_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ beschränkt ist, so ist sie in diesem selben Gebiete $|x_m| \leqq G_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ absolut konvergent; es darf wohl vielmehr heißen: wenn eine positive Zahlenfolge $G_1, G_2, \ldots G_m, \ldots$ so existiert, daß $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete $|x_m| \leqq G_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ beschränkt ist, so gibt es eine positive Zahlenfolge $H_1, H_2, \ldots H_m, \ldots$ derart, daß $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete $|x_m| \leqq H_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ absolut konvergiert. Vergl. hierzu den folgenden Satz des Textes.

Ehe ich zu der tieferen Untersuchung übergehe, sei zunächst zur Orientierung der folgende sehr leicht beweisbare Satz vorausgeschickt.

Es sei $G_1, G_2, \ldots G_m, \ldots$ eine positive Zahlenfolge und die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete

$$|x_1| \leqq G_1,\ |x_2| \leqq G_2, \ldots\ |x_m| \leqq G_m, \ldots$$

beschränkt. Es sei ferner $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen derart, daß, bei jedem m, $0 < \varepsilon_m < 1$ ist und $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m$ konvergiert. Dann ist $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete

$$|x_1| \leqq \varepsilon_1 G_1,\ |x_2| \leqq \varepsilon_2 G_2, \ldots,\ |x_m| \leqq \varepsilon_m G_m, \ldots$$

absolut konvergent, d. h. dann ist

$$|c| + \sum_{\alpha} |c_\alpha| \varepsilon_\alpha G_\alpha + \sum_{\alpha, \beta} |c_{\alpha, \beta}| \varepsilon_\alpha G_\alpha \varepsilon_\beta G_\beta + \cdots$$

konvergent.

Beweis: Es darf offenbar beim Beweise $G_m = 1$ für alle $m = 1, 2, \ldots$ angenommen werden; sonst ist nur die Transformation

$$x_1 = G_1 x_1',\ x_2 = G_2 x_2', \ldots,\ x_m = G_m x_m', \ldots$$

anzuwenden. Nach Voraussetzung ist alsdann bei jedem $m \geqq 1$ der m^{te} Abschnitt $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ für $|x_1| \leqq 1, \ldots |x_m| \leqq 1$ absolut konvergent, und in demselben Gebiete $|x_1| \leqq 1, \ldots |x_m| \leqq 1$

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)| < K,$$

wo K von m nicht abhängt. Hieraus folgt unmittelbar, bei festem m, durch eine Cauchysche Abschätzung, daß die sämtlichen Koeffizienten der Potenzreihe $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ absolut genommen $< K$ sind. Dies gilt bei jedem $m \geqq 1$, also sind die sämtlichen Koeffizienten der Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ absolut genommen $< K$; denn jedes Glied der Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ enthält nur endlich viele der Größen $x_1, x_2, \ldots$, sodaß jeder Koeffizient der Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ bei hinreichend großen m Koeffizient des m^{ten} Abschnittes $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ ist. Hieraus folgt aber unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung; denn es ergibt sich

$$|c| + \sum |c_\alpha| \varepsilon_\alpha + \sum |c_{\alpha, \beta}| \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \cdots < K(1 + \sum \varepsilon_\alpha + \sum \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \cdots)$$
$$= K \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \varepsilon_m},$$

wo das Produkt auf der rechten Seite konvergiert; da ja nach Voraussetzung $0 < \varepsilon_m < 1$ ist und $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m$ konvergiert.

Wir gelangen nunmehr zu dem tieferliegenden

Satz III: Es sei $G_1, G_2, \ldots G_m, \ldots$ eine positive Zahlenfolge und die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete

$$|x_1| \leqq G_1, \ |x_2| \leqq G_2, \ldots, |x_m| \leqq G_m, \ldots$$

beschränkt; es sei ferner $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen derart, daß, bei jedem $m \geqq 1$, $0 < \varepsilon_m < 1$ ist und $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2$ konvergiert. Dann ist $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete

$$|x_1| \leqq \varepsilon_1 G_1, \ |x_2| \leqq \varepsilon_2 G_2, \ldots, |x_m| \leqq \varepsilon_m G_m, \ldots$$

absolut konvergent.

Vorbemerkung: Dies enthält natürlich den früheren Satz; denn wenn die Reihe mit positiven Gliedern $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m$ konvergiert, ist a fortiori $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2$ konvergent.

Beweis: Es darf wie beim obigen Beweise, bei jedem $m \geqq 1$, $G_m = 1$ angenommen werden. Es ist also bei jedem $m \geqq 1$ die Potenzreihe $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ im Gebiete $|x_1| \leqq 1, \ldots |x_m| \leqq 1$ absolut konvergent und in demselben Gebiete

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)| < K,$$

wo K von m nicht abhängt. Hieraus folgt, bei festem m, durch eine übliche Schlußweise

$$K^2 > \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} |P_m(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots e^{i\theta_m})|^2 d\theta_1 \, d\theta_2 \ldots d\theta_m$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \Big\{ c + \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots m} c_\alpha e^{i\theta_\alpha} + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots m \\ \alpha \leqq \beta}} c_{\alpha,\beta} e^{i\theta_\alpha} e^{i\theta_\beta} + \cdots \Big\}$$

$$\cdot \Big\{ \bar{c} + \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots m} \bar{c}_\alpha e^{-i\theta_\alpha} + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots m \\ \alpha \leqq \beta}} \bar{c}_{\alpha,\beta} e^{-i\theta_\alpha} e^{-i\theta_\beta} + \cdots \Big\} d\theta_1 \, d\theta_2 \ldots d\theta_m$$

$$= |c|^2 + \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots m} |c_\alpha|^2 + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots m \\ \alpha \leqq \beta}} |c_{\alpha,\beta}|^2 + \cdots$$

Dies gilt bei jedem $m \geqq 1$. Folglich ist

$$|c|^2 + \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots} |c_\alpha|^2 + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \\ \alpha \leqq \beta}} |c_{\alpha, \beta}|^2 + \cdots \leqq K^2.$$

Ferner ist nach den Voraussetzungen über die Zahlenfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m, \ldots$

$$1 + \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots} \varepsilon_\alpha^2 + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \\ \alpha \leqq \beta}} \varepsilon_\alpha^2 \varepsilon_\beta^2 + \cdots = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \varepsilon_m^2}$$

konvergent, und etwa gleich K_1. Wegen der für $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ giltigen Ungleichung

$$uv \leqq \frac{u^2 + v^2}{2}$$

folgt alsdann durch gliedweise Addition der beiden letzten Reihen, daß

$$|c| + \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots} |c_\alpha| \varepsilon_\alpha + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \\ \alpha \leqq \beta}} |c_{\alpha, \beta}| \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \cdots \leqq \frac{K^2 + K_1}{2}$$

ist [1]), d. h. konvergiert, w. z. b. w.

Es sei wie in der Einleitung $S \leqq \infty$ die obere Grenze aller positiven Zahlen α, für welche der Satz III richtig bleibt, wenn die Voraussetzung „$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2$ konvergent" durch die Voraussetzung „$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^\alpha$ konvergent" ersetzt wird. Nach dem Satze III ist $S \geqq 2$. Die Erledigung des an sich interessanten Problems, die Zahl S, über die ich nur weiß, daß sie zwischen 2 und ∞ (beide incl.) liegt, genau zu bestimmen, würde, wie es aus den Untersuchungen des § 4 hervorgehen wird, von wesentlicher Bedeutung für die Konvergenztheorie der Dirichletschen Reihen sein.

Ich gehe nunmehr zur Betrachtung zweier spezieller einfacher Typen von Potenzreihen mit unendlich vielen Variabeln über, für welche es gelingen wird, ein viel weitergehendes Resultat als das des Satzes III zu erreichen.

---

1) Mit Hülfe der Schwarzschen Ungleichung könnte man natürlich das genauere Resultat erschließen, daß

$$|c| + \sum |c_\alpha| \varepsilon_\alpha + \sum |c_{\alpha, \beta}| \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \cdots \leqq K \sqrt{K_1}$$

ist, was aber für unseren Zweck unnötig ist.

Satz IVa: Es sei $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ eine Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$ von dem speziellen Typus

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = c + \sum_{l=1}^{\infty} d_{1,l}\, x_1^l + \sum_{l=1}^{\infty} d_{2,l}\, x_2^l + \cdots + \sum_{l=1}^{\infty} d_{m,l}\, x_m^l + \cdots,$$

wo also kein Glied zwei verschiedene der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$ enthält. Sie möge im Gebiete

$$|x_1| \leqq G_1,\ |x_2| \leqq G_2, \ldots |x_m| \leqq G_m, \ldots,$$

wo $G_1, G_2, \ldots G_m, \ldots$ positive Zahlen sind, beschränkt sein. Es sei ferner $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m, \ldots$ eine positive Zahlenfolge derart, daß, bei jedem $m \geqq 1$, $0 < \varepsilon_m < 1$ ist und $\limsup_{m=\infty} \varepsilon_m < 1$ ist. Dann ist $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete

$$|x_1| \leqq \varepsilon_1 G_1,\ |x_2| \leqq \varepsilon_2 G_2, \ldots |x_m| \leqq \varepsilon_m G_m, \ldots$$

absolut konvergent.

Beweis: Es existiert offenbar auf Grund der Voraussetzungen eine Zahl $0 < \theta < 1$ derart, daß, bei jedem $m \geqq 1$, $0 < \varepsilon_m < \theta$ ist. Dann ist natürlich der Satz bewiesen, wenn es gelingt die absolute Konvergenz von $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete

$$|x_1| \leqq \theta G_1,\ |x_2| \leqq \theta G_2, \ldots |x_m| \leqq \theta G_m, \ldots$$

nachzuweisen. Es darf offenbar, für alle $m \geqq 1$, $G_m = 1$ angenommen werden. Aus der somit vorausgesetzten Beschränktheit von $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete $|x_1| \leqq 1, |x_2| \leqq 1, \ldots |x_m| \leqq 1, \ldots$ folgt, daß bei jedem $m \geqq 1$

$$\sum_{l=1}^{\infty} d_{m,l}\, x_m$$

für $|x_m| \leqq 1$ absolut konvergiert, sowie daß für $|x_1| \leqq 1, \ldots |x_m| \leqq 1$

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)| = |c + \sum_{l=1}^{\infty} d_{1,l}\, x_1^l + \cdots + \sum_{l=1}^{\infty} d_{m,l}\, x_m^l| < K$$

ist, wo K von m nicht abhängt. Es sei in $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$

$$x_1 = e^{i\varphi_1} t,\ x_2 = e^{i\varphi_2} t, \ldots x_m = e^{i\varphi_m} t,$$

gesetzt, wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ reelle Zahlen sind, über die ich späterhin noch verfügen werde, während t eine neue komplexe Variable bedeutet. Dann geht $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ in eine für $|t| \leqq 1$ absolut konvergente Potenzreihe

$$F(t) = c + t \sum_{q=1}^{m} d_{q,1}\, e^{i\varphi_q} + t^2 \sum_{q=1}^{m} d_{q,2}\, e^{2i\varphi_q} + \cdots + t^l \sum_{q=1}^{m} d_{q,l}\, e^{li\varphi_q} + \cdots$$

über. Hier ist offenbar für $|t| \leqq 1$

$$|F(t)| < K,$$

also nach einer Cauchyschen Abschätzung bei jedem $l \geqq 1$

$$\left| \sum_{q=1}^{m} d_{q,l}\, e^{li\varphi_q} \right| < K.$$

Es werden nun bei festem $l \geqq 1$ die m reellen Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ so gewählt, daß

$$\sum_{q=1}^{m} d_{q,l}\, e^{li\varphi_q} = \sum_{q=1}^{m} |d_{q,l}|$$

ist, was offenbar möglich ist. Es ergibt sich somit bei jedem $m \geqq 1$ und jedem $l \geqq 1$ die Abschätzung

$$\sum_{q=1}^{m} |d_{q,l}| < K,$$

d. h. es ist bei jedem $l \geqq 1$

$$\sum_{q=1}^{\infty} |d_{q,l}|$$

konvergent und $\leqq K$. Hieraus folgt aber unmittelbar, daß

$$|c| + \sum_{l=1}^{\infty} |d_{1,l}|\, \theta^l + \sum_{l=1}^{\infty} |d_{2,l}|\, \theta^l + \cdots + \sum_{l=1}^{\infty} |d_{m,l}|\, \theta^l + \cdots$$

$$= |c| + \sum_{l=1}^{\infty} \theta^l \sum_{q=1}^{\infty} |d_{q,l}| \leqq |c| + K \sum_{l=1}^{\infty} \theta^l = |c| + \frac{K\theta}{1-\theta}$$

ist, d. h. die behauptete Konvergenz von $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete $|x_1| \leqq \theta, \ldots, |x_m| \leqq \theta, \ldots$

Satz IVb: Es sei $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ eine Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$ von dem speziellen Typus

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} d_{m,l}\, x_m^l\right).$$

Sie möge im Gebiete

$$|x_1| \leqq G_1,\ |x_2| \leqq G_2, \ldots |x_m| \leqq G_m, \ldots,$$

wo $G_1, G_2, \ldots G_m, \ldots$ positive Zahlen sind, beschränkt

sein. Es sei ferner $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m, \ldots$ eine positive Zahlenfolge derart, daß, bei jedem $m \geqq 1$, $0 < \varepsilon_m < 1$ ist und $\limsup\limits_{m=\infty} \varepsilon_m < 1$ ist. Dann ist $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete

$$|x_1| \leqq \varepsilon_1 G_1, \; |x_2| \leqq \varepsilon_2 G_2, \ldots \; |x_m| \leqq \varepsilon_m G_m, \ldots$$

absolut konvergent.

Dem Beweis dieses Satzes wird der folgende sehr leicht beweisbare Hilfssatz vorausgeschickt.

Es sei

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} d_l x^l$$

für $|x| \leqq 1$ absolut konvergent, und es sei R das Maximum von $\Re(f(x))$ für $|x| \leqq 1$. Es sei $0 < \theta < 1$. Dann gibt es eine nur von θ abhängige Zahl $k = k(\theta)$ derart, daß für $|x| \leqq \theta$

$$\sum_{l=1}^{\infty} |d_l x^l| \leqq kR$$

ist.

Die Richtigkeit dieses Hilfssatzes ist folgendermaßen einzusehen: Nach der bekannten Carathéodoryschen Ungleichung, auf die im Punkte 0 verschwindende Funktion $f(x)$ und die Kreise mit dem Mittelpunkte 0 und den Radien $r = 1$, $\varrho = \frac{1+\theta}{2}$ angewendet, ist für $|x| \leqq \frac{1+\theta}{2}$

$$|f(x)| \leqq 2R \frac{\varrho}{r-\varrho} = 2R \frac{1+\theta}{1-\theta},$$

also nach einer Cauchyschen Abschätzung

$$|d_l| \leqq 2R \frac{1+\theta}{1-\theta} \left(\frac{1+\theta}{2}\right)^{-l}, \qquad (l = 1, 2, \ldots)$$

d. h. es ist für $|x| \leqq \theta$

$$\sum_{l=1}^{\infty} |d_l x^l| \leqq \frac{2R(1+\theta)}{1-\theta} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{2\theta}{1+\theta}\right)^l = \frac{4\theta(1+\theta)}{(1-\theta)^2} \cdot R = kR,$$

w. z. b. w.

Beweis des Satzes IVb: Es darf beim Beweise, für alle $m \geqq 1$, $G_m = 1$ angenommen werden. Aus der vorausgesetzten Beschränktheit von $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete $|x_1| \leqq 1, \ldots |x_m| \leqq 1, \ldots$ folgt offenbar, daß bei jedem $m \geqq 1$

$$\sum_{l=1}^{\infty} d_{m,l}\, x_m^l$$

für $|x_m| \leqq 1$ absolut konvergiert, sowie daß für $|x_1| \leqq 1, \ldots |x_m| \leqq 1$

$$\left| \prod_{q=1}^{m} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} d_{q,l}\, x_q^l\right)\right| < K$$

ist, wo K von m nicht abhängt. Es bezeichne, bei jedem $q = 1, 2, \ldots$, $R_q \geqq 0$ das Maximum von

$$\Re\left(\sum_{l=1}^{\infty} d_{q,l}\, x_q^l\right)$$

für $|x_q| \leqq 1$. Dann ist a fortiori

$$\prod_{q=1}^{m} (1 + R_q) < K.$$

Dies gilt bei jedem $m \geqq 1$; es ist also

$$\prod_{q=1}^{\infty} (1 + R_q)$$

konvergent und zwar $\leqq K$.

Nun ist aber nach dem obigen Hilfssatze für $|x_q| \leqq \theta$, wo die feste Zahl θ so gewählt ist, daß, bei jedem $m \geqq 1$, $0 < \varepsilon_m < \theta < 1$ ist,

$$\sum_{l=1}^{\infty} |d_{q,l}\, x_q^l| \leqq k R_q,$$

wo $k = k(\theta)$ von q nicht abhängt.

Aus der Konvergenz von

$$\prod_{q=1}^{\infty} (1 + R_q),$$

d. h. der Konvergenz von

$$\sum_{q=1}^{\infty} R_q$$

folgt nunmehr die Konvergenz von

$$\sum_{q=1}^{\infty} k R_q$$

d. h. die Konvergenz von

$$\prod_{q=1}^{\infty} (1 + k R_q).$$

Wegen der bei jedem $q \geqq 1$ giltigen Ungleichung

$$\sum_{l=1}^{\infty} |d_{q,l}|\, \theta^l \leqq k\, R_q$$

ist also a fortiori

$$\prod_{q=1}^{\infty}\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}|d_{q,l}|\,\theta^l\right)$$

konvergent, d. h. es ist die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete $|x_1| \leqq \theta, \ldots |x_m| \leqq \theta, \ldots$ absolut konvergent. Damit ist der Satz IVb bewiesen.

Es werde ferner noch der folgende etwas andersartige Satz über allgemeine Potenzreihen mit unendlich vielen Variabeln bewiesen.

Satz V: Es sei $G_1, G_2, \ldots G_m, \ldots$ eine positive Zahlenfolge und die Potenzreihe

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = c + \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \\ \alpha \leqq \beta}} c_{\alpha,\beta}\, x_\alpha x_\beta + \cdots$$

im Gebiete $|x_1| \leqq G_1$, $|x_2| \leqq G_2, \ldots, |x_m| \leqq G_m, \ldots$ beschränkt. Dann ist

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} |c_\alpha|\, G_\alpha$$

konvergent.

Beweis: Es darf, bei jedem $m \geqq 1$, $G_m = 1$ angenommen werden; dann ist bei jedem m der m^{te} Abschnitt

$$P_m(x_1, x_2, \ldots x_m) = c + \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots m} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots m \\ \alpha \leqq \beta}} c_{\alpha,\beta}\, x_\alpha x_\beta + \cdots$$

im Gebiete $|x_1| \leqq 1, \ldots |x_m| \leqq 1$ absolut konvergent, und es ist in demselben Gebiete

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)| < K,$$

wo K von m nicht abhängt. Es sei $c_\alpha = |c_\alpha|\, e^{i\theta_\alpha}$ und, bei festem m, in dem m^{ten} Abschnitt $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$

$$x_1 = e^{-i\theta_1} t,\ x_2 = e^{-i\theta_2} t,\ \ldots\ x_m = e^{-i\theta_m} t$$

gesetzt, wo t eine neue komplexe Variable ist. Dann geht $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ in eine für $|t| \leqq 1$ absolut konvergente Potenzreihe

$$F(t) = c + t \sum_{\alpha = 1, \ldots m} c_\alpha e^{-i\theta_\alpha} + t^2 \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, \ldots m \\ \alpha \leqq \beta}} c_{\alpha,\beta}\, e^{-i\theta_\alpha} e^{-i\theta_\beta} + \cdots$$

über. Hierbei ist, für $|t| \leqq 1$,

$$|F(t)| < K,$$

also nach einer Cauchyschen Abschätzung

$$\sum_{\alpha=1,\dots m} c_\alpha e^{-i\theta_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{m} |c_\alpha| < K.$$

Dies gilt bei jedem $m \geqq 1$; also ist die unendliche Reihe

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} |c_\alpha|$$

konvergent, w. z. b. w.

Es werde schließlich der folgende Satz bewiesen:

Satz VI: Es möge die Zahlenfolge

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_m, \dots \qquad (0 < \varepsilon_m < 1)$$

die folgende Eigenschaft besitzen: „Jede Potenzreihe $P(x_1, x_2, \dots x_m, \dots)$, welche für

$$|x_1| < 1, |x_2| < 1, \dots |x_m| < 1, \dots$$

beschränkt ist[1]), ist für $x_1 = \varepsilon_1, x_2 = \varepsilon_2, \dots x_m = \varepsilon_m, \dots$ absolut konvergent". Es sei ferner

$$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots \varepsilon_m', \dots \qquad (0 < \varepsilon_m' < 1)$$

eine Zahlenfolge derart, daß für alle ganzzahligen $m \geqq 1$, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl

$$m_1, m_2, \dots m_r,$$

$\varepsilon_m' \leqq \varepsilon_m$ ist. Dann hat die Zahlenfolge $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots \varepsilon_m', \dots$ dieselbe Eigenschaft wie die Zahlenfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_m, \dots$, d. h. jede für $|x_1| < 1, \dots |x_m| < 1, \dots$ beschränkte Potenzreihe $P(x_1, x_2, \dots x_m, \dots)$ ist für

$$x_1 = \varepsilon_1', x_2 = \varepsilon_2', \dots x_m = \varepsilon_m', \dots$$

absolut konvergent.

Vorbemerkung: Es sei $E_1, E_2, \dots E_m, \dots (0 < E_m < 1)$ eine derartige Zahlenfolge, daß eine für

---

1) Ich schreibe mit Absicht $|x_m| < 1$ und nicht $|x_m| \leqq 1$. Daß $P(x_1, x_2, \dots x_m, \dots)$ für $|x_1| < G_1, |x_2| < G_2, \dots$, wo $G_1, G_2, \dots$ positive Zahlen sind, beschränkt ist, soll heißen: Für jedes $m \geqq 1$ ist der m^{te} Abschnitt $P_m(x_1, x_2, \dots x_m)$ für $|x_1| < G_1, \dots |x_m| < G_m$ absolut konvergent und dem Betrage nach $< K$, wo K von m nicht abhängt. Auch hier ist natürlich die Beschränktheit einer Potenzreihe $P(x_1, x_2, \dots)$ eine Eigenschaft, die einer Umordnung der Reihenfolge der Variabeln $x_1, x_2, \dots$ gegenüber invariant ist.

$$|x_1| < 1, \ |x_2| < 1, \ \ldots \ |x_m| < 1, \ \ldots$$

beschränkte Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ existiert, die für $x_1 = \varepsilon_1$, $x_2 = \varepsilon_2$, $\ldots$ $x_m = \varepsilon_m$, $\ldots$ nicht absolut konvergiert. Es sei ferner ε_1', ε_2', $\ldots$ ε_m', $\ldots$ $(0 < \varepsilon_m' < 1)$ eine Zahlenfolge derart, daß für alle $m \geqq 1$, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl m_1, m_2, $\ldots$ m_r, $\varepsilon_m' \geqq \varepsilon_m$ ist. Dann folgt offenbar aus dem Satze VI die Existenz einer für $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, $\ldots$ $|x_m| < 1$, $\ldots$ beschränkten Potenzreihe $Q(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$, welche im Punkte $x_1 = \varepsilon_1'$, $x_2 = \varepsilon_2'$, $\ldots$ $x_m = \varepsilon_m'$, $\ldots$ nicht absolut konvergiert. Dies werden wir später verwenden.

Beweis: Es darf offenbar beim Beweise $r = 1$, $m_1 = 1$ und $\varepsilon_m' = \varepsilon_m$ für alle $m \geqq 2$ angenommen werden. Es sei

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$$
$$= P^{(0)}(x_2, x_3, \ldots) + x_1 P^{(1)}(x_2, x_3, \ldots) + \cdots + x_1^n P^{(n)}(x_2, x_3, \ldots) + \cdots$$

eine beliebige für $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, $\ldots$ $|x_m| < 1$, $\ldots$ beschränkte Potenzreihe, welche formal nach Potenzen von x_1 geordnet ist, und es möge ferner angenommen werden, was man durch Division mit einer passend wählbaren Konstanten erreichen kann, daß für alle $m \geqq 1$ und $|x_1| < 1$, $\ldots$ $|x_m| < 1$ der m^{te} Abschnitt $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ absolut genommen $\leqq 1$ ist. Es ist hierbei $P^{(n)}(x_2, x_3, \ldots)$ eine Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln x_2, x_3, $\ldots$ Es bezeichne s_n die Summe der absoluten Beträge der Glieder von $P^{(n)}(x_2, x_3, \ldots)$ im Punkte $x_2 = \varepsilon_2$, $x_3 = \varepsilon_3$, $\ldots$ $x_m = \varepsilon_m$, $\ldots$ Dann behaupte ich: es ist für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$|s_n| < K,$$

wo K von n nicht abhängt; daraus folgt natürlich die Richtigkeit des Satzes, nämlich daß $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ für

$$x_1 = \varepsilon_1', \ x_2 = \varepsilon_2' = \varepsilon_2, \ \ldots \ x_m = \varepsilon_m' = \varepsilon_m, \ \ldots$$

absolut konvergiert; denn es ist ja alsdann der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$F(x_1) = s_0 + s_1 x_1 + \cdots + s_n x_1^n + \cdots$$

mindestens gleich 1.

Aus der Identität

$$P_{m+1}(x_1, x_2, \ldots x_{m+1})$$
$$= P_m^{(0)}(x_2, x_3, \ldots x_{m+1}) + \cdots + x_1^n P_m^{(n)}(x_2, x_3, \ldots x_{m+1}) + \cdots,$$

wo $P_m^{(n)}(x_2, x_3, \ldots x_{m+1})$ den m^{ten} Abschnitt von $P^{(n)}(x_2, x_3, \ldots)$ bezeichnet, folgt zunächst, daß bei jedem $n \geqq 0$, $m \geqq 1$ der m^{te} Abschnitt von $P^{(n)}(x_2, x_3, \ldots)$ für $|x_2| < 1$, $|x_3| < 1$, $\ldots$ $|x_{m+1}| < 1$

absolut konvergiert, sowie, nach einer Cauchyschen Abschätzung, daß in demselben Gebiete

$$|P_m^{(m)}(x_2, x_3, \dots x_{m+1})| \leqq 1$$

ist. Die obige Behauptung: $|s_n| < K$ ist daher a fortiori bewiesen, wenn ich nachgewiesen habe: Es existiert eine nur von der Zahlenfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_m, \dots$ abhängige Konstante $K > 0$ derart, daß sogar für jede Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $x_2, x_3, \dots$, welche im Gebiete $|x_2| < 1$, $|x_3| < 1, \dots$ beschränkt ist und zwar so, daß bei jedem $m \geqq 1$ der m^{te} Abschnitt im Gebiete $|x_2| < 1, \dots |x_{m+1}| < 1$ absolut genommen $\leqq 1$ ist, die Summe der absoluten Beträge der Glieder im Punkte

$$x_2 = \varepsilon_2,\ x_3 = \varepsilon_3,\ \dots x_m = \varepsilon_m,\ \dots$$

genommen (in welchem Punkte die Potenzreihe offenbar, nach den Voraussetzungen des Satzes VI, absolut konvergiert) $< K$ ist. In der Tat, wenn eine solche Konstante $K = K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ nicht existierte, so gäbe es eine unendliche Folge von Potenzreihen der unendlich vielen Variabeln $x_2, x_3, \dots$

$$Q^{(0)}(x_2, x_3, \dots),\ Q^{(1)}(x_2, x_3, \dots),\ \dots,\ Q^{(n)}(x_2, x_3, \dots),\ \dots$$

derart, daß bei jedem $n \geqq 0$ und $m \geqq 1$ der m^{te} Abschnitt von $Q^{(n)}(x_2 x_3, \dots)$ für $|x_2| < 1, \dots |x_{m+1}| < 1$ absolut konvergierte und dem Betrage nach $\leqq 1$ wäre, während andererseits die Summe der absoluten Beträge der Glieder von $Q^{(n)}(x_2, x_3, \dots)$ im Punkte $x_2 = \varepsilon_2$, $x_3 = \varepsilon_3, \dots x_m = \varepsilon_m, \dots$ genommen $> \frac{2^{n+1}}{\varepsilon_1^n}$ wäre. Ich betrachte alsdann die Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, x_3, \dots$

$$Q(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{2} Q^{(0)}(x_2, x_3, \dots) + \frac{x_1}{4} Q^{(1)}(x_2, x_3, \dots)$$
$$+ \dots + \frac{x_1^n}{2^{n+1}} Q^{(n)}(x_2, x_3, \dots) + \cdots.$$

Es ist hierbei $Q(x_1, x_2, x_3, \dots)$ für $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, $|x_3| < 1, \dots$ beschränkt, denn es sind erstens, wie aus einer Cauchyschen Abschätzung unmittelbar folgt, bei jedem $n \geqq 0$ die sämtlichen Koeffizienten von $Q^{(n)}(x_2, x_3, \dots)$ also a fortiori die sämtlichen Koeffizienten von $Q(x_1, x_2, x_3, \dots)$ absolut genommen $\leqq 1$ und somit der m^{te} Abschnitt $Q_m(x_1, x_2, \dots x_m)$ für $|x_1| < 1, \dots |x_m| < 1$ absolut konvergent, und zweitens ergibt sich bei jedem $m \geqq 1$ für $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1, \dots |x_m| < 1$

$$|Q_m(x_1, x_2, \dots x_m)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots = 1.$$

Es ist jedoch die Potenzreihe $Q(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Punkte $x_1 = \varepsilon_1, x_2 = \varepsilon_2, \ldots x_m = \varepsilon_m, \ldots$ nicht absolut konvergent, denn es ist ja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_1^n}{2^{n+1}} \frac{2^{n+1}}{\varepsilon_1^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

divergent. Dies widerspricht aber den Voraussetzungen, daß jede für $|x_1| < 1, |x_2| < 1, \ldots |x_m| < 1, \ldots$ beschränkte Potenzreihe für $x_1 = \varepsilon_1, x_2 = \varepsilon_2, \ldots x_m = \varepsilon_m, \ldots$ absolut konvergiert. Damit ist der Satz VI bewiesen.

§ 4.

Ich werde in diesem Paragraphen das absolute Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen (1) mit Hilfe des Ergebnisses des § 3 über Potenzreihen mit unendlich vielen Variabeln studieren. Hierbei spielen die beiden folgenden Sätze eine wichtige Rolle, welche einen Zusammenhang zwischen der gleichmäßigen Konvergenz einer Dirichletschen Reihe und der Beschränktheit der zugehörigen Potenzreihe mit unendlich vielen Variabeln darstellen.

Satz VII: Es möge die Dirichletsche Reihe (1) ein Konvergenzgebiet besitzen, und $\sigma = C$ $(-\infty \leqq C < \infty)$ ihre gleichmäßige Konvergenzgerade sein. Dann ist die zu (1) gehörige Potenzreihe

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n_1}^{\nu_1} \ldots x_{n_r}^{\nu_r} = c + \sum_{\alpha} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta + \cdots$$

bei jedem $\sigma_0 > C$ im Gebiete

$$|x_1| \leqq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \; |x_2| \leqq \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \; \ldots \; |x_m| \leqq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$$

beschränkt.

Beweis: Daß bei jedem $m \geqq 1$ der m^{te} Abschnitt

$$P_m(x_1, x_2, \ldots x_m) = c + \sum_{\alpha = 1, \ldots m} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1, \ldots m \\ \alpha \leqq \beta}} c_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta + \cdots$$

im Gebiete

$$|x_1| \leqq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \; |x_2| \leqq \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \; \ldots \; |x_m| \leqq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}$$

absolut konvergiert, ist unmittelbar einzusehen; denn aus der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_1}},$$

wo σ_1 eine feste Zahl im Intervalle $C < \sigma < \sigma_0$ ist, folgt die Exi-

stenz einer von n unabhängigen Zahl $k_1 > 0$ derart, daß für alle $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{|a_n|}{n^{\sigma_1}} < k_1$$

ist, und hieraus unmittelbar, daß

$$|c| + \sum_{\alpha=1,\ldots m} |c_\alpha| \frac{1}{p_\alpha^{\sigma_0}} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,\ldots m \\ \alpha \leqq \beta}} |c_{\alpha,\beta}| \frac{1}{p_\alpha^{\sigma_0}} \frac{1}{p_\beta^{\sigma_0}} + \cdots$$

$$< k_1 \left(1 + \sum_{\alpha=1,\ldots m} \frac{1}{p_\alpha^{\sigma_0-\sigma_1}} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,\ldots m \\ \alpha \leqq \beta}} \frac{1}{p_\alpha^{\sigma_0-\sigma_1}} \cdot \frac{1}{p_\beta^{\sigma_0-\sigma_1}} + \cdots\right)$$

$$= k_1 \prod_{l=1}^{m} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_l^{\sigma_0-\sigma_1}}}$$

ist, d. h. konvergiert.

Es ist noch die Existenz einer von m unabhängigen Zahl $K > 0$ so zu beweisen, daß bei jedem $m \geqq 1$ im Gebiete $|x_1| \leqq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ldots |x_m| \leqq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}$

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)| \leqq K$$

ist.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (1) für $\sigma = \sigma_0$ folgt die Existenz einer ganzen Zahl $N_1 > 1$ derart, daß bei jedem $N_2 \geqq N_1$ und jedem Punkte s auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$

$$\left|\sum_{n=N_1+1}^{N_2} \frac{a_n}{n^s}\right| < 1$$

ist. Dann ist offenbar bei jedem ganzzahligen $N \geqq 1$ für $\sigma = \sigma_0$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s}\right| < \sum_{n=1}^{N_1} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} + 1 = K,$$

wo K von N nicht abhängt. Ich behaupte: dies K hat die obige Eigenschaft.

Es sei m eine beliebige ganze Zahl $\geqq 1$ und m fest. Dann betrachte ich bei jedem $N \geqq p_{m+1}$ die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s},$$

d. h. die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s},$$

wo $b_n = a_n$ für $1 \leqq n \leqq N$, $b_n = 0$ für $n > N$ ist. Es sei

$$Q_N(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_{n_1}^{\nu_1} \ldots x_{n_r}^{\nu_r} = \sum_{n=1}^{N} a_n x_{n_1}^{\nu_1} \ldots x_{n_r}^{\nu_r}$$

die zugehörige Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ Dann ist $Q_N(x_1, x_2, \ldots)$ ein Polynom der μ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, wo $\mu > m$ die größte Zahl ist, für die $p_\mu \leqq N$ ist. Es sei M das Maximum von $|Q_N(x_1, x_2, \ldots)|$ für $|x_1| \leqq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ldots |x_\mu| \leqq \frac{1}{p_\mu^{\sigma_0}}$, d. h., da ja das Maximum am Rande erreicht wird, das Maximum von $|v|$, wenn v die Menge V aller Werte durchläuft, welche $Q_N(x_1, x_2, \ldots)$ annimmt, wenn die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ unabhängig von einander die Kreise $|x_1| = \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ldots |x_\mu| = \frac{1}{p_\mu^{\sigma_0}}$ durchlaufen. Dann behaupte ich: es ist

$$M \leqq K.$$

In der Tat, es sei $M > K$ angenommen; dann gäbe es eine Zahl v in V derart, daß für alle $-\infty < t < \infty$

$$\left| v - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma_0 + it}} \right| > M - K$$

wäre, was dem Satze I des § 1, auf die Dirichletsche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s}$ angewendet, widerspricht, nach welchem Satze zu jeder Zahl v der Menge V und jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl t_0 derart existiert, daß

$$\left| v - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma_0 + it_0}} \right| < \varepsilon$$

ist.

Es bezeichne nunmehr, bei jedem $N \geqq p_{m+1}$, $Q_{N,m}(x_1, x_2, \ldots x_m)$ den m^{ten} Abschnitt von $Q_N(x_1, x_2, \ldots)$, d. h. dasjenige Polynom der m Variablen $x_1, x_2, \ldots x_m$, welches aus $Q_N(x_1, x_2, \ldots)$ entsteht, wenn in diesem letzten Polynom die Variablen $x_{m+1}, \ldots x_\mu$ sämtlich gleich 0 gesetzt werden. Dann ist a fortiori für $|x_1| \leqq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ldots |x_m| \leqq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}$

$$|Q_{N,m}(x_1, x_2, \ldots x_m)| \leqq M \leqq K.$$

Es sei nunmehr $x_1, x_2, \dots x_m$ ein beliebig gewählter Punkt im Gebiete $|x_1| \leqq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \dots |x_m| \leqq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}$. Dann ist offenbar

$$\lim_{N=\infty} Q_{N,m}(x_1, x_2, \dots x_m) = P_m(x_1, x_2, \dots x_m).$$

Wegen der für alle $N \geqq p_{m+1}$ bewiesenen Ungleichung

$$|Q_{N,m}(x_1, x_2, \dots x_m)| \leqq K$$

folgt daher, für jeden dem Gebiete $|x_1| \leqq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \dots |x_m| \leqq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}$ angehörigen Punkt $x_1, x_2, \dots x_m$, die Abschätzung

$$|P_m(x_1, x_2, \dots x_m)| \leqq K.$$

Dies gilt bei jedem $m \geqq 1$. Damit ist der Satz VII bewiesen.

Satz VIII: Es sei (1) eine Dirichletsche Reihe, und es möge die zu (1) gehörige Potenzreihe mit unendlich vielen Variabeln $P(x_1, x_2, \dots x_m, \dots)$ für

$$|x_1| \leqq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \quad |x_2| \leqq \frac{1}{p_2^{\sigma_0}}, \dots |x_m| \leqq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \dots$$

beschränkt sein. Dann ist bei jedem $\varepsilon > 0$ die Reihe (1) für $\sigma > \sigma_0 + \varepsilon$ gleichmäßig konvergent; d. h. es ist die gleichmäßige Konvergenzabszisse C der Reihe $\leqq \sigma_0$.

Beweis: Es darf offenbar beim Beweise $\sigma_0 = 0$ angenommen werden; sonst ist nur $s = \sigma_0 + s'$ zu setzen und die Dirichletsche Reihe $\sum \frac{a'_n}{n^{s'}}$, wo $a'_n = \frac{a_n}{n^{\sigma_0}}$ ist, zu betrachten. Nach Annahme ist alsdann bei jedem $m > 1$ der m^{te} Abschnitt $P_m(x_1, x_2, \dots x_m)$ im Gebiete $|x_1| \leqq 1, |x_2| \leqq 1, \dots |x_m| \leqq 1$ absolut konvergent und dem Betrage nach $< K$, wo K von m nicht abhängt. Hieraus folgt zunächst nach einer Cauchyschen Abschätzung, daß die sämtlichen Koeffizienten der Potenzreihe $P(x_1, x_2, \dots x_m, \dots)$, d. h. die sämtlichen Koeffizienten a_n der Reihe (1), absolut genommen $< K$ sind. Es ist also (1) für $\sigma > 1$ absolut konvergent.

Es sei nunmehr bei jedem $m \geqq 1$

$$f_m(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^{(m)}}{n^s}$$

diejenige Dirichletsche Reihe, die den m^{ten} Abschnitt $P_m(x_1, x_2, \dots x_m)$ unserer Potenzreihe $P(x_1, x_2, \dots x_m, \dots)$ als zugehörige Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \dots$ besitzt; dann ist

$b_n^{(m)} = a_n$ bezw. $= 0$, je nachdem n keinen bezw. mindestens einen der Primfaktoren $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots$ enthält. Da $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ für $|x_1| \leqq 1, \ldots, |x_m| \leqq 1$ absolut konvergent und dem Betrage nach $< K$ ist, so ist

$$f_m(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^{(m)}}{n^s}$$

für $\sigma \geqq 0$ absolut konvergent, und es ist für $\sigma > 0$

$$|f_m(s)| < K.$$

Ich behaupte: es ist für jedes positive $\varepsilon < 1$ die für $\sigma > 1$ durch die dort absolut konvergente Reihe (1) definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma > \varepsilon$ regulär und beschränkt; daraus folgt dann unmittelbar nach einem in der Einleitung erwähnten Satze ($C = D$), daß $C \leqq 0$ ist.

Es genügt offenbar zu beweisen, daß, bei jedem reellen τ, $f(s)$ im Kreise mit dem Mittelpunkte $2 + i\tau$ und dem Radius $2 - \varepsilon$ regulär und absolut genommen $\leqq K$ ist, wo K die obige Konstante bedeutet. Dies folgt aber unmittelbar daraus, daß einerseits in dem kleineren Kreise $|s - (2 + i\tau)| < \frac{1}{2}$, der ganz im Innern der Halbebene $\sigma > 1$ liegt, gleichmäßig

$$\lim_{m=\infty} f_m(s) = f(s)$$

ist, während andererseits die sämtlichen Funktionen

$$f_1(s), f_2(s), \ldots f_m(s), \ldots$$

für $|s - (2 + i\tau)| \leqq 2 - \varepsilon$ regulär und dem Betrage nach $< K$ sind. Denn nach einem bekannten Stieltjesschen Satze[1]) existiert alsdann die Funktion $f(s)$ und ist regulär im ganzen Kreise $|s - (2 + i\tau)| < 2 - \varepsilon$, und es ist daselbst

$$f(s) = \lim_{m=\infty} f_m(s)$$

also

$$|f(s)| \leqq K.$$

Damit ist der Satz VIII bewiesen.

Es haben $S\,(2 \leqq S \leqq \infty)$ und $T \geqq 0$ die in der Einleitung erklärte Bedeutung; dann können wir nunmehr leicht den folgenden schon in der Einleitung erwähnten Hauptsatz beweisen:

---

1) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Paris, 1905, Bd. II. S. 369—370.

Satz IX: Es ist

$$T = \frac{1}{S}.$$

Beweis: 1. Es ist $T \leqq \frac{1}{S}$; d. h. wenn die Dirichletsche Reihe (1) eine im Endlichen gelegene gleichmäßige Konvergenzgerade $\sigma = C$ hat, so ist die absolute Konvergenzabszisse $B \leqq C + \frac{1}{S}$, also bei jedem $\delta > 0$ die Reihe (1) für $\sigma \geqq C + \frac{1}{S} + \delta$ absolut konvergent.

In der Tat, es ist die zu (1) gehörige Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots)$ nach dem Satze VII für

$$|x_1| \leqq \frac{1}{p_1^{C+\frac{\delta}{3}}}, \ldots, |x_m| \leqq \frac{1}{p_m^{C+\frac{\delta}{3}}}, \ldots$$

beschränkt. Es sei

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{S} + \frac{\delta}{3}}, \quad \beta = \frac{1}{S} + \frac{2\delta}{3}$$

und für alle $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{p_m^{\beta}}$$

gesetzt. Dann ist $\alpha < S$, $0 < \varepsilon_m < 1$ und, wegen $\alpha\beta > 1$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{\alpha} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p_m^{\alpha\beta}}$$

konvergent. Also ist, nach der Definition der Zahl S, die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ für

$$|x_m| \leqq \varepsilon_m \frac{1}{p_m^{C+\frac{\delta}{3}}} = \frac{1}{p_m^{\frac{1}{S}+\frac{2\delta}{3}}} \cdot \frac{1}{p_m^{C+\frac{\delta}{3}}}$$

$$= \frac{1}{p_m^{C+\frac{1}{S}+\delta}} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

absolut konvergent, d. h. es ist die Reihe (1) für $\sigma \geqq C + \frac{1}{S} + \delta$ absolut konvergent, w. z. b. w.

2. Es ist $T \geqq \frac{1}{S}$. Wegen $T \geqq 0$ ist im Falle $S = \infty$ nichts zu beweisen; es darf daher beim Beweise angenommen werden,

daß die absolute Konstante $S < \infty$ ist. Dann lautet die Behauptung: Es gibt zu jedem $\delta > 0$ eine Dirichletsche Reihe (1) mit absoluter Konvergenzabszisse B und gleichmäßiger Konvergenzabszisse C, so daß

$$B - C \geqq \frac{1}{S} - \delta$$

ist; hierbei darf offenbar $\delta < \frac{1}{S}$ angenommen werden.

In der Tat, wegen

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{S} - \frac{\delta}{2}} > S,$$

gibt es eine für $|x_1| \leqq 1, \ldots |x_m| \leqq 1, \ldots$ beschränkte Potenzreihe $Q(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ und eine zugehörige Zahlenfolge

$$E_1, E_2, \ldots E_m, \ldots \qquad (0 < E_m < 1)$$

so, daß

$$\sum_{m=1}^{\infty} E_m^\alpha$$

konvergiert, während $Q(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ für

$$x_1 = E_1, x_2 = E_2, \ldots, x_m = E_m, \ldots$$

nicht absolut konvergiert; hierbei darf offenbar

$$E_1 \geqq E_2 \geqq \ldots E_m \geqq \ldots$$

angenommen werden. Wegen der Konvergenz der Reihe mit positiven monoton abnehmenden Gliedern $\sum E_m^\alpha$ ist bekanntlich

$$\lim_{m=\infty} m E_m^\alpha = 0,$$

also

$$E_m = o\left(\frac{1}{m^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = o\left(\frac{1}{m^{\frac{1}{S} - \frac{\delta}{2}}}\right),$$

wo die Abschätzung sich auf wachsendes ganzzahliges m bezieht.

Es sei nunmehr für alle $m = 1, 2, \ldots$

$$E'_m = \frac{1}{p_m^{\frac{1}{S} - \delta}}$$

gesetzt; dann ist, wegen der bekannten Abschätzung

$$p_m = O(m \log m),$$

$$\frac{1}{E'_m} = p_m^{\frac{1}{S}-\delta} = O\left(m^{\frac{1}{S}-\frac{\delta}{2}}\right),$$

also

$$\frac{E_m}{E'_m} = o(1).$$

Folglich ist für alle $m = 1, 2, \ldots$ mit Ausnahme einer endlichen Anzahl

$$E'_m \geqq E_m.$$

Nach der Vorbemerkung zum Satze VI gibt es daher eine für $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1, \ldots |x_m| < 1, \ldots$ beschränkte Potenzreihe

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots),$$

die für

$$x_m = E'_m = \frac{1}{p_m^{\frac{1}{S}-\delta}} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

nicht absolut konvergiert. Es sei $\sum \frac{a_n}{n^s}$ diejenige Dirichletsche Reihe (1), welche die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ als zugehörige Potenzreihe besitzt; dann ist nach dem Satze VIII diese Reihe (1) bei jedem $\varepsilon > 0$ für $\sigma > 2\varepsilon$ gleichmäßig konvergent; denn es ist ja die zugehörige Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ für

$$|x_m| \leqq \frac{1}{p_m^{\varepsilon}} < 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

beschränkt. Es ist also die gleichmäßige Konvergenzabszisse C unserer Reihe $\leqq 0$. Weil aber $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ für

$$x_m = E'_m = \frac{1}{p_m^{\frac{1}{S}-\delta}} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

nicht absolut konvergiert, ist $\sum \frac{a_n}{n^s}$ für $\sigma = \frac{1}{S} - \delta$ nicht absolut konvergent; das heißt es ist ihre absolute Konvergenzabszisse $B \geqq \frac{1}{S} - \delta$.

Es ist also für die betrachtete Reihe (1)

$$B - C \geqq \frac{1}{S} - \delta - 0 = \frac{1}{S} - \delta.$$

Damit ist der Satz IX bewiesen.

Wegen $S \geqq 2$ folgt aus dem Satze IX, daß $T \leqq \frac{1}{2}$ ist, also der

Satz X: Es besitze die Dirichletsche Reihe (1) ein Konvergenzgebiet, und es möge B ihre absolute Konvergenzabszisse sein. Es sei ferner $D \leqq B$ die untere Grenze aller Zahlen d, für welche die durch die Reihe (1) definierte Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > d$ regulär und beschränkt ist. Dann ist

$$B \leqq D + \tfrac{1}{2}.$$

§ 5.

Ich werde in diesem Paragraph das absolute Konvergenzproblem derjenigen Dirichletschen Reihen (1) erledigen, welche, rein formal, eine Darstellung einer der beiden Formen

$$\text{I:} \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = a_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{p_m^l}}{(p_m^l)^s}$$

und

$$\text{II:} \qquad f(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{p_m^l}}{(p_m^l)^s}\right)$$

zulassen. Dies geschieht durch den folgenden

Satz XI: Es möge die Dirichletsche Reihe (1) einem der beiden Typen I und II angehören. Es sei B die absolute Konvergenzabszisse der Reihe (1) und D die untere Grenze aller Zahlen d, für welche die durch die Reihe definierte Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > d$ regulär und beschränkt ist. Dann ist

$$B = D.$$

Beweis: Es sei C die gleichmäßige Konvergenzabszisse der Reihe (1). Dann ist $D = C$, und es lautet die Behauptung: Bei jedem festen $\sigma_1 > C$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_1}}$$

konvergent. Es sei σ_0 eine fest gewählte Zahl im Intervalle $C < \sigma < \sigma_1$, dann ist, wegen $\sigma_0 > C$, nach dem Satze VII des § 4 die zu (1) gehörige Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete $|x_1| \leqq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ldots, |x_m| \leqq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$ beschränkt. Hierbei gehört offenbar die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$, je nachdem die betrachtete Dirichletsche Reihe eine Reihe I oder eine Reihe II ist, zu dem

in dem Satze IV a bezw. IV b behandelten Typus einer Potenzreihe mit unendlich vielen Variabeln.

Es sei nunmehr bei jedem $m \geqq 1$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{p_m^{\sigma_1 - \sigma_0}}$$

gesetzt. Dann ist, wegen $\sigma_1 > \sigma_0$, $0 < \varepsilon_m < 1$ sowie $\lim_{m=\infty} \varepsilon_m = 0$, also a fortiori $\limsup_{m=\infty} \varepsilon_m < 1$. Der Satz IV a bezw. IV b ergibt daher, auf Grund der Beschränktheit von $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete $|x_1| \leqq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ldots |x_m| \leqq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$, die absolute Konvergenz der Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ für

$$|x_1| \leqq \varepsilon_1 \frac{1}{p_1^{\sigma_0}} = \frac{1}{p_1^{\sigma_1}}, \ldots, |x_m| \leqq \varepsilon_m \frac{1}{p_m^{\sigma_0}} = \frac{1}{p_m^{\sigma_1}}, \ldots,$$

d. h. die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{1}{p_{n_1}^{\sigma_1}}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{1}{p_{n_r}^{\sigma_1}}\right)^{\nu_r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_1}}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Der Satz XI läßt sich offenbar auch so formulieren: *Es sei (1) eine dem Typus I oder II gehörige Dirichletsche Reihe, die ein Konvergenzgebiet besitzt. Dann ist es eine für die absolute Konvergenz der Reihe für $\sigma > \sigma_1$ notwendige und hinreichende Bedingung, daß die durch die Reihe definierte Funktion $f(s)$ bei jedem $\varepsilon > 0$ für $\sigma > \sigma_1 + \varepsilon$ regulär und beschränkt ist.*

In dem Typus I ist als Spezialfall der folgende Typus

$$\text{Ia:} \qquad f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{p_m^s}$$

enthalten. Für diesen Typus Ia habe ich in einer früheren Arbeit[1]) den obigen Satz in einer noch mehr aussagenden Form be-

---

1) H. Bohr: Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse Dirichletscher Reihen, Acta Mathematica, Bd. 36. S. 197—240. Dort bewies ich den folgenden Satz des Textes sogar für jede Dirichletsche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, deren Exponentenfolge $0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 \ldots$ ($\lim \lambda_n = \infty$) im rationalen Körper linear unabhängig ist.

wiesen, wo er, wenn die absolute Konvergenzabszisse B endlich ist, auch über die Konvergenz bezw. Nichtkonvergenz der Reihe auf der absoluten Konvergenzgeraden $\sigma = B$ Aufklärung gibt, nämlich: Damit die zum Typus Ia gehörige, in einer gewissen Halbebene konvergente, Dirichletsche Reihe (1) für $\sigma \geqq \sigma_1$ absolut konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß die durch die Reihe definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma > \sigma_1$ regulär und beschränkt ist. Ich bemerke zur Orientierung, daß dieser letzte Satz offenbar nicht für sämtliche Dirichletschen Reihen vom Typus I gilt. Dies sieht man unmittelbar folgendermaßen: Es existiert bekanntlich eine für $|z| < 1$ absolut konvergente, für $|z| = 1$ nicht absolut konvergente Potenzreihe $F(z) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l z^l$ derart, daß $F(z)$ für $|z| < 1$ beschränkt ist; es sei in dieser Potenzreihe $z = \frac{1}{2^s}$ gesetzt; dann geht sie in die zum Typus I (nicht aber zum Typus I a) gehörige Dirichletsche Reihe

$$f(s) = F\left(\frac{1}{2^s}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d_l}{(2^l)^s}$$

über. Hierbei ist $f(s)$ für $\sigma > 0$ regulär und beschränkt; es ist aber trotzdem die Dirichletsche Reihe nicht für $\sigma \geqq 0$ (sondern nur für $\sigma > 0$) absolut konvergent.

In dem Typus II sind speziell die beiden wichtigen Klassen Dirichletscher Reihen

II a: $$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{b_m}{p_m^s}\right)$$

und

II b: $$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{b_m}{p_m^s}}$$

enthalten[1]). Ich werde nun schließlich beweisen, daß die obige für

1) Daß die Dirichletsche Reihe $\sum \frac{a_n}{n^s}$ eine Darstellung der Form $\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{b_m}{p_m^s}}$ zuläßt, soll heißen: Wenn man (ganz abgesehen von Konvergenz oder Nichtkonvergenz) $\frac{1}{1-\frac{b_m}{p_m^s}} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_m^l}{(p_m^l)^s}$ setzt und $\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_m^l}{(p_m^l)^s}\right)$ formal entwickelt, soll $\sum \frac{a_n}{n^s}$ herauskommen; mit anderen Worten: es ist, $n = p_{n_1}^{\nu_1} \cdots p_{n_r}^{\nu_r}$ gesetzt, $a_n = b_{n_1}^{\nu_1} \cdots b_{n_r}^{\nu_r}$.

Dirichletsche Reihen vom Typus Ia giltige Verschärfung des Satzes XI auch für die beiden Typen IIa und IIb gilt, d. h. den

Satz XII: Es sei (1) eine zu einem der beiden Typen IIa und IIb gehörige Dirichetsche Reihe, die ein Konvergenzgebiet besitzt. Dann ist es eine für die absolute Konvergenz der Reihe für $\sigma \geqq \sigma_1$ notwendige und hinreichende Bedingung, daß die durch die Reihe definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma > \sigma_1$ regulär und beschränkt ist.

Beweis: Daß die Bedingung notwendig ist, d. h. daß aus der absoluten Konvergenz von (1) für $\sigma \geqq \sigma_1$ die Regularität und Beschränktheit der Funktion $f(s)$ für $\sigma > \sigma_1$ folgt, ist unmittelbar klar. Es werde nunmehr angenommen, daß $f(s)$ für $\sigma > \sigma_1$ regulär und beschränkt ist, d. h. daß für $\sigma > \sigma_1$

$$|f(s)| < k$$

ist, wo k von s nicht abhängt; dann ist die absolute Konvergenz der Reihe (1) für $\sigma \geqq \sigma_1$ zu beweisen. Aus dem Satze XI folgt unmittelbar, daß (1) für $\sigma > \sigma_1$ absolut konvergiert. Es werde nunmehr angenommen, der Satz XII wäre falsch; dann wäre (1) für $\sigma > \sigma_1$ absolut konvergent, für $\sigma = \sigma_1$ nicht absolut konvergent. Hieraus folgt bekanntlich die Existenz einer Zahl $\sigma_0 > \sigma_1$ derart, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} > k$$

ist. Es sei $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ die zu der betrachteten Dirichletschen Reihe gehörige Potenzreihe; dann hat sie die Form

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + b_m x_m)$$

bezw. die Form

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} b_m^l x_m^l\right).$$

Es bezeichne wie in § 1 $V = V(\sigma_0)$ die Menge aller Werte v, welche die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ annimmt, wenn die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$ unabhängig von einander die Kreise $|x_1| = \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ldots |x_m| = \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$ durchlaufen. Dann erreicht offenbar $|v|$ sein Maximum, wenn bei jedem $m \geqq 1$ die Amplitude von x_m so gewählt wird, daß $b_m x_m$ reell und nicht negativ ist. Es ist also dies Maximum gleich

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+|b_m|\frac{1}{p_m^{\sigma_0}}\right)$$

bezw.

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}|b_m|^l\frac{1}{(p_m^{\sigma_0})^l}\right)=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{|b_m|}{p_m^{\sigma_0}}},$$

d. h. gleich

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}},$$

was $> k$ ist.

Nach dem Satz I des § 1 gibt es daher eine reelle Zahl t_0 derart, daß

$$|f(\sigma_0+it_0)|>k$$

ist, im Gegensatz zur Voraussetzung, daß in der ganzen Halbebene $\sigma>\sigma_1$, $|f(s)|<k$ ist. Damit ist der Satz XII bewiesen.

Als Beispiel der Anwendung des Satzes XII werde die Dirichletsche Reihe

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{n^s}=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_m^s}\right)$$

betrachtet. Es ist diese Reihe nicht für $\sigma=1$ absolut konvergent, also kann die durch die Reihe dargestellte Funktion $\frac{1}{\zeta(s)}$ nicht in der Halbebene $\sigma>1$ regulär und beschränkt sein; d. h. (da ja $\zeta(s)$, für $\sigma>1$, $\neq 0$, also $\frac{1}{\zeta(s)}$ für $\sigma>1$ regulär ist), es nimmt $|\zeta(s)|$ in der Halbebene $\sigma>1$ beliebig kleine Werte an. Dies letzte spezielle Resultat habe ich übrigens schon in einer früheren Abhandlung[1]) bewiesen.

§ 6.

Ich kehre nunmehr in diesem letzten Paragraphen wieder zu der Theorie der allgemeinen Dirichletschen Reihen (1) zurück.

---

1) H. Bohr: Sur l'existence de valeurs arbitrairement petites de la fonction $\zeta(s)=\zeta(\sigma+it)$ de Riemann pour $\sigma>1$. Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1911. S. 201—208. Übrigens habe ich später bewiesen, daß $\zeta(s)$ für $\sigma>1$ jeden Wert $\neq 0$ unendlich oft annimmt.

Satz XIII: Es sei (1) eine Dirichletsche Reihe, die ein Konvergenzgebiet besitzt, und es sei B ihre absolute Konvergenzabszisse. Es sei ferner $D \leqq B$ diejenige Zahl, daß bei jedem $\varepsilon > 0$ die durch die Reihe (1) definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma > D + \varepsilon$, dagegen nicht für $\sigma > D - \varepsilon$ regulär und beschränkt ist. Dann ist die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{p_m}}{p_m^s} = \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \frac{a_5}{5^s} + \cdots$$

für $\sigma > D$ absolut konvergent.

Beweis. Es sei C die gleichmäßige Konvergenzabszisse der Reihe (1), also $C = D$. Es sei $\sigma_0 > D$, dann ist die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_{p_m}|}{p_m^{\sigma_0}}$$

zu beweisen. Es sei

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = c + \sum_{\alpha} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} x_\alpha x_\beta + \ldots$$

die zu der Reihe gehörige Potenzreihe; dann ist, wegen $\sigma_0 > C$, nach dem Satze VII des § 4 $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ im Gebiete

$$|x_1| \leqq \frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ldots, |x_m| \leqq \frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$$

beschränkt. Hieraus folgt aber nach dem Satze V des § 3 die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} |c_\alpha| \frac{1}{p_\alpha^{\sigma_0}}$$

d. h. wegen $c_\alpha = a_{p_\alpha}$ die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_{p_m}|}{p_m^{\sigma_0}}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Als ein Beispiel der Verwendung des Satzes XIII werde die spezielle Dirichletsche Reihe

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} \cdots$$

betrachtet. Da hier die Reihe

$$\frac{|-1|}{2^\sigma}+\frac{1}{3^\sigma}+\frac{1}{5^\sigma}+\cdots=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p_m^\sigma}$$

für $\sigma=1$ divergiert, folgt unmittelbar nach dem Satze XIII, daß die Funktion $\zeta(s)(1-2^{1-s})$ bei keinem $\varepsilon>0$ in der Halbebene $\sigma>1-\varepsilon$ regulär und beschränkt ist, d. h. (da ja $\zeta(s)(1-2^{1-s})$ sogar eine ganze Transzendente ist) daß bei jedem $\varepsilon>0$ die Funktion $|\zeta(s)(1-2^{1-s})|$ in der Halbebene $\sigma>1-\varepsilon$ beliebig große Werte annimmt.

Ich bemerke schließlich, daß man für die eben betrachtete spezielle Reihe das erwähnte Resultat, ja sogar, daß die Funktion $\zeta(s)(1-2^{1-s})$ schon in der Halbebene $\sigma>1$ nicht beschränkt ist[1]), auch ohne Mühe aus dem Satze I des § 1 folgern kann, und zwar folgendermaßen: Es sei σ_0 eine beliebige Zahl >1; dann werde ich zunächst die obere Grenze $g=g(\sigma_0)$ des absoluten Betrages der Funktion $\zeta(s)(1-2^{1-s})$ auf der Geraden $\sigma=\sigma_0$ bestimmen. Es sei $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ die zu der betrachteten Dirichletschen Reihe gehörige Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$. Nach dem Satze I ist alsdann die gesuchte obere Grenze g gleich dem Maximum von $|v|$, wenn v die Menge $V=V(\sigma_0)$ aller Werte durchläuft, welche

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$$

annimmt, wenn die Variabeln $x_1, \ldots x_m, \ldots$ unabhängig von einander die Kreise $|x_1|=\frac{1}{p_1^{\sigma_0}}, \ldots, x_m=\frac{1}{p_m^{\sigma_0}}, \ldots$ durchlaufen.

Wegen der Produktdarstellung

$$\zeta(s)(1-2^{1-s})=(1-2^{1-s})\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_m^{-s}}=\frac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}}\prod_{m=2}^{\infty}\frac{1}{1-p_m^{-s}}$$

ist hierbei

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_{n_1}^{\nu_1}\ldots x_{n_r}^{\nu_r}=\frac{1-2x_1}{1-x_1}\prod_{m=2}^{\infty}\frac{1}{1-x_m},$$

also, wie unmittelbar zu sehen, das Maximum von $|v|$, d. h. die Zahl $g=g(\sigma_0)$, gleich

---

1) Wegen den unendlich vielen, auf der Geraden $\sigma=1$ gelegenen, Nullstellen von $1-2^{1-s}$ ist dies Resultat nicht in dem früher von mir bewiesenen Satze, daß $\zeta(s)$ in der Viertelebene $\sigma>1$, $t>1$ nicht beschränkt ist, enthalten.

$$\underset{|x_1| = 2^{-\sigma_0}}{\operatorname{Max}} \left| \frac{1-2x_1}{1-x_1} \right| \cdot \prod_{m=2}^{\infty} \frac{1}{1-p_m^{-\sigma_0}} = \frac{1+2\cdot 2^{-\sigma_0}}{1+2^{-\sigma_0}} \prod_{m=2}^{\infty} \frac{1}{1-p_m^{-\sigma_0}}$$

$$= \frac{1+2^{1-\sigma_0}}{1+2^{-\sigma_0}} \left((1-2^{-\sigma_0}) \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_m^{-\sigma_0}} \right) = (1+2^{1-\sigma_0}) \frac{1-2^{-\sigma_0}}{1+2^{-\sigma_0}} \zeta(\sigma_0).$$

Es folgt nunmehr die Nichtbeschränktheit von $\zeta(s)(1-2^{1-s})$ für $\sigma > 1$ unmittelbar daraus, daß, für zu 1 abnehmendes σ_0,

$$\lim_{\sigma_0 = 1} (1+2^{1-\sigma_0}) \frac{1-2^{-\sigma_0}}{1+2^{-\sigma_0}} = \frac{2}{3}, \quad \lim_{\sigma_0 = 1} \zeta(\sigma_0) = \infty$$

also

$$\lim_{\sigma_0 = 1} g(\sigma_0) = \infty$$

ist. Genauer ergibt sich, wegen

$$\lim_{\sigma_0 = 1} \zeta(\sigma_0)(\sigma_0 - 1) = 1,$$

daß

$$\lim_{\sigma_0 = 1} g(\sigma_0)(\sigma_0 - 1) = \tfrac{2}{3}$$

ist.

Nachtrag.

Durch den Satz IX des § 4: Es ist

$$T = \frac{1}{S}$$

habe ich ein in der absoluten Konvergenztheorie der Dirichletschen Reihen (1) wichtiges Problem auf die Bestimmung einer in der Theorie der Potenzreihen mit unendlich vielen Variabeln auftretenden absoluten Konstanten S zurückgeführt. Über die Zahl S konnte ich ohne Schwierigkeit beweisen, daß sie $\geqq 2$ ist, woraus also folgt, daß $T \leqq \frac{1}{2}$ ist. Dagegen gelang es mir nicht über die Zahl S näheres auszusagen; insbesondere konnte ich nicht die für meine Zwecke sehr wesentliche Frage entscheiden, ob $S = \infty$ oder $S < \infty$ ist; d. h. wenn ich mit Hülfe des obigen Satzes zu der Dirichletschen Reihe übergehe, ob $T = 0$ oder $T > 0$ ist.

Es ist aber nunmehr nach der Vorlegung dieser Arbeit Herrn Toeplitz, dem ich vor kurzem das Problem, S zu bestimmen, brieflich mitgeteilt hatte, durch eine sehr scharfsinnige Schlußkette

gelungen, $S < \infty$, ja sogar $S \leqq 4$ zu beweisen. Herr Toeplitz beweist nämlich[1]), daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine für

$$|x_1| \leqq 1,\ |x_2| \leqq 1,\ \ldots\ |x_m| \leqq 1,\ \ldots$$

beschränkte Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ (sogar eine quadratische Form) und eine dazu gehörige Zahlenfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m, \ldots$ $(0 < \varepsilon_m < 1)$ mit den beiden folgenden Eigenschaften gibt:

1) Es ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{4+\varepsilon}$$

konvergent.

2) Es ist $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ für

$$x_1 = \varepsilon_1,\ x_2 = \varepsilon_2,\ \ldots,\ x_m = \varepsilon_m,\ \ldots$$

nicht absolut konvergent.

Aus dem Toeplitzschen Resultate folgt für die Dirichletschen Reihen (1), daß $T > 0$, ja sogar $T \geqq \frac{1}{4}$ ist; also: Es braucht eine Dirichletsche Reihe (1) nicht soweit absolut zu konvergieren, wie die durch die Reihe dargestellte Funktion regulär und beschränkt bleibt; genauer: Es kann die Differenz $B-D$ beliebig nahe an $\frac{1}{4}$ kommen.

Es ist somit festgestellt, daß $2 \leqq S \leqq 4$ ist, also daß $\frac{1}{4} \leqq T \leqq \frac{1}{2}$ ist. Das Problem, den genauen Wert von S, d. h. von T zu bestimmen, bleibt noch unerledigt.

---

1) O. Toeplitz: Über eine bei den Dirichletschen Reihen auftretende Aufgabe aus der Theorie der Potenzreihen von unendlichvielen Veränderlichen. Die Arbeit erscheint demnächst in diesen Nachrichten.

Die innere Reibung von Flüssigkeiten unter hohem Druck.

Von

O. Faust.

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. Juni 1913 von G. Tammann.

Die von Tammann angegebene Zustandsgleichung für Flüssigkeiten bei Drucken von 500 kg aufwärts lautet[1]):

$$(V - V_{p=\infty})(K+p) = CT.$$

Hier bedeutet die Konstante $V_{p=\infty}$ das Volumen der betreffenden Flüssigkeit bei unendlich hohem Druck, K ist der Binnendruck[2]) der Lösung und C eine der Gaskonstanten analoge Konstante, die aber von Stoff zu Stoff variiert.

Das überraschende Resultat, das sich ergibt, ist die Tatsache, daß sich die Flüssigkeiten in einem großen Gebiete so verhalten, als ob die Molekularattraktion K unabhängig vom Volumen ist. Die Größe K ist in dem ganzen Gebiet, das die Gleichung beherrscht, konstant.

Dieses merkwürdige und einfache Verhalten der Flüssigkeiten schien besonders geeignet, um von einem neuen Gesichtspunkt aus an das Studium der inneren Reibung der Flüssigkeiten heranzutreten. Es ist zu untersuchen, ob in diesem Gebiete konstanter Molekularattraktion nicht auch für die innere Reibung η ähnliche einfachere Beziehungen gelten, als in dem bisher von der experimentellen Forschung bearbeiteten Gebiet, für das bis jetzt auch eine Zustandsgleichung noch nicht gefunden ist.

---

1) Ann. d. Phys. [4] 37, S. 975. 1912.

2) Tammann, über die Beziehungen zwischen inneren Kräften und Eigenschaften von Lösungen, Leipzig 1907.

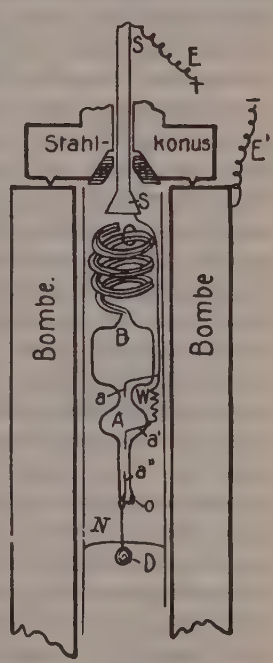
Die Abhängigkeit der inneren Reibung der Flüssigkeiten vom Druck ist bisher nur vereinzelt zum Gegenstand der Untersuchung gemacht worden. Drucke über 900 kg pro qcm sind bei diesen Untersuchungen nie erreicht, ebenso sind wenig Flüssigkeiten untersucht, am eingehendsten das Wasser, das ein Minimum in der Druck-Reibungskurve hat. Die bisherigen Arbeiten über diesen Gegenstand rühren her von Warburg und L. v. Babo[1]), von Röntgen[2]), Warburg und Sachs[3]), Cohen[4]) und Hauser[5]). Die Ursache dafür, daß nur so wenig Arbeiten über die innere Reibung von Flüssigkeiten unter hohem Druck vorliegen, ist wohl besonders darin zu suchen, daß ein theoretischer Anlaß zu solchen relativ schwierigen Messungen bisher nicht vorlag.

Versuchsanordnung.

Die Druckerzeugung geschah mit Hilfe einer nach den Angaben Tammanns[6]) von der Firma Schäffer & Budenberg in Magdeburg-Buckau gebauten Ölpresse. Als Druckflüssigkeit wurde Ricinusöl benutzt. Drucke bis zu 400 bis 500 kg pro qcm konnten mit der Handpresse sehr schnell (in 1 bis 2 Sekunden) erzeugt werden; die höheren Drucke wurden hergestellt, indem ein Stahlstempel mittels eines Hebelrades in einen Stahlzylinder hineingepreßt wurde. In der bei diesen Versuchen benutzten Bombe konnten leicht in ½ bis 1 Minute Drucke von 3000 kg pro qcm erreicht werden, bei tieferen Temperaturen (0 bis +10°), wo die Kompressibilität kleiner ist, schon in ¼ bis ½ Minute. Als Druckgefäß, in dem die Untersuchung vorgenommen wurde, diente eine Eisenbombe mit zylindrischer Bohrung von 25 mm Durchmesser und 210 mm Tiefe. Die Bombe hatte oben und unten je eine durch Schrauben und Konusse in der üblichen Weise verschließbare Öffnung, außerdem eine seitliche Öffnung, in die die Stahlkapillare mündete, durch die die den Druck erzeugende Flüssigkeit in die Bombe hereingepreßt wurde. Bei den hier beschriebenen Messungen wurde die untere Öffnung der Bombe nicht benutzt und stets verschlossen gehalten. Die Bombe, die bei den Versuchen in einem großen, etwa 20 Liter fassenden Wasserthermostaten stand, war in ihrem unteren Teil mit Quecksilber gefüllt, in ihrem oberen Teil mit der zu unter-

1) Wied. Ann. 17, S. 390. 1882.
2) Ebenda 22, S. 510. 1884.
3) Ebenda 22, S. 518. 1884.
4) Ebenda 47, S. 666. 1892.
5) Diss. Tübingen 1900.
6) Tammann, Krystallisieren und Schmelzen S. 194.

suchenden Flüssigkeit. Um den Inhalt der Bombe gegen das Öl der Pumpe abzuschließen, wurde ein eisernes U-Rohr zwischengeschaltet, dessen einer an die Presse angeschlossener Schenkel ganz, der andere an die Bombe angeschlossene Schenkel halb mit Quecksilber, zur anderen Hälfte mit der zu untersuchenden Flüssigkeit angefüllt war. Da doch bei höheren Drucken bisweilen in den halb mit der Versuchsflüssigkeit gefüllten Schenkel etwas Öl an den Wänden herüberkroch und von dort weiter in die Bombe gelangen konnte, wurde unten in den ganz mit Quecksilber gefüllten Schenkel eine amalgamierte Kupferscheibe mit einer Öffnung in der Mitte zum Durchfließen des Quecksilbers fest eingefügt. Das Quecksilber benetzte die amalgamierte Kupferscheibe und diese Vorrichtung bewährte sich als ein recht guter Schutz gegen dieses Herüberkriechen von Öl in den anderen Schenkel des U-Rohres. Auch nach häufigen Versuchen war die Kupferscheibe noch nicht zerstört. Die Messung des Druckes geschah mit Hilfe eines Federmanometers von Schäffer & Budenberg, das in Teile von je 10 kg geteilt war und auf dem eine Druckänderung von 1 kg noch gut abgeschätzt werden konnte. Als Meßmethode wurde die Bestimmung der Ausflußzeit eines bestimmten Flüssigkeitsvolumens durch eine Kapillare benutzt.



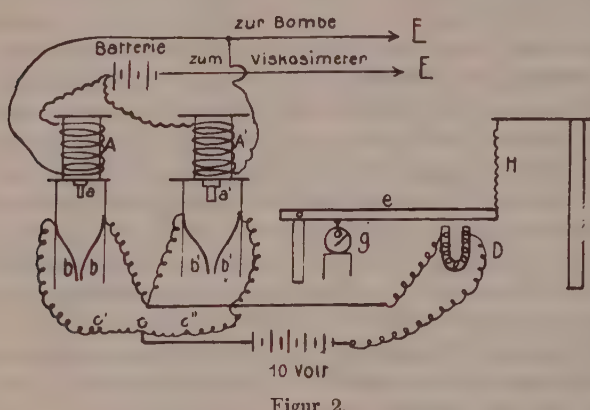
Figur 1.

Das Viskosimeter und die Meßvorrichtung: Die Form des benutzten Viskosimeters wird aus Figur 1 ersichtlich. Das Viskosimeter war stets aus Jenenser Thermometerglas 16^{III} hergestellt. *A* ist das Volumen, dessen Ausflußzeit bestimmt wurde, es betrug etwa 1 bis 2 ccm. *a*, *a'* und *a''* sind eingeschmolzene Platindrähte, die als Kontakte bei der Messung benutzt wurden. Die Zu- und Ableitung des Meßstromes geschah durch einen an dem gegen die Bombe isolierten Stahlstab *S* angebrachten Draht *E* sowie durch einen weiteren an der Bombe befestigten Draht *E'*. *C* ist die Kapillare, durch die die zu untersuchende Flüssigkeit fließen mußte und die zur bequemen Unterbringung in dem beschränkten Raum in eine Spirale aufgewunden war. Sie hatte bei den Versuchen einen Durchmesser von 0.30 bis 0.35 mm

und eine Länge von 45 bis 55 cm. Das Viskosimeter war an dem beweglichen Stahlstab *S* befestigt und konnte mit Hilfe desselben von außen her gehoben und gesenkt werden, ohne die Bombe zu öffnen. Im unteren Teil der Bombe befand sich Quecksilber, in der oberen Hälfte die Flüssigkeit, deren Viskosität gemessen werden sollte. Zur Ausführung der Versuche wurde das Viskosimeter ganz in das Quecksilber eingetaucht und füllte sich bis zum Ende der Kapillare mit Quecksilber. Alsdann wurde das Gefäß wieder gehoben, so daß es sich wieder ganz in der zu untersuchenden Flüssigkeit befand und nur noch zur Vermittlung des elektrischen Kontaktes die Stahlkugel *D* in das Quecksilber tauchte. Diese Kugel hing an einem dünnen Eisendraht, der an dem Platindraht *a″* befestigt war. Der zweite Kontakt befand sich an dem Stahlstab *S*, der von der Bombe durch einen Konus *K* (in der Figur schraffiert) aus Vulkanfiber oder Ebonit isoliert und mit dem eingeschmolzenen Platindraht *a* direkt, mit dem Platindraht *a′* durch den Widerstand *w* verbunden war. Der das Viskosimeter tragende Stahlstab hatte an seinem unteren Ende ein konusförmig gedrehtes Stück, das in eine gleichgeformte Öffnung in dem Ebonit- bezw. Vulkanfiberkonus *K* hereinpaßte. War der Stahlstab hochgezogen, sodaß der an ihm befindliche Stahlkonus in den Ebonitkonus gut einfaßte, so konnte in der Bombe Druck erzeugt werden, ohne daß die geringste Menge Flüssigkeit an dem Stahlkonus vorbei ins Freie gelangte. Nach Ablassen selbst der höchsten Drucke konnte beim Druck einer Atmosphäre der Stahlstab durch leises Klopfen gesenkt und das an ihm befindliche Viskosimeter wieder in das Quecksilber eingetaucht werden, ohne daß die Bombe hierzu hätte geöffnet werden müssen. Durch diese Anordnung wurde die ganze Ausführung und auch die Wiederholung der Versuche wesentlich erleichtert. Wurde das mit Quecksilber gefüllte Viskosimeter wieder gehoben, so tropfte das Quecksilber unten aus der Öffnung *O* aus und saugte gleichzeitig die zu untersuchende Flüssigkeit durch die Kapillare *C* hinter sich her. An der Öffnung *O* war eine kleine in der Figur zu erkennende Biegung angebracht, die sich als notwendig erwies, um zu vermeiden, daß Flüssigkeit an dem Quecksilber vorbeikriechen und von unten in das Viskosimetergefäß gelangen konnte. Man hätte auch die Glasröhre mit der Öffnung *O* ganz in das Quecksilber tauchen lassen können, dann hätte man jedoch Korrektionen einführen müssen wegen der veränderlichen Höhe des Quecksilberniveaus *N*, und dies wäre mit Schwierigkeiten verknüpft gewesen, weil beim Komprimieren immer etwas Quecksilber in die Bombe hereingedrückt wurde und das

Niveau sich jedesmal mehr oder weniger veränderte. Durch die hier getroffene Einrichtung wurde man von der Höhe des Quecksilberniveaus unabhängig. Das Volumen B diente dazu, um während des Ausflusses dieses Volumens genügend Zeit zur Druckererzeugung zu haben und weiter noch, damit die Kompressionswärme während jener Ausflußzeit abfließen konnte. Die Größe des Volumens B war so gewählt, daß nach Erzeugung des Druckes etwa 15 bis 20 Minuten vergingen, ehe die eigentliche Messung anfing. Wenn das Quecksilber so weit ausgeflossen war, daß der Kontakt am Platindraht a geöffnet wurde, so floß der Meßstrom nunmehr durch den Widerstand w, der die Drähte a und a' verband und so eingerichtet war, daß der Strom etwa auf ein Drittel seines früheren Betrages sank. Nach Öffnen des Kontaktes am Drahte a' ging überhaupt kein Strom mehr durch den Stromkreis. Auf diese Weise war es möglich, durch Einführung eines einzigen isolierten Kontaktes mittels des Stahlstabes S die Messung auszuführen. Man kann überdies die Einrichtung noch so treffen, daß man die Zuleitung gleichzeitig als Thermoelement ausbildet, doch hatten die Vorversuche ergeben, daß eine solche etwas kompliziertere Anordnung nicht notwendig war, weil Badtemperatur und Innentemperatur der Bombe nie mehr als 0.2^0 verschieden waren. Der Widerstand w bestand aus dünnem Konstantandraht und war in Wirklichkeit um die untere Ausflußröhre des Viskosimeters gewickelt. Die zur Messung benutzten Ströme hatten eine Stärke von 1 bis 2 Hundertstel Ampère und riefen praktisch keine Erwärmung hervor. Der Widerstand w wurde noch mit einem Wärmeschutz aus Porzellankitt umgeben, der sich als sehr geeignet erwies, denn es konnte auch bei längerdauernden Versuchen eine Erwärmung der außen befindlichen Versuchsflüssigkeit nicht festgestellt werden. Bei den Ausflußversuchen blieb die Temperatur auf 0.1^0 konstant. Der zur Messung dienende Strom, dessen Zuleitungen zum Druckgefäß durch die Drähte E und E' der Figur 1 angedeutet sind, ging weiter durch zwei in der Figur 2 schematisch wiedergegebene Elekromagnete A^1 und A^2. Die Stromzuleitungen sind in Figur 2 wieder mit denselben Buchstaben E und E' bezeichnet. Die Elektromagnete konnten bei Stromdurchgang zwei kleine weiche Eisenstückchen a und a' tragen und die Zahl der Spulenwindungen war so abgeglichen, das bei der Öffnung des ersten Kontaktes des Viskosimeters (am eingeschmolzenen Platindraht a in Figur 1) infolge der auf ein Drittel sinkenden Stromstärke das Eisenstück a in Figur 2 nicht mehr getragen werden konnte und herunterfiel, während die Kraft der

zweiten Spule noch ausreichte, um das Eisenstück a' zu halten, das also noch hängen blieb. Das herunterfallende Eisenstückchen a vermittelte den Kontakt zwischen den beiden Kupferblechfedern b und schloß einen durch den Elektromagneten D führenden Stromkreis, wodurch der eiserne Hebel e angezogen wurde, der beim Herunterschlagen die Stoppuhr G in Betrieb setzte. Der durch D gehende Strom ging zwischen c und c' durch einen dünnen Eisendraht, der durchbrannte, wodurch der Strom durch D wieder unterbrochen wurde, so daß der Hebel e nur solange angezogen



Figur 2.

wurde, wie nötig war, um die Stoppuhr in Gang zu bringen Darauf wurde der Hebel durch die Feder H wieder in seine ursprüngliche Lage zurückgezogen. Alsdann wurde bei Ausführung der Versuche der durch die Spule A^1 führende Strom ausgeschaltet, sodaß nunmehr bei der eigentlichen Messung der Ausflußzeit durch das Druckgefäß nur noch ein Strom von 4 Milliampère ging. Wenn dann beim Ausfließen des Quecksilbers der letzte Konktakt bei a'' geöffnet wurde und gar kein Strom mehr durch das System ging, wiederholte sich dasselbe Spiel bei der Spule A^2 und die Stoppuhr wurde angehalten. Diese Vorrichtung bewährte sich sehr gut und enthob den Beobachter der unangenehmen Aufgabe, längere Zeit hindurch das Galvanometer mit der größten Aufmerksamkeit zu beobachten, um bei Änderung der Stromstärke sofort die Stoppuhr in Gang zu setzen.

Die Genauigkeit, mit der die Ausflußzeiten bei dieser Anordnung bestimmt werden konnten, war bei Atmosphärendruck 0.1 Prozent. Bei hohen Drucken war die Genauigkeit stets ge-

ringer, die Abweichungen betrugen bei allen Messungen im Mittel 1 bis 1½ Prozent; waren sie größer, so wurde der Versuch verworfen; solche größeren Abweichungen wurden stets dadurch hervorgerufen, daß die Kapillare durch feine Partikelchen verstopft oder das Viskosimeter irgendwie beschädigt war. Kontrollversuche wurden so ausgeführt, daß nach jedem Versuch wieder die Ausflußzeit bei Atmosphärendruck und zu Schluß der Versuchsreihe nochmals bei einem beliebig gewählten höheren Druck bestimmt wurde. Die Versuche mußten dann bei Atmosphärendruck übereinstimmen und der letzte Versuch mußte sich zwanglos in die vorher bestimmte Kurve einfügen lassen.

Korrektionen: Als Korrektionen, die bei den Messungen einzuführen wären, kommen in Betracht die Wirkungen, die durch die Kompression des Viskosimeterglases, der zu untersuchenden Flüssigkeit und des Quecksilbers verursacht werden.

Die Kompressibilität α des Viskosimeterglases fällt gerade heraus, weil zwar infolge der Volumenverkleinerung des Gefäßes und der Verkürzung der Kapillare die Ausflußzeit sich propotional α^4 verkleinert, aber wiederum wegen der Verkleinerung des Kapillarenradius proportional α^4 vergrößert wird. In der Tat zeigten auch Versuche an Äther, die mit zwei ganz verschiedenen Viskosimetern ausgeführt waren, gleiche Resultate, wie aus Tabelle 1

Tabelle 1.

Ausflußzeiten von Äthyläther bei 20° gemessen mit zwei Apparaten aus verschiedenen Glassorten und reduziert auf 300 sec beim Druck 1.

Viskosimeter I Druck	Viskosimeter I Auslaufzeit	Viskosimeter II Druck	Viskosimeter II Auslaufzeit
1 kg	300 sec	1 kg	300 sec
1000 „	590 „	1070 „	619 „
2000 „	940 „	2000 „	945 „
2500 „	1210 „	2500 „	1195 „

ersichtlich ist. Das eine Viskosimeter I war aus gewöhnlichem Geräteglas angefertigt, das eine um etwa 20 Prozent größere Kompressibilität hat, wie das Jenenser Thermometerglas 16^{III}, aus dem das Viskosimeter II angefertigt war. I hatte eine Kapillare von 0.30 mm Durchmesser, II eine solche von 0.35 mm Durchmesser.

Durch die Kompression der Versuchsflüssigkeit erleidet das Quecksilber im Viskosimeter, dessen spezifischem Gewicht bei dieser Versuchsanordnung die Ausflußzeit proportional ist, beim Drucke $p = x$ einen Auftrieb, dessen Größe durch einen Faktor $\frac{V_{p=1}}{V_{p=x}}$ ausgeglichen wird, wenn V das spec. Volumen der Untersuchsflüssigkeit beim Druck p bedeutet. Die ausfließende Gewichtsmenge ändert sich ebenfalls mit dem Druck, infolge der erlittenen Kompression, und wenn man die Ausflußzeiten für gleiche ausfließende Gewichtsmengen wie beim Druck $p = 1$ angeben will, muß man sie multiplizieren mit einem Faktor $\frac{V_{p=x}}{V_{p=1}}$, der also das Reciproke des ebenerwähnten Faktors ist, d. h. die gemessenen Ausflußzeiten beziehen sich ohne Anbringung einer Korrektion immer auf die gleichen ausfließenden Gewichtsmengen bei der betreffenden Temperatur, wie beim Druck 1. Hierbei ist die äußerst kleine Kompressibilität des Quecksilbers, wodurch die wirkende Kraft etwas vergrößert, die Ausflußzeiten also etwas verringert werden, noch nicht in Betracht gezogen. Die Änderung, die durch die Kompressibilität des Quecksilbers verursacht wird, beträgt bei 0° und 3000 kg Druck noch nicht 1 Prozent, ist also äußerst gering; die hierfür einzuführende Korrektion besteht darin, daß man die gemessenen Ausflußzeiten mit einem Faktor multipliziert, der das Verhältnis der Dichte des Quecksilbers beim Druck 1 und beim Versuchsdruck ist. Diese Korrektionen sind bei den in den Tabellen 2—4 angegebenen Zahlen eingeführt, wobei die von Bridgman[1]) mit großer Sorgfalt und Genauigkeit gemessenen Kompressibilitäten des Quecksilbers benutzt sind.

Versuchsresultate.

Zur Untersuchung gelangten die Stoffe Äthyläther, Äthylalkohol und Schwefelkohlenstoff. Sämtliche Stoffe wurden durch Destillation unter Zusatz der zur Reinigung und Entwässerung üblichen Stoffe gereinigt. In den folgenden Tabellen 2 bis 4 sind die Versuchsresultate für die verschiedenen Versuchstemperaturen und Drucke angegeben. Die Genauigkeit der angegebenen Werte beträgt im Mittel 1 bis 1½ Prozent. In der ersten Horizontalreihe sind unter t die gemessenen Ausflußzeiten angegeben,

---

1) Bridgman, Proc. of the Am. Acad. of Arts and Sc. 44, S. 278. 1909.

Tabelle 2.

Innnere Reibung des Äthyläthers in Abhängigkeit von Druck und Temperatur.

Temperatur: $\vartheta = 0^0$.

Druck in kg:	1	400	1030	1480	2075	2325	2784
Auslaufzeit t:	358.5″	476	667	844	1112,6	1239	1516
Reibung: für gleiche Mengen $\eta = \eta_g$	0.00286	0.00380	0.00540	0.00673	0.00888	0.00989	0.01208
Reibung: für gleiche Volumina	—	0.00396	0.00595	0.00762	0.01025	0.01160	0.01430

Temperatur: $\vartheta = 20^0$.

Druck in kg:	1	500	1010	1435	2060	2745	3040
t:	286″	427,4	555	682	893	1187	1344
η:	0.00234	0.00350	0.00455	0.00559	0.00733	0.00972	0.01100
η_g:	0.00253	0.00363	0.00473	0.00580	0.00761	0.01009	0.01152
η_v:	—	0.00375	0.00510	0.00642	0.00848	0.01177	0.01345

Temperatur: $\vartheta = 34^0$.

Druck in kg:	1	360	1000	1570	2067	2745
t:	250″	327	454	580	720	1002
η:	0.00212	0.00277	0.00385	0.00492	0.00611	0.00850
η_g:	0.00226	0.00296	0.00411	0.00525	0.00652	0.00907
η_v:	—	0.00296	0.00433	0.00577	0.00719	0.00990

Tabelle 3.

Innere Reibung des Schwefelkohlenstoffs in Abhängigkeit von Druck und Temperatur.

Temperatur: $\vartheta = 0.^0$.

Druck in kg:	1	495	1200	1900	2440	3000
t:	204,8″	261	358	460	602	771
$\eta = \eta$	0.00440	0.00560	0.007685	0.00988	0.01292	0.01653
η_v	—	0.00578	0.008245	0.01088	0.01450	0.01862

Temperatur: $\vartheta = 20^0$.

Druck in kg:	1	1105	1570	1970	2310	2780
t:	175	285	348	410	470	569
η:	0.003758	0.00612	0.00747	0.00881	0.01008	0.0122
η_g:	0.003893	0.00625	0.00762	0.00900	0.01044	0.01264
η_v:	0.003758	0.00655	0.00823	0.00982	0.01137	0.01398

Temperatur: ϑ — 40°.

Druck in kg:	1	510	940	1300	1950	2800	2960
t:	150	180	205	235	290	420	458
η:	0.003221	0.003865	0.00440	0.00494	0.00623	0.00902	0.00984
η_g:	0.003367	0.004040	0.00460	0.00516	0.00652	0.00943	0.01028
η_v:	—	0.004050	0.00473	0.005405	0.00703	0.01048	0.01147

Tabelle 4.

Innere Reibung des Äthylalkohols in Abhängigkeit von Druck und Temperatur.

Temperatur; ϑ = 0°.

Druck in kg:	1	400	1000	1630	1950	2600
t:	405″	520	678	943	1030	1310
$\eta = \eta_g$:	0.01770	0.02275	0.02965	0.04127	0.04507	0.05730
η:	—	0.02347	0.03173	0.04535	0.05027	0.06520

Temperatur: ϑ = 15,1°.

Druck in kg:	1	210	843	1600	1884	2550
t:	300″	349.5″	484	640	697	880
η:	0.01313	0.01528	0.02108	0.02800	0.03047	0.03852
η_g:	0.01333	0.01551	0.02142	0.02846	0.03097	0.03913
η_v:	0.01313	0.01532	0.02212	0.03048	0.03355	0.04335

Temperatur: ϑ = 30°.

Druck in kg:	1	800	1560	2335	3000
t:	227,5″	330,8″	425	547	655
η:	0.009895	0.01446	0.01858	0.02394	0.02910
η_g:	0.01022	0.01492	0.01918	0.02473	0.03005
η_v:	0.009895	0.01494	0.01998	0.02660	0.03282

Temperatur: ϑ = 53,5°.

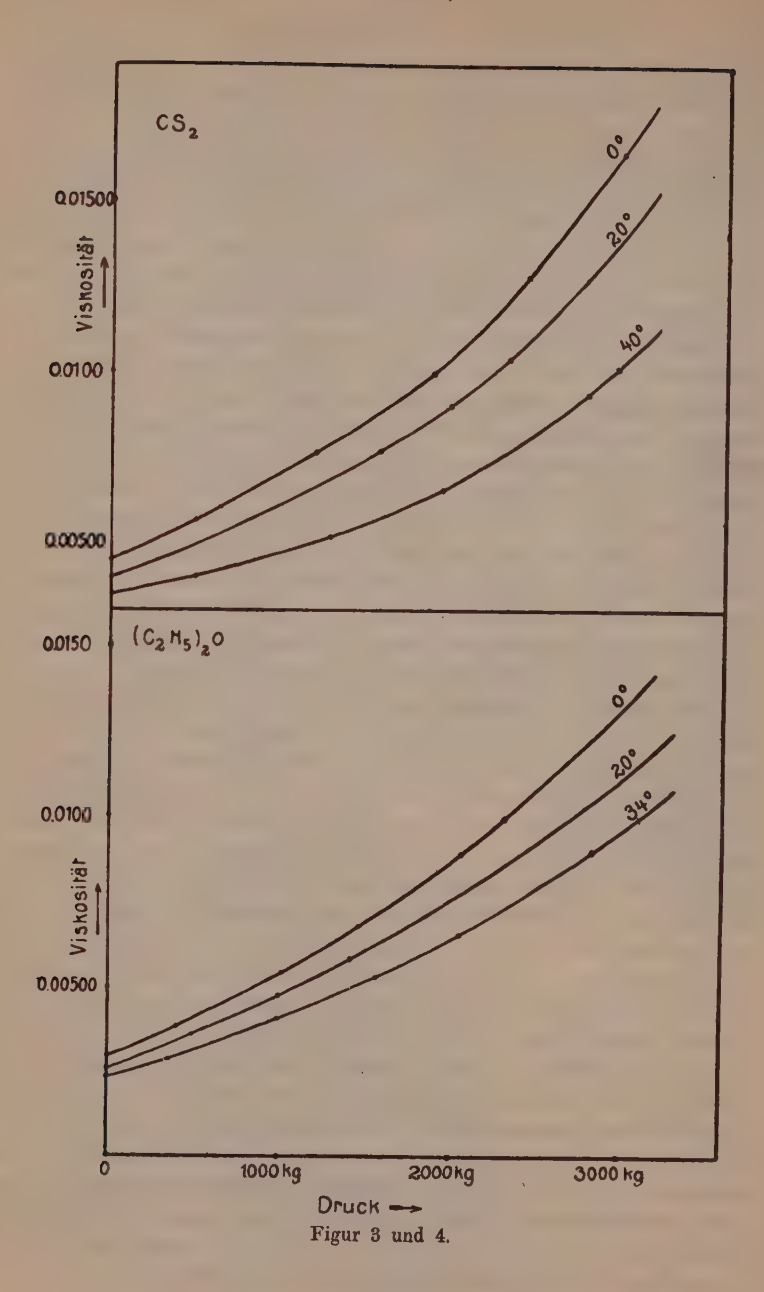
Druck in kg:	1	810	1800	2820	3020
t:	150″	200	258.5	350	380
η:	0.006565	0.008755	0.01130	0.01531	0.01662
η_g:	0.006950	0.00928	0.01197	0.01622	0.01761
η_v:	0.006565	0.00891	0.01216	0.01705	0.01862

die sich also, wie vorher ausgeführt, immer auf die gleiche ausfließende Gewichtsmenge, wie beim Druck 1 bei der betreffenden Versuchstemperatur beziehen. In der zweiten Horizontalreihe befinden sich unter η die aus diesen Zahlen berechneten Koeffizienten

der inneren Reibung unter Zugrundelegung der für den Druck 1 aus der Literatur bekannten Zahlen. In der dritten Horizontalreihe sind unter der Rubrik η_g die Koeffizienten der inneren Reibung berechnet, die sich auf die Ausflußzeiten für gleiche ausfließende Gewichtsmengen wie bei der Temperatur 0° und den Druck $p = 1$ beziehen. Die so erhaltenen Reibungskoeffizienten sind für die Temperaturen über 0° etwas größer, als die in der zweiten Horizontalreihe unter η. Ihre Angabe ist notwendig für die Betrachtung des Verlaufs der isometrischen Kurven, wo man bei demselben Volumen die gleiche Gewichtsmenge auslaufender Substanz betrachten will, um zu sehen, wie sich der Reibungskoeffizient mit der Temperatur längs dieser Kurven ändert. In der vierten Horizontalreihe der Tabellen 2 bis 4 sind schließlich unter η_v die Koeffizienten der inneren Reibung in der für Atmosphärendruck gebräuchlichen Weise angegeben, also unter Zugrundelegung der Ausflußzeiten für gleiche ausfließende Volumina. Die Berechnung der in den Horizontalreihen 3 und 4 angegebenen Zahlen geschah aus den Zahlen der ersten Horizontalreihe unter Benutzung der von Amagat[1]) bestimmten Volumina bei verschiedenen Drucken und Temperaturen. In den beigegebenen Figuren 3 bis 5 ist der Verlauf der inneren Reibung in Abhängigkeit vom Druck graphisch wiedergegeben. (S. p. 12/13.)

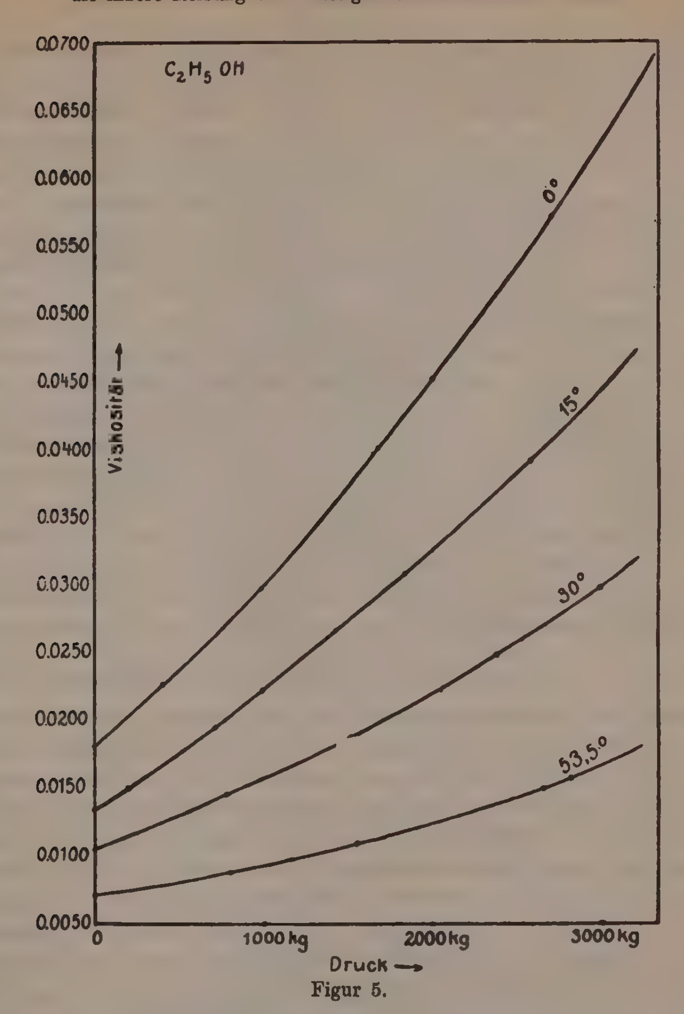
Bei allen drei untersuchten Stoffen nimmt die Reibung bis zu einem Druck von etwa 1500 kg nahezu linear mit dem Druck zu, bei höheren Drucken stärker. Am steilsten verlaufen die Kurven für Äthylalkohol, viel weniger steil die für Äther, und am schwächsten geneigt gegen die Druckachse sind die Kurven für Schwefelkohlenstoff. Trotzdem ist jedoch der relative Druckeinfluß nicht so sehr verschieden für die drei Stoffe; am kleinsten ist er beim Schwefelkohlenstoff, dann kommt Äthylalkohol, und am größten ist der relative Druckeinfluß auf die innere Reibung beim Äthyläther. Während beim Äther und beim Schwefelkohlenstoff der Druckeinfluß mit steigender Temperatur sich wenig oder garnicht ändert (der Druck, bei dem die innere Reibung das Doppelte von der Reibung beim Druck 1 beträgt, ist ungefähr konstant bei verschiedenen Temperaturen), ist beim Alkohol ein starker Einfluß der Temperatur auf den Druckeinfluß zu bemerken; bei 53.5° ist der Druckeinfluß um mehr als die Hälfte kleiner geworden als bei 0°. Bei 0° ist beim Alkohol die innere Reibung bei einem Druck von 900 kg doppelt so groß als beim Druck 1,

1) Amagat, Ann. de chim. et de phys. (6) 29, S. 505.



CS_2
0.01500
Viskosität
0.0100
0.00500
0°
20°
40°
$(C_2H_5)_2O$
0.0150
0.0100
Viskosität
0.00500
0°
20°
34°
0
1000 kg
2000 kg
3000 kg
Druck

Figur 3 und 4.



Figur 5.

und bei 53.5° ist die innere Reibung des Alkohols erst bei einem Druck von 2200 kg doppelt so groß als bei Atmosphärendruck. Die Verlängerung der Reibungskurven des Äthers zu negativen Drucken hin schneiden sich nahezu bei einem Druck von — 1200 kg auf der Abscissenachse. Es würde also in diesem Punkte gleichzeitig mit dem Verschwinden des Temperatureinflusses auf die innere Reibung diese Größe selber Null werden. Ob diesem auffallenden Ergebnis eine tiefere Bedeutung beigemessen werden kann, läßt sich leider wegen der kleinen Zahl der vorliegenden

Versuchsresultate nicht feststellen. Beim Alkohol findet sich dieses Ergebnis nicht, ebensowenig beim Schwefelkohlenstoff, wo sich die Druck-Reibungskurven nicht in einem Punkte schneiden; auch treffen sie sich bei diesen Stoffen schon oberhalb des Nullpunktes der Viskosität. Nun ist Alkohol ein stark assoziierter Stoff, dessen Assoziationsgrad sich mit Druck und Temperatur stark ändert, und auch Schwefelkohlenstoff scheint ein wenig assoziiert zu sein; die Eötvös'sche Konstante ist für Schwefelkohlenstoff 2.02, für Äthyläther 2.17[1]).

Aus der experimentell festgestellten Tatsache, daß der Druckeinfluß auf die innere Reibung mit wachsendem Druck zunimmt, wäre zu erwarten, daß der Druckeinfluß bei Flüssigkeiten mit höherem Binnendruck größer wäre, als bei solchen mit kleinerem Binnendruck, wenn der Binnendruck einen gleichen Einfluß auf die innere Reibung hat, wie ein äußerer Druck. Diese Erwartung trifft jedoch nicht zu. Die Binnendrucke von Äther bezw. Äthylalkohol und Schwefelkohlenstoff sind nach Tammann[2]) 2792 bezw. 2911 und 3691 kg; sie verhalten sich zu einander, wie 1:1,04:1,36; der Druckeinfluß auf die innere Reibung von Äther, Alkohol und Schwefelkohlenstoff verhält sich bei diesen Flüssigkeiten etwa wie $1:1:\frac{1}{1,6}$, also er ist bei den untersuchten Flüssigkeiten um so größer, je kleiner der Binnendruck ist. Bei Gasen, bei denen der Binnendruck zu vernachlässigen ist, ist bekanntlich nach Maxwell die innere Reibung unabhängig vom Druck. Die Verlängerungen der Reibungskurven zu negativen Drucken schneiden die Abscissenachse bei um so größeren negativen Drucken, je größer der Binnendruck der betreffenden Flüssigkeit ist. Es tritt hier also ein Einfluß der Molekularattraktion zu Tage, der sich z. B. auch schon bei den zweifellos vorhandenen Beziehungen zwischen Viskosität und Dampfdruck[3]) gezeigt hat. Für Äther und Schwefelkohlenstoff bleibt das Verhältnis der Viskositäten bei verschiedenen Temperaturen nahezu dasselbe, d. h. die relative Änderung der Viskosität mit der Temperatur scheint bei einer bestimmten Temperatur unabhängig vom Druck zu sein. Für Alkohol trifft das nicht mehr zu, für Alkohol ist der Temperatureinfluß auf die innere Reibung mit wachsendem Druck größer. Wie aus den in Figur 3—5 wiedergegebenen Druck-Reibungsisothermen ersichtlich ist, ist bei tieferer

---

1) Ramsay u. Shields (Zs. f. phys. Chem. 12. S. 433. 1893.)
2) Tammann, Ann. d. Phys. [4] 37, S. 999. 1912.
3) Faust, Zs. f. phys. Chem. 79. S. 97. 1912.

Temperatur der Einfluß des Druckes auf die Viskosität größer, als bei höherer Temperatur, die Isothermen laufen bei hohen Drucken immer mehr auseinander, die Isobaren verlaufen also bei hohen Drucken steiler, als bei niedrigen.

Die Viskosität nimmt bei konstant gehaltener Temperatur etwas stärker, als proportional mit dem Druck zu.

Man kann sich bei Betrachtung der Figuren 3 bis 5 leicht ein Bild von der Temperatur-Druck-Reibungs-Fläche machen. Es ist eine gegen die Temperatur-Druckebene konvex gekrümmte Fläche, die bei höheren Drucken zu höheren Reibungswerten ansteigt und außerdem bei höheren Drucken stärker zur Temperaturachse geneigt ist, als bei niedrigen Drucken.

Die innere Reibung ist nach Maxwell[1]) aufzufassen als ein Maß für die Diffussion der Bewegungsgröße der Moleküle einer betrachteten Schicht in eine benachbarte Schicht von Molekülen, die eine kleinere Geschwindigkeitskomponente in einer bestimmten Richtung hat, als die erste Schicht. Bei der üblichen Betrachtungsweise, bei der den Viskositätskoeffizienten die Ausflußzeiten für gleiche ausfließende Volumina zugrunde gelegt sind, wird also erörtert, wieviel Bewegungsgröße in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit geht. Nun ist die Bewegungsgröße eine Eigenschaft oder ein Zustand der einzelnen Moleküle und es erscheint daher zweckmaßig, diesen Umstand bei der Betrachtung in den Vordergrund treten zu lassen und zu diskutieren, wieviel Bewegungsgröße unter verschiedenen äußeren Umständen in der Zeiteinheit immer von der gleichen Anzahl von Molekülen in die benachbarte Molekülschicht hinwegdiffundiert, und es sind dementsprechend in der folgenden zahlenmäßigen Diskussion der Versuchsresultate die unter η_g in den Tabellen angegebenen Reibungskoeffizienten benutzt worden.

Wir wollen zunächst zur Betrachtung der Reibungsisobaren übergehen, die uns über die Temperaturabhängigkeit der Reibung unterrichten. In den Tabellen 5 sind immer für gleiche Temperaturintervalle die längs der Isobaren erhaltenen Reibungskoeffizienten zusammengestellt und außerdem unter $\Delta\eta$ die Differenzen zwischen je zwei auf einer Isobaren liegenden Werten angegeben, um über die $\left(\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}\right)_p$-Werte einen Überblick zu bekommen.

1) Maxwell, Theorie der Wärme.

Tabelle 5.

Reibungsisobaren des Äthers.

	0°		17°		34°	Druck
	0.00400		0.00362		0.00325	500 kg
$\Delta\eta$		0.00038		0.00037		
	0.00535		0.00472		0.00415	1000 „
$\Delta\eta$		0.00063		0.00057		
	0.00674		0.00585		0.00495	1500 „
$\Delta\eta$		0.00089		0.00090		
	0.00858		0.00760		0.00643	2000 „
$\Delta\eta$		0.00098		0.00117		
	0.01061		0.00935		0.00800	2500 „
$\Delta\eta$		0.00126		0.00135		
	0.01345		0.01172		0.00996	3000 „
$\Delta\eta$		0.00173		0.00176		

Reibungsisobaren des Schwefelkohlenstoffs.

	0°		20°		40°	Druck
	0.00570		0.00485		0.00386	500 kg
$\Delta\eta$		0.00085		0.00099		
	0.00706		0.00598		0.00466	1000 „
$\Delta\eta$		0.00108		0.00132		
	0.00865		0.00740		0.00560	1500 „
$\Delta\eta$		0.00125		0.00180		
	0.01075		0.00890		0.00680	2000 „
$\Delta\eta$		0.00185		0.00210		
	0.01330		0.01086		0.00840	2500 „
$\Delta\eta$		0.00244		0.00246		
	0.01650		0.01340		0.01028	3000 „
$\Delta\eta$		0.00310		0.00312		

Reibungsisobaren des Alkohols.

	0°		15°		30°	Druck
	0.01780		0.01340		0.01020	1 kg
$\Delta\eta$		0.00440		0.00320		
	0.02395		0.01828		0.01317	500 „
$\Delta\eta$		0.00567		0.00511		
	0.03100		0.02293		0.01608	1000 „
$\Delta\eta$		0.00897		0.00685		
	0.03800		0.02755		0.01840	1500 „
$\Delta\eta$		0.01045		0.00915		

	0°		15°		30°	Druck
	0.04660		0.03228		0.02250	2000 kg
$\Delta\eta$		0.01448		0.00978		
	0.05550		0.03710		0.02610	2500 „
$\Delta\eta$		0.01840		0.01100		

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß die $\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}$-Werte mit wachsendem Druck zunehmen, daß also die Reibungsisobaren bei höheren Drucken steiler verlaufen, als bei niedrigen Drucken, und weiter ergibt sich aus den Tabellen für Äther und Schwefelkohlenstoff, daß bei diesen Stoffen die $\left(\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}\right)_p$-Werte sich (besonders bei höheren Drucken) nicht mit der Temperatur ändern, daß also die $\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\vartheta^2}\right)_p$-Werte bei höheren Drucken Null werden. Während beim Äther dies schon bei Drucken von 500 kg angenähert der Fall zu sein scheint, scheint beim Schwefelkohlenstoff diese Beziehung erst bei Drucken über 2000 kg angenähert erfüllt zu sein, für Alhohol ist sie nicht erfüllt. Es scheint also in Gebieten kleiner Volumina und hoher Drucke angenähert die Beziehung erfüllt zu sein:

1) $$\eta = K(A-\vartheta),$$

d. h. die Isobaren der inneren Reibung verlaufen für nicht assoziierte Flüssigkeiten bei höheren Drucken innerhalb der Fehlergrenzen gradlinig.

Um über die Volumenabhängigkeit der inneren Reibung Aufschluß zu erhalten, können wir die Tammannsche Zustandsgleichung benutzen. Diese lehrt, daß bei hohen Drucken bei konstant gehaltenem Druck das Volumen sich proportional mit der Temperatur ändert; führen wir die Tammannsche Gleichung der Volumenisobaren in 1) ein, so erhalten wir durch Elimination von ϑ eine Gleichung von der Form:

2) $$\eta = K'(A'-v),$$

d. h. in dem Gültigkeitsbereich der Tammannschen Zustandsgleichung muß, wenn Gleichung 1) erfüllt ist, die innere Reibung eine gradlinige Funktion des Volumens und bei konstant gehaltenem Volumen konstant sein.

In der folgenden Tabelle 6 sind nun zur Prüfung der Gleichung 2) die Volumina (mit zugehörigen Temperaturen) zusammengestellt, bei denen der betreffende Stoff konstante innere Reibung hat. Die

Tabelle 6 wurde erhalten, indem durch Ziehen von horizontalen Linien in den Figuren 3 bis 6 die Punkte gleicher Reibung auf den verschiedenen Isothermen und die dazu gehörigen Druckwerte auf der Abscisse ermittelt wurden. Alsdann wurden aus den Amagatschen Tabellen No. 37, 38 und 41 die zu diesen Druck- und Temperaturwerten gehörigen Volumina bestimmt. Dies geschah, indem die von Amagat tabellarisch angegebenen isometrischen Kurven aufgezeichnet und daraus für die Temperaturen, bei denen die Ausflußzeiten gemessen waren, die Volumenisothermen konstruiert wurden, aus denen man dann zu den oben ermittelten Druckwerten die zugehörigen Volumina ablesen konnte. Die mit einem Stern versehenen Zahlen der Tabelle sind durch graphische Extrapolation gewonnen.

Tabelle 6.

Volumina und zugehörige Drucke, bei denen die innere Reibung konstant ist; das Volumen bei 0° und Atmosphärendruck als Einheit genommen.

a) Äther:

1) $\eta_g = 0.0055$		0°	20°	34°
	Druck	1060 kg	1350 kg	1650 kg
	Volumen	0.911	0.910	0.904
2) $\eta_g = 0.0075$				
	Druck	1700 kg	2000 kg	2350 kg
	Volumen	0.880	0.880	0.878
3) $\eta_g = 0.0099$				
	Druck	2350 kg	2700 kg	3000 kg
	Volumen	0.858	0.858	0.858

b) Schwefelkohlenstoff:

1) $\eta_g = 0.00445$		0°	20°	40°
	Druck	1 kg	300 kg	800 kg
	Volumen	1.000	0.998	0.983
2) $\eta_g = 0.00600$				
	Druck	610 kg	1000 kg	1740 kg
	Volumen	0.962	0.957	0.950
3) $\eta_g = 0.00900$				
	Druck	1610 kg	1960 kg	2600 kg
	Volumen	0.918	0.918	0.910

c) Äthylalkohol:

1) $\eta_g = 0.0180$		0°	15°	30°	53°
	Druck	1 kg	470 kg	1330 kg	3100 kg
	Volumen	1.000	0.976	0.939	0.891
2) $\eta_g = 0.0240$					
	Druck	510 kg	1120 kg	2220 kg	4020 kg*)
	Volumen	0.966	0.939	0.906	0.884*)
3) $\eta_g = 0.0290$					
	Druck	930 kg	1700 kg	2900 kg	4570 kg*)
	Volumen	0.948	0.914	0.889	0.880*)

Wie aus den Zahlenwerten der Tabelle hervorgeht, scheint es in der Tat, daß *der Äther schon bei Drucken von* 1000 kg, *Schwefelkohlenstoff bei etwas höheren Drucken* (ca. 1500 kg) *dem einfachen durch die Gleichung* 2) *wiedergegebenen Verhalten zustrebt, während Alkohol dieses Verhalten nicht zeigt,* wie auch schon aus dem Verlauf der Isobaren zu erwarten ist.

Die Diffusion der Bewegungsgröße der Moleküle, für die die innere Reibung ein Maß ist, ist also im Gebiete kleiner Volumina und hoher Drucke nur eine lineare Funktion des Volumens. Es diffundiert also bei einer höheren Temperatur in der Zeiteinheit (trotz der infolge der höheren Temperatur größeren Bewegungsgröße der Moleküle) von einer bestimmten Anzahl von Molekülen, die sich in einer bestimmten Richtung bewegen, in eine benachbarte in Ruhe befindliche Molekülschicht nicht mehr Bewegungsgröße, als bei einer niedrigeren Temperatur, wenn man nur durch entsprechende Änderung des Druckes dafür sorgt, daß das Volumen immer konstant bleibt.

Die vorliegenden Untersuchungen haben ergeben, daß bei den untersuchten Flüssigkeiten im Gebiete kleiner Volumina die innere Reibung einem Verhalten zuzustreben scheint, das durch eine lineare Funktion des Volumens sich ausdrücken läßt, und die Fläche, die die Abhängigkeit der inneren Reibung von Druck und Volumen darstellt, bei höheren Drucken eine Ebene wird.

Zusammenfassung.

1) Es wurde ein Viskosimeter und eine Meßvorrichtung beschrieben, die brauchbar ist zur Messung der inneren Reibung von Flüssigkeiten bei allseitig gleichen Drucken bis über 3000 kg pro

Quadratcentimeter. Die an den Resultaten anzubringenden Korrektionen wurden diskutiert.

2) Es wurde die innere Reibung von Äthyläther bei 0°, 20° und 34°, von Schwefelkohlenstoff bei 0°, 20° und 40° und von Äthylalkohol bei 0°, 20°, 40° und 54° in Abhänigkeit vom Druck bis zu Drucken von 3000 kg pro Quadratcentimeter untersucht

3) Es ergab sich, daß in Gebieten kleiner Volumina, in denen nach Tammann die Molekularattraktion konstant ist, die innere Reibung einem Verhalten zustrebt, das sich durch eine einfache lineare Funktion des Volumens ausdrücken läßt.

Göttingen, Institut für physikalische Chemie, 1913.

Zur Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.

Von

C. Carathéodory.

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung am 19. Juli 1913.

1. In einer vor kurzem der Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegten Note hat Herr Koebe eine Erweiterung des Spiegelungsprinzips von Schwarz formuliert, die man als Hülfssatz benutzen kann um die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen zu untersuchen [1]).

Der Beweis, den Herr Koebe für diesen Satz vorgeschlagen hat, bereitet aber recht große Schwierigkeiten, wenn man ihn näher verfolgen will; es ist daher vielleicht nicht überflüssig auf anderem, gangbarerem Wege zu zeigen, daß die Koebesche Behauptung in der Tat richtig ist.

Es sei eine Halbkreislinie K gegeben und ihr Durchmesser mit AB bezeichnet. Wir betrachten unendlich viele analytische Querschnitte $C_1, C_2, \ldots$ des zwischen K und AB liegenden Gebietes, die zwei Punkte von K verbinden und keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß für jedes $n \geqq 2$, der Querschnitt C_n die Kurven C_{n-1}, und C_{n+1} voneinander trennt; von den Querschnitten C_n wird außerdem vorausgesetzt, daß das Maximum ihrer Entfernung vom Durchmesser AB gegen Null konvergiert, wenn n unbeschränkt wächst. Mit G_n bezeichnen wir dasjenige von C_n innerhalb des Halbkreises bestimmte Teilgebiet, das C_{n+1} nicht enthält; die Gebiete G_n sind ineinander ge-

---

1) Ränderzuordnung bei konformer Abbildung Gött. Nachr. Mathem. phys. Klasse 1913, p. 286.

schachtelt und es ist

$$G_1 < G_2 < G_3 < \cdots$$

Es sei jetzt, wenn P einen variablen Punkt der Peripherie des Halbkreises K bedeutet, mit $\varphi(P)$ eine stetige und beschränkte Funktion bezeichnet; wir setzen aber ausdrücklich voraus, daß $\varphi(P)$ in den Endpunkten A, B von K nicht definiert zu sein braucht.

Mit $u_n (n = 1, 2, \ldots)$ bezeichnen wir ferner diejenigen eindeutig bestimmten Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = 0$, die im jeweiligen Gebiete G_n regulär sind, auf demjenigen Teil des Randes von G_n, der auf K liegt, die Werte $\varphi(P)$ annehmen und auf dem Teile dieses Randes, der durch C_n gebildet wird, verschwinden. Mit U bezeichnen wir die Potentialfunktion, die im Innern des Halbkreises regulär ist, auf K die Werte $\varphi(P)$ und auf AB den Wert Null annimmt.

Es wird behauptet, daß im Inneren des Halbkreises die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} u_n = U$$

überall erfüllt ist.[1])

Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir den obigen Satz unter der Voraussetzung

$$\varphi(P) \geqq 0 \tag{1}$$

beweisen. Die Bedingungen des Problems sind nämlich alle linear; ist also unser Satz für zwei spezielle Funktionen φ_1 und φ_2 bewiesen, so gilt er auch für $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Jede stetige und beschränkte Funktion kann aber als Differenz von zwei stetigen, beschränkten und positiven Funktionen angesehen werden.

Die Bedingung (1) hat zur Folge, daß sämtliche Funktionen u_n sowie auch die Funktion U innerhalb ihres Definitionsbereiches nicht negativ sind. Ferner ist auf dem Rande des Gebietes G_n

$$u_{n+p} - u_n \geqq 0;$$

diese Ungleichheit gilt also auch für sämtliche inneren Punkte dieses Gebietes. Ähnlich schließt man, daß für alle Punkte von G_n

$$U - u_n \geqq 0$$

---

1) Der etwas allgemeinere Satz, den Herr Koebe aufgestellt hat, läßt sich sofort auf den obigen zurückführen; übrigens liefert letzterer genau dieselben Dienste als Hülfssatz um die Ränderzuordnung zu untersuchen, wie der andere.

ist. Zusammenfassend haben wir also für alle inneren Punkte von G_n

(2) $$0 \leqq u_n \leqq u_{n+1} \cdots \leqq u_{n+p} \cdots \leqq U.$$

Da nun nach unseren Voraussetzungen über die Querschnitte C_n die Gebiete G_n mit wachsendem n unseren Halbkreis allmählich ganz ausfüllen, so folgt aus (2), daß die Funktionsfolge u_n in jedem inneren Punkte dieses Halbkreises konvergieren muß; man kann also schreiben

$$\lim_{n=\infty} u_n = V.$$

Aus bekannten Sätzen der Potentialtheorie (z. B. aus dem Harnackschen Satz, der aber hier durch viel elementarere Betrachtungen ersetzt werden kann) folgt, daß V im ganzen Inneren des Halbkreises eine reguläre Potentialfunktion darstellt; ferner folgt aus (2) für jedes n

(3) $$0 \leqq u_n \leqq V \leqq U.$$

Es sei $P_1, P_2, \ldots$ eine unendliche Folge von inneren Punkten des Halbkreises, die gegen einen Punkt P seiner Peripherie konvergieren, der von A und B verschieden sein mag; alle diese Punkte liegen, infolge unserer Voraussetzungen über die Kurven C_n, innerhalb eines gewissen Gebietes G_n, und man hat wegen (3) für jedes m

$$u_n(P_m) \leqq V(P_m) \leqq U(P_m).$$

Ferner hat man infolge eines bekannten Resultats von H. A. Schwarz[1])

$$\lim_{m=\infty} u_n(P_m) = \lim_{m=\infty} U(P_m) = \varphi(P),$$

also auch

$$\lim_{m=\infty} V(P_m) = \varphi(P).$$

Zweitens sei $Q_1, Q_2, \ldots$ eine Folge von unendlich vielen Punkten, die gegen einen inneren Punkt Q des Durchmessers AB unseres Halbkreises konvergieren. Man hat für jedes m

$$0 \leqq V(Q_m) \leqq U(Q_m)$$

und außerdem

---

1) Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Ges. Abh. II p. 175.

$$\lim_{m=\infty} U(Q_m) = 0,$$

folglich auch

$$\lim_{m=\infty} V(Q_m) = 0.$$

Die reguläre Potentialfunktion $(U - V)$ ist also auf dem ganzen Rande ihres Definitionsgebietes mit einziger Ausnahme der beiden isolierten Punkte A und B stetig und gleich Null. Sie ist überdies beschränkt, da U nicht größer als die obere Grenze von $\varphi(P)$ sein kann. Stellt man sie also durch ein dem Poissonschen analoges Kurvenintegral dar, so sieht man, daß sie identisch verschwinden muß, womit der behauptete Satz bewiesen ist.

2. Es gibt nunmehr drei verschiedene Wege um die Ränderzuordnung bei der konformen Abbildung von beliebigen schlichten Gebieten aufeinander zu untersuchen.

Herr Osgood hat einige der wichtigsten Sätze über diesen Gegenstand schon 1903 ohne Beweis veröffentlicht[1]), eine Methode um diese Sätze abzuleiten, aber erst kürzlich zusammen mit Herrn E. Taylor gegeben[2]). Inzwischen hatten über dieses selbe Abbildungsproblem Herr Study[3]) und ich[4]) ausführliche Untersuchungen publiziert, indem wir von einem Satze des Herrn Fatou ausgingen, mit dessen Hülfe man vollständigere Resultate erzielen kann, als mit der Methode von Osgood-Taylor oder auf dem neuen von Koebe eingeschlagenen Weg.[5])

Es folgt nämlich aus diesem Fatouschen Satze, daß z. B. bei der Abbildung eines einfach zusammenhängenden Gebietes auf einen Kreis den Durchmessern des Kreises immer Querschnitte (d. h. Kurven mit wohlbestimmten Endpunkten) entsprechen außer höchstens für eine Menge von Durchmessern, deren Endpunkte auf dem Kreise das (Lebesguesche) Maß Null besitzen. Dieses Resultat erscheint aber um so überraschender, je tiefer man sich in den Gegenstand hineindenkt.

---

1) „On the transformation of the boundary in case of conformal mapping" Bull. Am. Math. Soc. (2) 9, 1903. Diese Note war mir früher entgangen, so daß ich sie bei meinen weiter unten zitierten Untersuchungen leider nicht habe benutzen können.

2) Conformal Transformations on the boundaries of their Regions of Definition (Trans. of the Amer. Math. Soc. Vol. XIV. No. 2 p. 277—298 April 1913).

3) Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, II, von E. Study (Teubner 1913).

4) Math. Ann. Bd. 73 pag. 305—320 und 323—370.

5) Herr Koebe behauptet dagegen, daß „auch diese weitergehenden Sätze" . . „wesentlich" bereits 1903 durch Osgood gefunden worden seien.

Herr Koebe tadelt, daß dem Beweise des Fatouschen Satzes der Integralbegriff von Lebesgue zu Grunde liegt, und daß dadurch eine bedeutende „Verkomplizierung" entsteht. Die Lebesguesche Theorie ist nun zwar so wichtig und so allgemein bekannt, daß man diese Kritik ruhig hinnehmen kann. Es ist aber möglich in diesem Punkte Herrn Koebe entgegenzukommen und für unseren speziellen Fall des Fatouschen Satzes einen Beweis zu liefern, der nur die allerelementarsten Begriffe der Analysis benutzt. Ein derartiger Beweis, dessen Grundgedanke mir gelegentlich von Herrn E. Schmidt mitgeteilt worden ist, beruht auf folgendem auch an sich interessanten Hilfssatz [1]:

Es seien r, ϑ Polarkoordinaten in der Ebene und $F(r, \vartheta)$ eine (reelle oder komplexe) eindeutige und stetige Funktion im Inneren der Kreisfläche $0 \leqq r < 1$ gegeben. Die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial r}$ soll für alle Punkte im Inneren des Kreises existieren und stetig sein, und bei Einführung der Bezeichnung

$$\left|\frac{\partial F}{\partial r}\right| = p(r, \vartheta)$$

soll außerdem vorausgesetzt werden, daß das Doppelintegral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 p(r, \vartheta)\, dr\, d\vartheta$$

einen endlichen Wert besitzt.

Dann wird behauptet, daß der Grenzwert

$$\lim_{r=1} F(r, \vartheta)$$

für alle Werte von ϑ innerhalb des Intervalls $0 \leqq \vartheta < 2\pi$ existiert, außer höchstens für eine Punktmenge vom Maße Null.

---

1) Herr Schmidt war eigentlich von einem etwas anderen Standpunkt ausgegangen; er stützte sich auf einen Hilfssatz, den er schon seit Jahren in seinen Vorlesungen verwendet: daß nämlich eine Schar von summablen Funktionen $f(n, x)$ die für jedes feste x monoton mit n wachsen, dann und nur dann, bei unbeschränkt wachsendem n gegen eine im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ summable Funktion konvergieren, wenn für jedes endliche n

$$\int_a^b f(n, x)\, dx$$

unterhalb einer festen Grenze bleibt. Dann muß aber auch $\lim_{n=\infty} f(n, x)$ überall in diesem Intervall endlich sein außer höchstens für eine Punktmenge vom Maße Null.

Wegen unserer Voraussetzungen stellt das Doppelintegral

$$\int_0^{2\pi}\int_r^1 p(t,\vartheta)\,dt\,d\vartheta = J(r) \tag{4}$$

eine positive, monoton abnehmende, stetige Funktion von r dar und es ist

$$\lim_{r=1} J(r) = 0. \tag{5}$$

Mit $s(r,\varrho;\vartheta)$ bezeichnen wir die Schwankung der Funktion F bei festgehaltenem ϑ auf der Strecke $r \leqq t \leqq \varrho$; die Funktion $s(r,\varrho;\vartheta)$ ist dann stetig in ihren drei Argumenten und nach Definition gleich der oberen Grenze von

$$\left|\int_{r'}^{\varrho'} \frac{\partial F}{\partial r}\,dr\right|,$$

wenn r' und ϱ' die Bedingungen $0 \leqq r \leqq r' < \varrho' \leqq \varrho < 1$ befriedigen. Nun ist aber

$$\left|\int_{r'}^{\varrho'} \frac{\partial F}{\partial r}\,dr\right| \leqq \int_{r'}^{\varrho'} p(t,\vartheta)\,dt \leqq; \int_r^{\varrho} p(t,\vartheta)\,dt;$$

man hat also

$$s(r,\varrho;\vartheta) \leqq \int_r^{\varrho} p(t,\vartheta)\,dt$$

und folglich, wegen (4)

$$\int_0^{2\pi} s(r,\varrho;\vartheta)\,d\vartheta \leqq J(r) \tag{6}$$

Für $\varrho_2 > \varrho_1$ ist übrigens stets $s(r,\varrho_2,\vartheta) \geqq s(r,\varrho_1;\vartheta)$; es existiert also immer der Grenzwert

$$\lim_{\varrho=1} s(r,\varrho;\vartheta) = S(r,\vartheta), \tag{7}$$

und es ist $S(r,\vartheta)$ entweder endlich und $\geqq 0$ oder gleich $+\infty$. Um unsere Behauptung zu beweisen genügt es zu zeigen, daß stets, außer höchstens für eine Punktmenge vom Maße Null

$$\lim_{r=1} S(r,\vartheta) = 0 \tag{8}$$

ist.

Bedeutet n eine beliebige positive ganze Zahl und bezeichnet man mit $\Delta(r,\varrho;n)$ die Gesamtheit der Werte von ϑ innerhalb des

Intervalls $0 \leqq \vartheta < 2\pi$ für welche

$$s(r, \varrho; \vartheta) > \frac{1}{n}$$

ist, so besteht die Punktmenge $\varDelta(r, \varrho; n)$ aus den inneren Punkten einer endlichen oder abzählbaren Anzahl von Intervallen, deren Gesamtlänge $\delta(r, \varrho, n)$, wegen (6), und weil $s \geqq 0$ ist, der Bedingung

$$\delta(r, \varrho, n) \leqq n\, J(r) \tag{9}$$

genügt. Hält man jetzt r, ϑ und n fest und läßt man ϱ eine abzählbare unendliche Folge von wachsenden Werten

$$\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots$$

durchlaufen, die gegen Eins konvergiert

$$\lim_{k=\infty} \varrho_k = 1,$$

so werden die entsprechenden Intervallmengen

$$\varDelta(r, \varrho_1, n),\ \varDelta\, r, \varrho_2, n), \ldots$$

(weil stets $s(r, \varrho_{k+1}; \vartheta) \geqq s(r, \varrho_k; \vartheta)$ ist) ineinandergeschachtelt sein und gegen eine Intervallmenge $\varDelta(r, n)$ konvergieren, die alle früheren enthält. Bezeichnet man mit $\delta(r, n)$ die Gesamtlänge dieser Intervalle, so wird, weil die rechte Seite von (9) von ϱ unabhängig ist, ebenfalls

$$\delta(r, n) \leqq n\, J(r) \tag{10}$$

sein. Für jeden Wert von ϑ, der in keinem der Intervalle $\varDelta(r, n)$ liegt (und derartige Werte müssen stets existieren, wenn $n\,J(r) < 2\pi$ ist), wird für alle Werte von ϱ

$$s(r, \varrho; \vartheta) \leqq \frac{1}{n}$$

sein und daher, wegen (7), ebenfalls

$$S(r, \vartheta) \leqq \frac{1}{n}. \tag{11}$$

Nun sei ε eine beliebige positive Zahl, die kleiner als 2π ist. Wir können infolge von (5) jeder positiven ganzen Zahl n eine Größe $r_n < 1$ zuordnen, derart daß

$$n\, J(r_n) \leqq \frac{\varepsilon}{2^n}$$

ist; hierauf bilden wir, wie oben die Intervallmengen

$$\Delta(r_n, n). \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

Die Gesamtlänge aller dieser Intervallmengen ist höchstens ε und für jeden Wert ϑ, der zu keinem Intervall dieser Menge gehört, ist für jedes n, sobald $r \geqq r_n$ ist,

$$S(r, \vartheta) \leqq \frac{1}{n}; \tag{13}$$

folglich ist die Bedingung (8) erfüllt.

Die Werte von ϑ, für welche $\lim_{r=1} F(r, \vartheta)$ nicht existiert, liegen also sämtlich in einer Intervallmenge, deren Gesamtlänge beliebig klein gemacht werden kann, sie haben, wie wir beweisen wollten, das Maß Null.

Es ist nicht uninteressant zu bemerken, daß die Konvergenz für alle Werte von ϑ, die der Intervallmenge (12) nicht angehören, gleichmäßig ist; das ist eine unmittelbare Folge der Ungleichheit (13).

Der Fatousche Satz lautet nun:

Ist eine analytische Funktion $f(z)$ im Inneren des Einheitskreises regulär und beschränkt, so existiert

$$\lim_{r=1} f(re^{i\vartheta}) \tag{14}$$

für alle Werte von ϑ außer höchstens für eine Wertmenge vom Maße Null.

Wenn $f(z)$ die Abbildungsfunktion eines ganz im Endlichen liegenden Gebietes ist, so ist dieser Satz eine direkte Folge des soeben bewiesenen Hülfssatzes. Denn der Flächeninhalt des Gebiets ist durch das Integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 |f'(z)|^2 r\,dr\,d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,p^2(r, \vartheta)\,dr\,d\vartheta \tag{15}$$

gegeben und aus der Existenz von (15) folgt ohne weiteres, daß

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 p(r, \vartheta)\,dr\,d\vartheta$$

ebenfalls existiert, und daß also die Voraussetzungen für unseren Hülfssatz erfüllt sind.

3. In meinen oben zitierten Arbeiten habe ich eine Ergänzung zum Fatouschen Satz benutzt, die dahin geht, daß in jedem Intervalle $\overline{\vartheta_0 \vartheta_1}$

$$0 \leqq \vartheta_0 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_1 < 2\pi \tag{16}$$

unter den zu (16) gehörigen Grenzwerten, mindestens drei, von einander verschiedene Werte annehmen müssen, außer wenn $f(z)$ konstant ist. Dieser Zusatz zum Fatouschen Satze kann im Falle, wo unser Hülfssatz gilt, ebenfalls elementar bewiesen werden.

Wir nehmen an, daß nur zwei Grenzwerte existieren, und dürfen dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß diese zwei Zahlen beide auf der Axe des Imaginären liegen; das kann ja immer durch eine Bewegung der Ebene, erreicht werden, in der das abzubildende Gebiet liegt.

Nun betrachte man die im Kreissektor

$$0 < r < 1 \qquad \vartheta_0 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_1$$

eindeutig erklärte Funktion

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f(z)}{iz}\, dz \tag{17}$$

$$\{z_0 = r_0 e^{i\vartheta_0} \quad z = re^{i\vartheta} \quad 0 < r_0 \leqq r\}$$

oder

$$\Phi(z) = \frac{1}{ie^{i\vartheta_0}} \int_{r_0}^{r} \frac{f\left(re^{i\vartheta_0}\right)}{r}\, dr + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} f\left(re^{i\vartheta}\right) d\vartheta. \tag{18}$$

Ich behaupte, daß der reelle Teil von $\Phi(z)$ gleichmäßig nach einem konstanten Wert hinstrebt, wenn r gegen Eins konvergiert und ϑ das Intervall (16) durchläuft. Ist nämlich η eine beliebige feste positive Zahl und M eine endliche obere Schranke von $|f(z)|$, so wähle man die im obigen Beweis unseres Hülfssatzes vorkommenden Zahlen ε und n gemäß den Bedingungen

$$\varepsilon = \frac{\eta}{2M}, \qquad n \geqq \frac{2(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{\eta}.$$

Für $r \geqq r_n$ (wo r_n dieselbe Bedeutung hat, wie oben) ist dann der absolute Betrag des reellen Teiles des zweiten Integrals (18) höchstens gleich η: außerhalb der Intervallmenge (12) ist er nämlich höchstens gleich

$$\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{n} \leqq \frac{\eta}{2}$$

und innerhalb dieser Intervallmenge höchstens gleich

$$\varepsilon M = \frac{\eta}{2}.$$

Der reelle Teil des zweiten Integrals (18) konvergiert also gleichmäßig gegen Null, wenn r gegen Eins strebt; der reelle Teil des ersten Integrals konvergiert für $\operatorname{Lim} r = 1$ gegen eine Zahl, die von ϑ unabhängig ist.

Nach dem gewöhnlichen Spiegelungsprinzip von Schwarz ist also $\Phi(z)$ im Intervall (16) analytisch auf der Peripherie des Kreises $|z| = 1$ und das Gleiche gilt, wegen (17), von $f_1(z)$.

Ist die Funktion $f(z)$ nicht konstant, so muß es dann unendlich viele voneinander verschiedene Grenzwerte (14) geben, und nicht zwei, wie wir angenommen hatten.

Zur Kinematik des Born'schen starren Körpers.

Von

Ludwig Föppl und Percy Daniell.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 19. Juli 1913.

Nach Borns Definition des starren Körpers im Sinn der Relativitätstheorie ist die Bewegung des Körpers durch Angabe des zeitlichen Verlaufes d. h. der Weltlinie eines einzigen Punktes des Körpers bestimmt. Die Weltlinien aller übrigen Punkte sind äquidistant zu der einen vorgegebenen. Bezeichnen wir mit

$$x_0, y_0, z_0, l_0 = it_0$$

die Koordinaten des einen Punktes als Funktionen seiner Eigenzeit τ_0 und mit $x, y, z, l = it$ die Koordinaten irgend eines anderen Punktes des starren Körpers gleichfalls als Funktionen der Eigenzeit τ_0 des gegebenen Weltpunktes, so kann man die Definition des Born'schen starren Körpers in die folgende mathematische Form kleiden:

$$x' : y' : z' : l' = x_0' : y_0' : z_0' : l_0' \tag{1}$$

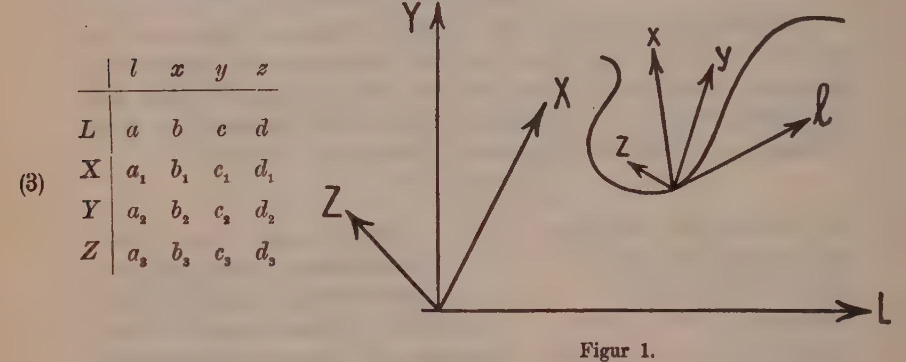
$$(x - x_0)\, x_0' + (y - y_0)\, y_0' + (z - z_0)\, z_0' + (l - l_0)\, l_0' = 0, \tag{2}$$

wobei die Striche Differentiationen nach der Eigenzeit τ_0 bedeuten sollen[1]). Gleichung (1) drückt die Parallelität der Tangenten entsprechender Punkte aus; Gleichung (2) ist die Orthogonalitätsbedingung. Unsere Aufgabe ist es nun, aus den Differential-Gleichungen (1) und (2) x, y, z, l als Funktionen von τ_0 zu bestimmen. Dabei hat τ_0 als Eigenzeit des Punktes 0 die Bedeutung der Bogenlänge auf der Weltlinie des Punktes 0[2]).

1) Die Lichtgeschwindigkeit ist gleich 1 genommen.

2) In dieser Weise führte Herr Prof. Hilbert in einer Vorl. über Elektronentheorie S.-S. 1913 das starre Elektron ein.

Es handelt sich also um die Untersuchung von Raumkurven im 4 dimensionalen Raum, die den Bedingungen (1) und (2) genügen müssen. Diese Bedingungen kann man auch geometrisch deuten, indem man in irgend einem Punkt einer Weltlinie ein Koordinatensystem $l\,x\,y\,z$ befestigt, dessen l-Achse in die Richtung der Tangente an die Weltlinie weist. Die Bedingungen (1) und (2) besagen dann, daß alle Punkte des starren Körpers im zugehörigen $x\,y\,z$ Raum liegen. Unserer weiteren Berechnung legen wir ein festes Koordinatensystem $L\,X\,Y\,Z$ und ein bewegliches $l\,x\,y\,z$ zu Grunde, das mit dem Punkte 0 auf seiner Weltlinie fortschreitet und sich möglichst eng an die Weltlinie anschmiegt, sodaß l mit der Tangente an die Weltlinie zusammenfällt, $l\,x$ die Schmiegungsebene und $l\,x\,y$ den Schmiegungsraum im betrachteten Weltpunkte darstellt. Die Bezeichnungen der Kosinusse der Winkel zwischen den Achsen der beiden Koordinatensysteme ist durch das folgende Schema gegeben:



(3)

	l	x	y	z
L	a	b	c	d
X	a_1	b_1	c_1	d_1
Y	a_2	b_2	c_2	d_2
Z	a_3	b_3	c_3	d_3

Figur 1.

Das Bogenelement ds der gegebenen Weltlinie 0 ist $ds = d\tau_0$. Wir müssen uns die 16 Winkelkosinusse von (3) als Funktionen von s gegeben denken. Zwischen ihnen bestehen natürlich die bekannten Orthogonalitätsbedingungen:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1; \text{ u. s. w.}$$
$$aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1 = 0; \text{ u. s. w.}$$

Da das Koordinatensystem $l\,x\,y\,z$, wie oben erwähnt, sich möglichst eng an die 4 dimensionale Weltlinie anschmiegt, so nehmen die Frenet'schen Formeln, welche Beziehungen zwischen den Winkeländerungen beim Fortschreiten des beweglichen Koordinatensystems und den Krümmungen der Kurve liefern, die folgende Gestalt an[1]):

1) Wir haben die uns für Kurven im 3 dimensionalen Raum bekannten Frenet'schen Formeln sinngemäß auf solche im 4 dimensionalen Raum übertragen.

$$(4)\quad \begin{aligned} &(a) \quad \frac{da}{ds} = \frac{b}{\varrho}. \\ &(b) \quad \frac{db}{ds} = -\frac{c}{\tau} - \frac{a}{\varrho}. \\ &(c) \quad \frac{dc}{ds} = -\frac{d}{\sigma} + \frac{b}{\tau}. \\ &(d) \quad \frac{dd}{ds} = \frac{c}{\sigma}. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten $\frac{1}{\varrho}$ die gewöhnliche Krümmung, $\frac{1}{\tau}$ die erste Torsion und $\frac{1}{\sigma}$ die zweite Torsion der Raumkurve. Dieselben Differentialgleichungen wie (4) gelten auch, wenn man $a\,b\,c\,d$ durch $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ oder $a_2\,b_2\,c_2\,d_2$ oder schließlich durch $a_3\,b_3\,c_3\,d_3$ ersetzt. Da uns der Verlauf der Weltlinie 0 gegeben sein muß, so können wir annehmen, daß uns ϱ, τ und σ als Funktionen von s bekannt sind. In der Tat läßt sich leicht mittelst der Formeln (4) der Zusammenhang zwischen den ϱ, τ, σ und den ursprünglich gegebenen $l_0(s)$, $x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$ herstellen, wenn man bedenkt, daß die in (4) auftretenden Differentialquotienten $\frac{da}{ds}, \frac{db}{ds}, \frac{dc}{ds}, \frac{dd}{ds}$ nichts anderes als bzw. l_0', x_0', y_0', z_0' bedeuten. Es gilt nämlich:

$$(a) \quad \frac{1}{\varrho^2} = l_0''^2 + x_0''^2 + y_0''^2 + z_0''^2.$$

$$(5)(b) \quad \left(\frac{1}{\varrho^2\tau}\right)^2 = \begin{vmatrix} l_0' & x_0' & y_0' \\ l_0'' & x_0'' & y_0'' \\ l_0''' & x_0''' & y_0''' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \\ x_0''' & y_0''' & z_0''' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_0' & z_0' & l_0' \\ y_0'' & z_0'' & l_0'' \\ y_0''' & z_0''' & l_0''' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0' & l_0' & x_0' \\ z_0'' & l_0'' & x_0'' \\ z_0''' & l_0''' & x_0''' \end{vmatrix}^2$$

$$(c) \quad -\frac{1}{\varrho^3\tau^2\sigma} = \begin{vmatrix} l_0' & x_0' & y_0' & z_0' \\ l_0'' & x_0'' & y_0'' & z_0'' \\ l_0''' & x_0''' & y_0''' & z_0''' \\ l_0^{IV} & x_0^{IV} & y_0^{IV} & z_0^{IV} \end{vmatrix}$$

Um nun zur eigentlichen Integration der Differentialgleichungen (1) und (2) überzugehen, führen wir zunächst neue Unabhängige ξ, η, ζ durch die folgenden Beziehungen ein:

$$(6)\quad \begin{aligned} &(a) \quad (l-l_0)a + (x-x_0)a_1 + (y-y_0)a_2 + (z-z_0)a_3 \equiv \Sigma(l-l_0)a = 0 \\ &(b) \quad (l-l_0)b + (x-x_0)b_1 + (y-y_0)b_2 + (z-z_0)b_3 \equiv \Sigma(l-l_0)b = \xi \\ &(c) \quad (l-l_0)c + (x-x_0)c_1 + (y-y_0)c_2 + (z-z_0)c_3 \equiv \Sigma(l-l_0)c = \eta \\ &(d) \quad (l-l_0)d + (x-x_0)d_1 + (y-y_0)d_2 + (z-z_0)d_3 \equiv \Sigma(l-l_0)d = \zeta, \end{aligned}$$

wobei Gleichung (6a) mit Gleichung (2) identisch ist.

Aus den Gleichungen (6) läßt sich leicht $(l-l_0)$, $(x-x_0)$ usw. als abhängig von ξ, η, ζ darstellen, indem man die Gleichung (6) bzw. mit a, b, c, d multipliziert und addiert und dabei die Orthogonalitätseigenschaften der Kosinusse berücksichtigt. Man erhält

(a) $$l-l_0 = b\xi + c\eta + d\zeta$$

entsprechend:

(7)(b) $$x-x_0 = b_1\xi + c_1\eta + d_1\zeta$$

(c) $$y-y_0 = b_2\xi + c_2\eta + d_2\zeta$$

(d) $$z-z_0 = b_3\xi + c_3\eta + d_3\zeta.$$

Wir differentiieren nun die Gleichungen (6) nach s:

$$\xi' = \Sigma(l'-l_0')b + \Sigma(l-l_0)b'.$$

Aus Gleichung (1) geht hervor, daß

(8) $$l'-l_0' = \lambda l_0' = \lambda a; \quad x'-x_0' = \lambda a_1, \quad y'-y_0' = \lambda a_2, \quad z'-z_0' = \lambda a_3,$$

wobei λ ein Proportionalitätsfaktor ist. Demnach ist

$$\Sigma(l'-l_0')b = 0.$$

Zur Berechnung von $\Sigma(l-l_0)b'$ setzen wir für $b' = \frac{db}{ds}$ aus der Frenet'schen Formel (4b) den entsprechenden Ausdruck ein und erhalten:

$$\Sigma(l-l_0)b' = -\frac{1}{\tau}\Sigma(l-l_0)c - \frac{1}{\varrho}\Sigma(l-l_0)a = -\frac{\eta}{\tau}$$

(wegen 6), sodaß

$$\xi' = -\frac{\eta}{\tau}.$$

Entsprechend behandeln wir die durch Differentiationen nach s aus (6c) und (6d) hervorgehenden Gleichungen:

$$\eta' = \Sigma(l'-l_0')c + \Sigma(l-l_0)c'$$
$$\zeta' = \Sigma(l'-l_0')d + \Sigma(l-l_0)d',$$

wobei jedesmal wegen (8) die erste Summe Null ist und die letzte mittelst der Frenet'schen Formeln (4) sich einfach umgestalten läßt, so daß man schließlich folgende einfache Differentialgleichungen erhält:

(9)

(a) $$\xi' = -\frac{\eta}{\tau}.$$

(b) $$\eta' = -\frac{\zeta}{\sigma} + \frac{\xi}{\tau}.$$

(c) $$\zeta' = \frac{\eta}{\sigma}.$$

Die erste Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ der Weltlinie tritt hierbei garnicht mehr auf, sondern bloß die erste und zweite Torsion $\frac{1}{\tau}$ und $\frac{1}{\sigma}$. Darboux hat die Differentialgleichungen (9), die im wesentlichen die Frenet'schen Formeln für eine Raumkurve im 3 dimensionalen Raum darstellen, auf eine Ricatti'sche Differentialgleichung zurückgeführt, deren allgemeine Lösung allerdings nicht gelingt. Dagegen können wir die Differentialgleichungen (9) sofort integrieren, wenn wir die zweite Torsion $\frac{1}{\sigma}$ Null nehmen; d. h. wenn die Weltlinie vollständig in einem 3 dimensionalen Raum $l\,x\,y$ verläuft. Mit anderen Worten gelingt uns die vollständige Integration für den Fall der ebenen Bewegung des starren Körpers; alsdann ist nämlich:

$$\xi' = -\frac{\eta}{\tau};$$

$$\eta' = \frac{\xi}{\tau};$$

$$\zeta' = 0;$$

oder mittelst

$$\frac{ds}{\tau} = d\psi. \tag{10}$$

$$\text{(a)} \quad \frac{d\xi}{d\psi} = -\eta;$$

$$\text{(b)} \quad \frac{d\eta}{d\psi} = \xi; \tag{11}$$

$$\text{(c)} \quad \zeta = \text{const.}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\xi = A \cos\psi; \quad \eta = A \sin\psi. \tag{12}$$

Damit ist die Integration für die ebene Bewegung erledigt; denn $\frac{1}{\tau}$ ist nach (5) als Funktion von s gegeben. Aus den Gleichungen (7) lassen sich dann x und y als Funktionen von s ausdrücken, d. h. die Bahnkurven aller Punkte des starren Körpers sind damit gefunden.

Bevor wir an einem Beispiel die Methode anwenden, wollen wir untersuchen, auf welcher Fläche im 3 dimensionalen $x\,y\,z$ Raum irgend ein Punkt des starren Körpers sich um den geführten Punkt $x_0\,y_0\,z_0$ bewegen kann. Wegen der Starrheitsbedingung ist:

(13) $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-(t-t_0)^2 = \varrho_0^2,$$

wobei ϱ_0 eine Konstante ist; dabei ist statt l in der Formel it eingeführt. Gleichung (2) lautet in dieser Bezeichnung:

$$(x-x_0)x_0'+(y-y_0)y_0'+(z-z_0)z_0'-(t-t_0)t_0' = 0.$$

Durch Division dieser Gleichung mit t_0' erhält man:

(14) $$(x-x_0)\dot{x}_0+(y-y_0)\dot{y}_0+(z-z_0)\dot{z}_0 = t-t_0,$$

wobei die Punkte Differentiationen nach der Zeit t bedeuten sollen. Wir führen nun statt des rechtwinkligen Koordinatensystems $x\,y\,z$ ein anderes rechtwinkliges $x_1\,y_1\,z_1$ ein, dessen x_1 Achse in Richtung der Dreiergeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2}$ geht, während y_1 und z_1 beliebig sind mit der Einschränkung, daß $x_1\,y_1\,z_1$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem bestimmen. Es ist alsdann die Projektion der Entfernung des betrachteten Raumpunktes $x\,y\,z$ vom Punkt $x_0\,y_0\,z_0$ auf die x_1 Achse:

$$x_1 = (x-x_0)\frac{\dot{x}_0}{\mathfrak{v}_0}+(y-y_0)\frac{\dot{y}_0}{\mathfrak{v}_0}+(z-z_0)\frac{\dot{z}_0}{\mathfrak{v}_0},$$

sodaß wir wegen (14) auch schreiben können: $x_1\mathfrak{v}_0 = t-t_0$. Setzen wir diese Beziehung in (13) ein und bedenken, daß

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = x_1^2+y_1^2+z_1^2,$$

so erhält man:

(15) $$x_1^2(1-\mathfrak{v}_0^2)+y_1^2+z_1^2 = \varrho_0^2.$$

Diese letzte Gleichung könnte den Eindruck erwecken, als ob der geometrische Ort für die Bewegung des einzelnen Punktes des starren Körpers ein in der Bewegungsrichtung im Verhältnis $1:\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}$ verlängertes Rotationsellipsoid wäre. Tatsächlich ist der geometrische Ort aber ein im Sinn der Bewegung im Verhältnis $1:\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}$ verkürztes Rotationsellipsoid. Die Formel (15) stellt nämlich die Gleichung des Ellipsoids für die im bewegten System gültige Zeit τ auf, indem x_1, y_1, z_1 als Funktionen von τ eingeführt sind. Vom ruhenden System aus betrachtet müssen wir zu einer bestimmten Zeit t die Gestalt untersuchen. Die Anwendung der Lorentz-Transformation liefert in der Tat die Gleichung des abgeplatteten Rotationsellipsoids:

(15a) $$\frac{x_1^2(t)}{1-\mathfrak{v}_0^2}+y_1^2(t)+z_1^2(t) = \varrho_0^2.$$

Der Übergang von Gleichung (15) zu (15a) gestaltet sich sehr

einfach: In (15) sind x_1, y_1, z_1 als Funktionen der Eigenzeit τ des mitbewegten Koordinatensystems aufzufassen. Da $y_1 z_1$ senkrecht zur Bewegungsrichtung liegen, so ist

$$y_1(\tau) = y_1(t) \text{ und } z_1(\tau) = z_1(t).$$

Dagegen ist $x_1(\tau) > x_1(t)$, weil nach der Lorentz-Transformation bei einem bestimmten Wert τ den beiden Endpunkten der Strecke x_1 zwei um $dt = \mathfrak{v}_0 . x_1$ verschiedene Zeiten t entsprechen, sodaß man die Größe $x_1(t)$ bei einem bestimmten Wert t erhält, indem man von $x_1(\tau)$ den in der Zeit dt zurückgelegten Weg

$$ds = \mathfrak{v}_0 dt = \mathfrak{v}_0^2 x_1$$

des Endpunktes der Strecke subtrahiert. Durch $x_1(t) = x_1(\tau)(1 - \mathfrak{v}_0^2)$ geht aber ohne weiteres (15) in (15a) über.

Statt an den Raumkurven im 4 dimensionalen Raum x, y, z, it kann man die ganze obige Betrachtung auch an den Projektionen dieser Kurven auf den xyz Raum anstellen. Da diese Betrachtungsweise für die Durchrechnung von Beispielen gewisse Vorteile bietet, so soll sie hier angegeben werden. Die durch Gleichung (1) definierte Parallelität der Tangenten entsprechender Punkte bleibt bei Projektion der Weltlinien auf den 3 dimensionalen reellen Raum xyz erhalten; d. h. statt der Formeln (1) kann man auch schreiben:

$$(16) \qquad \frac{\frac{dx}{ds_0}}{\frac{dx_0}{ds_0}} = \frac{\frac{dy}{ds_0}}{\frac{dy_0}{ds_0}} = \frac{\frac{dz}{ds_0}}{\frac{dz_0}{ds_0}} = \frac{\frac{dt}{ds_0}}{\frac{dt_0}{ds_0}} = \lambda,$$

wobei wieder mit $xyzt$ ein beliebiger, mit x_0, y_0, z_0, t_0 der geführte Punkt des starren Körpers und mit ds_0 das Linienelement der Bahnkurve des geführten Punktes im 3 dimensionalen xyz Raum bezeichnet wird. Zu den Gleichungen (16) tritt noch die Gleichung (2) entsprechende Orthogonalitätsbedingung der Weltlinien, die wir auch so schreiben können:

$$(17) \qquad (x - x_0)\frac{dx_0}{ds_0} + (y - y_0)\frac{dy_0}{ds_0} + (z - z_0)\frac{dz_0}{ds_0} = (t - t_0)\frac{dt_0}{ds_0},$$

dabei ist $\frac{ds_0}{dt_0} = \mathfrak{v}_0$ die Dreiergeschwindigkeit des Nullpunktes. Denken wir uns nun an der betrachteten Stelle der dem geführten Punkt zugehörigen Bahnkurve ein Schmiegungskoordinatensystem x, y, z angelegt, so daß die x Achse die Tangente und die xy Ebene die Schmiegungsebene wird, wobei durch das Schema

(18)

	x	y	z
X	a	b	c
Y	a'	b'	c'
Z	a''	b''	c''

die Richtungskosinusse zwischen dem bewegten $x\,y\,z$ System und dem festen $X\,Y\,Z$ System gegeben sind, so sind die Projektionen der Entfernung des Punktes $x\,y\,z$ vom Punkte $x_0\,y_0\,z_0$ offenbar:

$$\text{(19)}\quad \begin{aligned} &\text{(a)} & x_1 &= a(x-x_0)+a'(y-y_0)+a''(z-z_0),\\ &\text{(b)} & y_1 &= b(x-x_0)+b'(y-y_0)+b''(z-z_0),\\ &\text{(c)} & z_1 &= c(x-x_0)+c'(y-y_0)+c''(z-z_0), \end{aligned}$$

während umgekehrt die Größen $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$ sich aus den x_1, y_1, z_1 so berechnen:

$$\text{(20)}\quad \begin{aligned} x-x_0 &= a x_1+b y_1+c z_1\\ y-y_0 &= a' x_1+b' y_1+c' z_1\\ z-z_0 &= a'' x_1+b'' y_1+c'' z_1. \end{aligned}$$

Die Frenet'schen Formeln lauten:

$$\text{(21)}\quad \frac{da}{ds_0}=\frac{b}{\varrho_0};\quad \frac{db}{ds_0}=-\frac{c}{\sigma_0}-\frac{a}{\varrho_0};\quad \frac{dc}{ds_0}=\frac{b}{\sigma_0},$$

wobei $\frac{1}{\varrho_0}$ die Krümmung und $\frac{1}{\sigma_0}$ die Torsion der vorgegebenen Bahnkurve messen.

Ähnlich wie früher bei den Größen ξ, η, ζ bilden wir jetzt die Ableitungen von $x_1\,y_1\,z_1$ nach s_0 und erhalten unter Benutzung von (16), (17) und (20) die folgenden Differentialgleichungen für x_1, y_1, z_1:

$$\text{(22)}\quad \begin{aligned} &\text{(a)} & \frac{dx_1}{ds_0} &= \frac{y_1}{\varrho_0}+\lambda-1,\\ &\text{(b)} & \frac{dy_1}{ds_0} &= -\frac{z_1}{\sigma_0}-\frac{x_1}{\varrho_0},\\ &\text{(c)} & \frac{dz_1}{ds_0} &= \frac{y_1}{\sigma_0}. \end{aligned}$$

Die Größe λ, die in (22a) auftritt, ist durch Gleichung (16) definiert. Wir wollen diese Größe mittelst Gleichung (17), die wir folgendermaßen schreiben können:

$$(x-x_0)a+(y-y_0)a'+(z-z_0)a'' = (t-t_0)\frac{1}{\mathfrak{v}_0},$$

eliminieren. Durch Differentiation dieser letzten Gleichung mit Benutzung von Gleichung (19a) erhält man:

$$\frac{dx_1}{ds_0} = (\lambda - 1)\frac{1}{\mathfrak{v}_0^2} + x_1 . \mathfrak{v}_0 \frac{d}{ds_0}\left(\frac{1}{\mathfrak{v}_0}\right),$$

oder

$$\lambda - 1 = \mathfrak{v}_0^2 \frac{dx_1}{ds_0} + x_1 \mathfrak{v}_0 \frac{d\mathfrak{v}_0}{ds_0}.$$

Gleichung (22a) geht somit über in:

$$\text{(22'a)} \qquad \frac{d(\sqrt{1-\mathfrak{v}_0^2}\,.\,x_1)}{ds_0} = \frac{y_1}{\varrho_0 \sqrt{1-\mathfrak{v}_0^2}}.$$

Man ist somit wieder auf ein System von 3 simultanen Differentialgleichungen (22) geführt, das sich ebenso wie das System (9) auf eine Ricatti'sche Differentialgleichung bringen läßt. Gegenüber dem System (9) haben wir aber im System (22) den Vorteil, daß hier bloß die Krümmung und Torsion der gegebenen Bahnkurve vorkommt, während in (9) als Koeffizienten die erste und zweite Torsion eingingen. Der Vorteil macht sich hauptsächlich bei Durchrechnung von Beispielen geltend. Der Fall der beliebigen ebenen Bewegung d. h. $\frac{1}{\sigma_{\text{II}}} = 0$ läßt sich auch nach den Formeln (22) sofort erledigen. Sie gehen in diesem Fall über in:

$$\text{(23)} \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad \frac{d(x_1\sqrt{1-\mathfrak{v}_0^2})}{ds_0} = \frac{y_1}{\varrho_0\sqrt{1-\mathfrak{v}_0^2}}, \\ &\text{(b)} \quad \frac{dy_1}{ds_0} = -\frac{x_1}{\varrho_0}, \end{aligned}$$

deren allgemeine Lösung mittelst

$$\text{(24)} \qquad d\psi = \frac{ds_0}{\varrho_0\sqrt{1-\mathfrak{v}_0^2}}$$

folgendermaßen lautet:

$$\text{(25)} \qquad \begin{aligned} \sqrt{1-\mathfrak{v}_0^2}\,.\,x_1 &= A\,.\sin\psi \\ y_1 &= A\,.\cos\psi. \end{aligned}$$

Bei dieser Betrachtungsweise ist zu bedenken, daß wir die Projektion des Körpers vom Raum-Zeit-System auf das Raumsystem gebildet haben. Diese Projektion fällt aber keineswegs mit der vom Ruhsystem aus gesehenen Gestalt des Körpers zusammen. Denn diese letztere wird erhalten, indem man alle Punkte des Körpers vom Ruhsystem aus gleichzeitig betrachtet; dagegen gibt

die Projektion vom Raum-Zeit-System auf den Raum die Lage der einzelnen Punkte des Körpers für einen Zeitpunkt der Eigenzeit des mitbewegten Systems. Erst durch eine Lorentztransformation auf die Eigenzeit des Ruhsystemes erhält man, ebenso wie oben ausgeführt wurde, aus der genannten Projektion die Gestalt desKörpers.

Beispiel:

Der Mittelpunkt eines starren Elektrons soll sich mit gleicher Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ auf einem Kreis bewegen:

$$x_0 = \varrho_0 \cos \frac{s_0}{\varrho_0}$$

$$y_0 = \varrho_0 \sin \frac{s_0}{\varrho_0}.$$

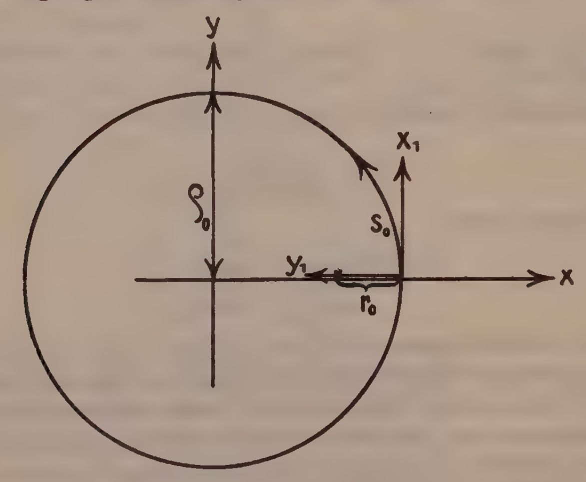
Dabei ist ϱ_0 der Radius des Kreises und s_0 der vom Mittelpunkt des Elektrons durchlaufene Weg; s_0 ist als Funktion der Eigenzeit τ des mitbewegten Koordinatensystems gegeben zu denken und mißt die Bogenlänge vom Ruhsystem aus gesehen.

Wegen (24) und (25) ist

$$\psi = \frac{s_0}{\varrho_0 \sqrt{1-\mathfrak{v}_0^2}} \quad \text{und} \quad x_1 = r_0 \cdot \frac{\sin \dfrac{s_0}{\varrho_0 \sqrt{1-\mathfrak{v}_0^2}}}{\sqrt{1-\mathfrak{v}_0^2}};$$

$$(26) \qquad y_1 = r_0 \cdot \cos \frac{s_0}{\varrho_0 \sqrt{1-\mathfrak{v}_0^2}}.$$

Die Anfangslage ist aus Figur 2 zu entnehmen.



Figur 2.

Aus (26) geht hervor:

$$x_1^2(1-\mathfrak{v}_0^2)+y_1^2 = r_0^2. \tag{27}$$

Da s_0 und damit x_1 und y_1 als Funktionen der Eigenzeit τ des mitbewegten Systems gegeben sind, so gibt Gleichung (27) nicht den geometrischen Ort für die Lage des betrachteten Punktes vom Ruhsystem aus gesehen; sondern man muß erst auf die Zeit t des Ruhsystems transformieren und erhält dadurch die Beziehung $\frac{x_1^2}{1-\mathfrak{v}_0^2}+y_1^2 = r_0^2$ d. h. eine in Richtung der Bewegung im Verhältnis $1:\sqrt{1-\mathfrak{v}_0^2}$ abgeplattete Ellipse. Man entnimmt ferner aus den Formeln (26), daß das Elektron auch Drehungen auszuführen vermag und zwar entgegengesetzt der Drehrichtung seines Mittelpunktes. Hat das $x_1\,y_1$-System eine volle Umdrehung ausgeführt, d. h. ist $\frac{s_0}{\varrho_m} = 2\pi$, so hat sich das Elektron relativ zum $x_1\,y_1$-System um $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\mathfrak{v}_0^2}}$ gedreht; also relativ zum Ruhsystem um $2\pi-\frac{2\pi}{\sqrt{1-\mathfrak{v}_0^2}}$. Das bedeutet aber eine negative Drehung, die umso größer ist, je größer die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ des Mittelpunktes des Elektrons ist: Kommt diese Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ des Mittelpunktes 0 nahe an die Lichtgeschwindigkeit 1 heran, so wird einerseits die Ellipse sehr stark abgeplattet, andererseits rotiert das Elektron sehr rasch um den geführten Punkt 0.

Es ließe sich natürlich die Zahl der Beispiele für die ebene Bewegung des Born'schen starren Körpers beliebig erweitern, da ja das allgemeine Integral für die ebene Bewegung oben abgeleitet wurde. Es sei hier nur noch darauf hingewiesen, daß man auch die Dynamik des Born'schen starren Elektrons für beliebige ebene Bewegungen auf Grund der in dieser Arbeit angegebenen Kinematik behandeln kann, indem man die für die geradlinige Bewegung des Born'schen starren Elektrons abgeleitete Methode[1]) sinngemäß auf die ebene Bewegung des Elektrons überträgt.

---

1) Siehe: W. Behrens und E. Hecke, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Kl. 1912.

Einige Beobachtungen über die optischen Konstanten von Kalium und Natrium.

Von

B. Meese.

Mit einer Figur im Text.

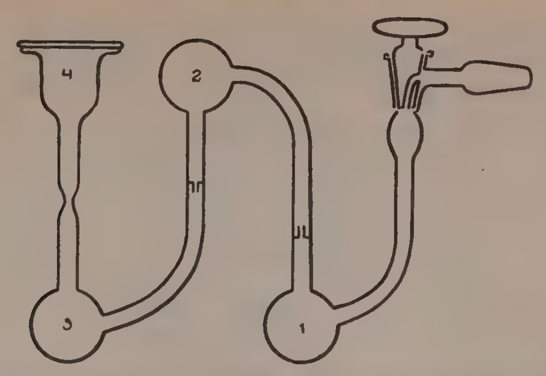
Vorgelegt am 23. August 1913 durch Herrn W. Voigt.

Die Herren R. W. und R. C. Duncan berichten neuerdings[1]) über von ihnen ausgeführte Bestimmungen der optischen Konstanten von Na und K. Dies gibt mir die Veranlassung, eigene Beobachtungen über denselben Gegenstand, die ich im Physikalischen Institut zu Göttingen angestellt und um Weihnachten 1912 abgeschlossen habe, bekannt zu geben.

Die Herstellung der Spiegel geschah nach demselben Prinzip, welches unabhängig die Herren Duncan benutzt haben. Es wurden die bez. Metalle im Vakuum geschmolzen und an einer ebenen Glasplatte zum Erstarren gebracht. Ein gegen die andere Seite der Platte gekittetes Prisma gestattete, bei hinreichend großem Einfallswinkel Licht an der Grenzfläche Glas-Metall reflektieren zu lassen und auf den Polarisationszustand zu untersuchen. Im Einzelnen war die Methode der Spiegelherstellung von der Duncanschen verschieden. Insbesondere fand die Filtration des flüssigen Metalles nicht ein, sondern drei Mal statt.

Den dabei benutzten Apparat, den Herr Dr. Rümelin mir angegeben und mich verwenden gelehrt hat, zeigt die schematische Figur auf der nächsten Seite. Das Metall wurde erstmalig in der Kugel 1 geschmolzen, von da unter wiederholtem Umkippen des Apparates nach Kugel 2 und 3 gebracht, schließlich in das mit

1) R. W. und R. C. Duncan, Phys. Rev. N. S. 1, 294, 1913.



der Glasplatte verschlossene Glöckchen 4. Der Luftdruck wurde dabei dauernd auf 0,0001 mm gehalten.

Die Erwärmung geschah bei K durch ein Wasserbad, in welches der ganze Apparat eingetaucht war; bei Na mußte mit der Bunsenflamme nachgeholfen werden. Die Kittung war mit Schellack ausgeführt; indem das Glöckchen 4 einen breiten eben geschliffenen Wulst besaß, und die Kittung nur an dessen äußerem Rand vorgenommen war, durfte eine Verunreinigung der Glasplatte oder des Metalles durch die Kittmasse als vermieden gelten. Die Glasplatten waren nicht nur in gebräuchlicher Weise gereinigt, sondern auch noch mit angetrocknetem Kollodium abgezogen. Die spiegelnden K-Flächen waren sofort ganz klar; die Na-Flächen waren durch Kristallisation anfangs matt, klärten sich aber, wenn das Glöcken in siedendem Wasser erhitzt und dann schnell abgekühlt wurde. Die reflektierenden Flächen hatten etwa 20 mm Durchmesser.

Die Polarisationsbeobachtungen wurden in gebräuchlicher Weise mit einem Fueßschen Kompensator nach Königsberger ausgeführt. Die vielen in dem Instrument durch Reflexion entstehenden Nebenbilder machten die Messungen anstrengend und schwierig. Ungleich den Herren Duncan habe ich die Beobachtungen möglichst nahe am Haupteinfallswinkel, diesen am besten einschließend, ausgeführt, weil dabei durch die Berechnung die geringste Unsicherheit in die optischen Konstantenwerte kommt. Die maximale Abweichung der Einstellungen am Kompensator resp. am Analysator vom Mittelwert betrug 0,002 λ resp. 12—15′. Der letztere beträchtliche Wert bedingt in erster Linie die Ungenauigkeit der Resultate. Das Hauptazimut liegt sehr nahe an 45°, und in diesem Bereiche haben kleine Abweichungen einen enormen Einfluß auf n und $\varkappa$.

Die Berechnung geschah nach den Wienerschen Formeln[1]), die ich hier zusammenstelle.

Es wird gesetzt (φ Einfallswinkel, δ Verzögerung, ψ Azimut)

$$\cos\delta \sin 2\psi = \operatorname{arc} 2P,$$
$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} P = \operatorname{tg}\varphi',$$
$$\sin\delta \operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} 2\psi',$$
$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = q;$$
$$\sin 2\varphi' \sin 2\psi' = \sin 2\alpha,$$
$$\sin\varphi' \sin 2\psi' = \sin\beta,$$

dann ist bei $n'\varkappa = k'$

$$\left(\frac{n'}{q}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\varphi' \cos(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha),$$
$$\left(\frac{k'}{q}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\varphi' \sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha),$$
$$\varkappa^2 = \operatorname{tg}(\beta+\alpha)\operatorname{tg}(\beta-\alpha),$$

und wenn n_0 den Brechungsindex des Glases bezeichnet, innerhalb dessen die Reflexion stattfindet,

$$n = n_0 n', \qquad k = n_0 k'.$$

Beobachtungsresultate.

Brechungsindices n_0 der benutzten Glas-Prismen.

λ	30° Prisma	60° Prisma
667	1,500	1,501
627	1,507	1,501
589	1,518	1,503
552	1,531	1,504
503	1,536	1,508

Das 30°-Prisma wurde zu den später zu besprechenden Beobachtungen an Hg benutzt, das 60°-Prisma zu denen mit K und Na.

1) O. Wiener, Abh. d. Leipz. Ges. d. Wiss. 30, p. 491, 1908.

Kaliumspiegel.

λ	φ	ψ	δ	n	k	$\varkappa$
667	60°	44° 17′	90° 23′	0,072	1,86	25,8
	56° 43′	44° 16′	97° 56′	0,085	1,83	21,5
627	60°	44° 18′	86°	0,068	1,68	24,6
	56° 43′	44° 30′	92° 12′	0,048	1,53	32,0
589	60°	44° 26′	87° 30′	0,048	1,71	35,6
	56° 43′	44° 29′	98° 24′	0,056	1,84	32,8
552	60°	44° 27′	79° 55′	0,066	1,38	20,8
	56° 43′	44° 35′	90°	0,053	1,44	27,2
503	60°	44° 6′	75° 18′	0,080	1,16	14,8
	56° 43′	44° 30′	81° 10′	0,050	1,06	21,2

Mittelwerte.

λ	n	k	$\varkappa$
667	0,078	1,84	23,6
627	0,058	1,60	28,3
589	0,057	1,77	34,2
552	0,059	1,41	24,0
503	0,065	1,11	17,5

Mit einem II. Kaliumspiegel, den ich nicht so genau untersuchte, erhielt ich $n = 0{,}065$ für $\lambda = 667$; $n = 0{,}08$ für $\lambda = 589$ und $n = 0{,}07$ für $\lambda = 552$.

Natriumspiegel.

λ	φ	ψ	δ	n	k	$\varkappa$
667	60°	44° 28′	96° 24′	0,050	2,14	42,7
627	60°	44° 26′	89° 42′	0,050	1,81	36,2
589	60°	44° 28′	87° 54′	0,052	1,83	35,5
552	56° 43′	44° 8′	88°	0,061	1,36	22,5
503	56° 43′	44° 10′	83° 27′	0,064	1.17	18,3

Zum Vergleich seien die von den Herren Duncan gefundenen Werte angeführt.

Kaliumspiegel I. Kaliumspiegel II.

λ	n	$\varkappa$	n	$\varkappa$
665	0,057	28,2	0,075	25,4
589	0,059	22,7	0,077	21,6
472	0,060	15,5	0,079	13,1

Natriumspiegel I. Natriumspiegel II.

λ	n	$\varkappa$	n	$\varkappa$
665	0,048	55,6	0,053	54,5
589	0,042	54,3	0,045	55,8
546	0,045	44,7	0,060	40,6
472	0,051	34,2	0,062	32,4
435	0,053	26,4	0,063	37,0

Die von mir erhaltenen Werte von n und $\varkappa$ stimmen nach der obigen Zusammenstellung so gut mit den Duncanschen überein, als angesichts der Abweichungen, die wir beiderseits bei verschiedenen Spiegeln desselben Metalles resp. bei verschiedenen Einfallswinkeln erhalten haben, nur irgend zu erwarten war. Es wäre indessen wohl verfrüht, hieraus zu schließen, daß nun durch unsere Beobachtungen die bez. Konstanten mit beträchtlicher Genauigkeit bestimmt wären. Aus den Drudeschen ausführlichen Untersuchungen über die Einwirkung von Oberflächenschichten wird man einen Argwohn gegen alle Bestimmungen entnehmen müssen, bei denen eine Garantie gegen die Mitwirkung solcher Fehlerquellen nicht gegeben ist. Eine solche Garantie fehlt hier aber nicht nur, sondern sowohl die Herren Duncan, als auch ich selber, haben Beobachtungen angestellt, deren Resultate mit ziemlicher Sicherheit für die Wirksamkeit beträchtlicher Oberflächenschichten sprechen.

Wie die Herren Duncan habe auch ich meine Versuchsanordnung zunächst an Quecksilber erprobt, und wir haben beiderseits hierbei Resultate erhalten, die von den sonst bei Quecksilber gewonnenen erheblich abweichen. Während die Herren Duncan den

Grund für diese Abweichungen in dem Material suchen, habe ich mich durch Beobachtungen an einer Oberfläche desselben sorgfältig gereinigten Quecksilbers, das gegen Glas verwandt wurde, gegen Luft davon überzeugt, daß eine solche Erklärung nicht zulässig ist; es bleibt sonach nichts übrig, als eine Oberflächenschicht an der Grenze Glas-Quecksilber für die Abweichung verantwortlich zu machen.

Ich erhielt im Falle der Reflexion an der Grenze

Quecksilber-Luft.

λ	φ	ψ	δ	n	k	$\varkappa$
627	79° 30′	34° 51′	91° 30′	1,91	5,02	2,60
589	79° 30′	36° 7′	89° 23′	1,63	4,91	3,02
546	79° 30′	37° 0′	83° 22′	1,55	4,46	3,30

dagegen im Falle der Reflexion an der Grenze

Quecksilber-Glas.

λ	φ	ψ	δ	n	k	$\varkappa$
667	77° 36′	33° 26′	90° 30′	2,70	6,03	2,23
	76° 18′	33° 40′	96° 31′	2,67	6,00	2,24
589	76° 18′	34° 52′	89° 55′	2,16	5,50	2,54
	75° 0′	34° 54′	95° 40′	2,14	5,45	2,54
552	75° 0′	35° 30′	86° 24′	1,94	5,22	2,69
	73° 42′	35° 26′	92° 18′	1,94	5,15	2,65

Die letzten Zahlen liegen nicht gar weit von denjenigen ab, welche die Herren Duncan erhalten haben; daß sie nicht ganz übereinstimmen, mag an den verschiedenen von uns benutzten Glassorten und Reinigungsverfahren liegen. (Merkwürdig und wohl nur durch eine Anzahl sich glücklich kompensierender Umstände zu erklären ist, daß Herr Meyer [1]) bei seinen Beobachtungen, die auch eine Grenzfläche Glas-Quecksilber betrafen, fast dieselben Werte erhalten hat, die meine Beobachtungen an der Grenze Luft-Quecksilber geliefert haben.)

1) W. Meyer, Gött. Diss. 1909, Ann. d. Phys. **31**, 1017, 1910.

Es kann nun keinem Zweifel unterliegen, daß, wenn an der Grenze Glas-Quecksilber optisch merkliche Oberflächenschichten nachgewiesen sind, dergleichen auch an den Grenzen Glas-Natrium und Glas-Kalium vorhanden sein werden. Daß dieselben nicht durch Beobachtungen mit verschiedenen Einfallswinkeln eliminiert werden können, hat schon Drude gezeigt; es kann somit überhaupt ihre Wirkung nicht in befriedigender Weise in Rechnung gesetzt werden.

Eine ziemlich unsichere, aber immerhin lehrreiche Abschätzung dieser Wirkung kann man nach Herrn Prof. Voigts Vorschlag in folgender Weise vornehmen. Da Quecksilber, wie auch Natrium und Kalium mit ganz frischen Oberflächen (die letzteren Metalle nur eben zum Schmelzen erwärmt) mit dem Glas in Berührung gebracht worden sind, so wird man mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit die Oberflächenschicht als in der Hauptsache am Glas haftend und bei allen drei Beobachtungen ähnlich annehmen können; sie mag von der Politur des Glases und adsorbierten Gasschichten herrühren. Wenn dies gestattet ist, so kann man aus den Beobachtungen an Quecksilber die Parameter der Oberflächenschicht ableiten und zur Reduktion der Beobachtungen über Natrium und Kalium verwenden. Das ist gewiß kein ganz befriedigender Weg, aber man erhält auf diese Weise doch eine Vorstellung von der Größenordnung für die an den Beobachtungen anzubringende Korrektion.

Die Drudeschen Formeln (35)[1]) für die Einwirkung einer beliebig inhomogenen Oberflächenschicht auf die Phasenänderung δ und des Azimut ψ lauten, wenn man sie auf unsern Fall umformt, wo das erste Medium nicht Luft, sondern ein Körper mit von Eins verschiedenem Brechungsindex n_0 ist:

$$\delta = \delta_0 - \frac{\alpha^2 \gamma (n_0^2 a + \gamma^2)}{(n_0^2 a + \gamma^2)^2 + n_0^4 b^2} A,$$

$$\psi = \psi_0 + \sin 2\psi \frac{\alpha^2 \gamma n_0^2 b}{(n_0^2 a + \gamma^2)^2 + n_0^4 b^2} B.$$

Dabei bezeichnen δ_0 und ψ_0 die Werte bei fehlender Oberflächenschicht, weiter ist

$$\alpha = \sin\varphi, \qquad \gamma = \cos\varphi,$$

$$a = \frac{\varkappa^2 - 1}{n^2 (1 + \varkappa^2)^2}, \qquad b = \frac{2\varkappa}{n^2 (1 + \varkappa^2)^2},$$

1) P. Drude, Drudes Ann. **36**, 886, 1889.

A und B sind die für die Oberflächenschicht charakteristischen Parameter, die beiläufig in Annäherung der Wellenlänge indirekt proportional sind.

Meine Beobachtungen an Quecksilber führen zu den folgenden Zahlen, wobei A_r und B_r durch Ausgleichung mit λ erhaltene Werte sind.

λ	A	B	A_r	B_r
667	0,109	—0,017	0,104	—0,020
627			0,108	—0,021
589	0,119	—0,025	0,114	—0,022
552			0,122	—0,025
503	0,118	—0,024	0,130	—0,027

Durch Anbringung der hierdurch geforderten Korrektion erhielt ich folgende Werte:

Kaliumspiegel.

λ	φ	ψ	δ	n	k	$\varkappa$
667	60°	44° 18,7′	93° 0′	0,067	1,95	29,2
	56° 43′	44° 17,8′	100° 13′	0,075	1,90	25,3
627	60°	44° 19,5′	87° 56′	0,060	1,72	28,7
	56° 43′	44° 31,7′	94° 7′	0,045	1,62	35,5
589	60°	44° 27,2′	89° 53′	0,048	1,83	38,0
	56° 43′	44° 30,2′	100° 52′	0,048	1,93	40,0
552	60°	44° 28,7′	81° 42′	0,055	1,45	26,3
	56° 43′	44° 36,4′	91° 51′	0,043	1,51	35,2
503	60°	44° 7,1′	75° 19,5′	0,078	1,44	18,4
	56° 43′	44° 31.1′	82° 32′	0,045	1,01	22,4

Mittelwerte.

λ	n	k	κ
667	0,071	1,92	27,2
627	0,052	1,67	32,1
589	0,048	1,88	39,0
552	0,049	1,53	30,7
503	0,061	1,22	20,4

Natriumspiegel.

λ	φ	ψ	δ	n	k	κ
667	60°	44° 29′	99° 16′	0,051	2,29	44,9
627	60°	44° 27,1′	92° 10′	0,049	1,92	39,2
589	60°	44° 29,2′	90° 32′	0,048	1,86	38,7
552	56° 43′	44° 9,4′	89° 43′	0,057	1,42	24,9
503	56° 43′	44° 11,7′	84° 54′	0,064	1,20	18,9

Die vorstehend zusammengestellten korrigierten Zahlen für n, k, $\varkappa$ weichen zwar längst nicht so stark von den unkorrigierten ab, wie die bei Quecksilber aus den Beobachtungen gegen Luft und gegen Glas berechneten; die speziellen Werte der Konstanten lassen den Einfluß derselben Oberflächenschicht kleiner ausfallen. Immerhin ist der Einfluß sehr merklich, und da die Oberflächenschicht gegen Na und gegen K kaum kleiner geraten sein wird, als gegen Hg, so wird man die oben ausgewerteten Korrektionen vermutlich nur als eine untere Grenze ansehen dürfen. n wird hiernach wohl in Wahrheit noch etwas unterhalb, $\varkappa$ oberhalb der als korrigiert angegebenen Werte liegen. Immerhin ist durch die beiderseitigen Beobachtungen eine für Anwendungen einigermaßen brauchbare Reihe von Zahlenwerten gewonnen.

Essen a. R., August 1913.

Beschädigungen an Waldbäumen durch Einzelblitze über grössere Bodenflächen.

Von

A. Peter.

Vorgelegt vom Verfasser in der Sitzung vom 7. Juli 1913.

Unter den Entladungen der atmosphärischen Elektrizität interessierten den Botaniker wegen ihrer oft sehr heftigen und zerstörenden Wirkungen auf die Pflanzenwelt von jeher in erster Linie die Funkenblitze. Neben ihnen spielen die Kugelblitze[1]) und die Flächenblitze[2]) der Physiker eine nebensächliche Rolle. Trifft der Blitz einen Baum, so liegt die sichtbare Einschlagsstelle entweder im oberen oder mittleren Teil des Stammes innerhalb der Krone oder an einem der stärkeren Äste, auch nicht selten dort, wo die untersten größeren Verzweigungen stattgefunden haben oder sogar noch etwas tiefer am Stamm. Die Beschädigung zeigt in der Regel folgenden Verlauf, wie er zumal an Eichen beebachtet wird und noch soeben an einem auf der Tillyschanze bei Hann. Münden am 27. Mai 1913 erfolgten Blitzschlag von mir gesehen wurde: der Blitz setzt in einen dickeren

1) B. Walter faßt die Kugelblitze als „Wasserblasen auf, die sich aus Wasserdämpfen oder aufspritzendem Wasser bilden, während gleichzeitig das umgebende Erdreich durch Influenz von seiten der darüber stehenden Gewitterwolke äußerst stark elektrisch geladen ist. Die Blasen besitzen dann eine elektrische Ladung gleichen Vorzeichens wie die Umgebung, werden deshalb von ihr abgestoßen und bewegen sich daher wie eine elektrisch geladene Seifenblase in gleichnamigem Felde". (Handwörterbuch der Naturwissenschaften II, S. 39.)

2) H. Gerdien ebenda I, 643: »Flächenblitze zeigen das Bandenspektrum des Stickstoffs. Sie sind schwächere Glimmentladungen, die den Elektrizitätsausgleich innerhalb der Wolken zwischen Bereichen vermitteln, deren Kondensationsprodukte eine hinreichende Potentialdifferenz erreicht haben. Bei Gewittern treten Flächenblitze gleichzeitig mit starken Funkenblitzen oder kurze Zeit nach diesen auf".

Ast der Krone ein, geht im Kambium und Splint abwärts in den Stamm, indem er die Rinde in einem schmalen Streifen ablöst, der nach unten hin an Breite zunimmt; dann reißt er die Rinde in großen, bis einige Meter langen Stücken vollständig ab; hier tritt oft eine Zerspaltung des ganzen Holzes durch mehrere Längsrisse ein, so daß der Stamm seine Widerstandskraft gegen den das Gewitter begleitenden Sturm verliert und nicht selten zusammenbricht. In der Regel wird zugleich mit der Spaltung und dem Abwerfen der Rinde aus dem Holz, der gewöhnlich etwas spiralig verlaufenden Faser desselben folgend, eine mehr oder minder tiefe Rinne herausgerissen, deren Ränder zerfasert erscheinen, während der herausgerissene Holzstreifen selbst fortgeschleudert wird. Die Blitzbahn verläuft am Stamm bis zum Boden und kann zuweilen bis auf eine der dickeren Wurzeln verfolgt werden. Diese Erscheinungen sind so charakteristisch, daß eine Verwechslung mit Windbruch, oder mit dem infolge zu rascher Freistellung erfolgenden Sonnenbrand, oder mit dem Zusammenbrechen des Stammes wegen Durchwucherung mit Pilzmycelien bei einiger Aufmerksamkeit kaum vorkommen wird.

Rob. Hartig hat eine eigentümliche Art der Beschädigung an Rotbuchen beschrieben, die er sich als durch Blitzwirkung entstanden denkt. An dickeren Stämmen finden sich rundherum zahlreiche senkrechte Furchen von nur wenigen Zentimetern Länge, die so aussehen, als wären sie die Folge von eben so vielen mit der Axt durch die Rinde geschlagenen Wunden, die dann halb vernarbt sind. Auch ich habe diese Erscheinung an einer starken Buche gesehen, die im Walde am Bocksbühl bei Friedland a./Leine an einem nach N. gerichteten Abhange stand; ein längerer Abschnitt dieses Stammes befindet sich noch jetzt im Botan. Museum zu Göttingen. Der Querschnitt zeigt ganz eng lokalisierte Beschädigungen aus früherer Zeit, die das Cambium daselbst getötet hatten, und darauffolgende Überwallungsversuche der Wundstellen, die noch nicht vollständig durchgeführt sind, so daß einstweilen zahlreiche Furchen an der Oberfläche des Stammes sichtbar bleiben. Ob aber diese Beschädigungen durch einen Blitz hervorgerufen worden sind, vermag auch ich nicht zu beweisen.

Dem einfallenden Blitz gegenüber verhalten sich bekanntlich die verschiedenen Baumarten ungleich, je nach Struktur und Festigkeit der Rinde und des Holzes, nach der Wasserhaltigkeit

und damit Leitfähigkeit der Gewebe, nach der Benetzbarkeit der Stamm-Oberfläche und anderen Umständen, wie E. Stahl[1]) vor kurzem so übersichtlich und überzeugend dargetan hat. Als Typen wähle ich hier 6 Fälle von ebensolchen Baumarten aus, die von mir beobachtet wurden oder mir zur Hand sind.

1. **Eiche** im Reinhardswald über Münden gegen den Gahrenberg. Der Stamm war in Brusthöhe 70 cm dick. In c. 8 m über des Erde hatte der Blitz in den Stamm eingesetzt und einen Rindenstreifen abgerissen, der nach unten breiter wurde; die Blitzbahn verlief schraubig nach links drehend abwärts bis zum Erdboden; erst weit unten war ein breites Rindenstück abgeworfen, und hier fand sich auf mehrere Meter Erstreckung eine schmale rißartige Rinne im Holz inmitten des Rißfeldes; der herausgeschleuderte Holzsplitter war etwa bleistiftdick und stark zerfasert. Der Baum steht noch, doch erscheint er etwas geschädigt, seine Krone ist nicht sehr dicht, die Astspitzen sind vielfach dürr geworden.

2. **Birke** (Betula pubescens) ebenda, auf moorigem Grund. Der vom Blitz erst vor kurzem getroffene Stamm (die Innenseite der Rinde war noch sehr rot) hatte etwa 51 cm Durchmesser in Brusthöhe über dem Boden. Im unteren Drittel der Krone, etwa in 12 m Höhe über der Erde, hatte der Blitz eingesetzt und die ganze Rinde von hier bis zum Erdboden rundherum in großen Flächen abgelöst, teilweise in Fetzen fortgeschleudert. Das bloßgelegte Holz zeigte einige feine Längsrisse. Jetzt ist der Stamm wegen vollständigen Verdorrens beseitigt.

3. **Rotbuche** (Fagus silvatica) im Reinhardswald über Wilhelmshausen auf dem Hegeberge[2]). Stamm von 2.28 m Umfang in 1 m über der Erde; die Rinde etwa 1 cm dick. Der Blitz hatte ungefähr in 12 m Höhe eingesetzt, seine Bahn ist durch einen Rindenriß bemerkbar; von 6 m abwärts war die Rinde in 65 cm breiten Stücken abgeschält, das Holz von mehreren Rissen bis auf die entgegengesetzte Stammseite ganz durchspalten, wo ebenfalls Rindenstücke, namentlich am Stammgrunde, abgetrennt worden waren.

4. **Kiefer** (Pinus silvestris) im Stadtwald bei Allenstein.

Blitzeinsatz innerhalb der Krone etwa bei 14 m Höhe über

---

1) E. Stahl, Die Blitzgefährdung der verschiedenen Baumarten. Jena (Fischer) 1912.

2) wurde mir durch Herrn Geh. Bergrat Professor Dr. v. Koenen in Göttingen nachgewiesen.

dem Boden. Der Weg des Blitzes verlief in leichter Spirale von oben links nach unten rechts, und zeigte sich in einem entsprechenden Rindenriß. An 2 Stellen: dicht über der Erde bis 4 m aufwärts, und weiter oben am Stamm von etwa 7—10 m waren aus dem Stamm tiefe Rinnen herausgerissen, aus denen zersplittertes Holz teilweise bröckelig heraushing, alle Splitter schräg nach unten gerichtet. Der Stamm war so stark zertrümmert, daß er dem Abbrechen nahe erschien.

5. **Fichte** (Picea excelsa), im Mandelbecker Forst bei Northeim.

Inmitten der Krone, etwa in 18 m Höhe, hatte der Blitz eingeschlagen, um eine Spur bis zum Erdboden herunter zu hinterlassen. Ein tiefer Spalt ging durch Rinde und Holz fast senkrecht herab; stellenweise waren in ziemlich dichter Folge Holzsplitter von beliebiger Größe und Gestalt herausgesprengt worden und hingen aus dem Riß heraus. Im oberen Teil des Stammes waren 2,5—3 m lange Holzstücke ganz abgelöst und bis auf 20 m Entfernung und mehr fortgeschleudert worden. Am Fuß des Stammes waren an 2 etwa meterhohen Stellen Rindenstücke bis zur Erde herunter losgetrennt, die Holzoberfläche durch mehrere dichtstehende parallele Linien fein längsgeritzt worden. — Dazu gehört der unten beschriebene Fall Nr. 10 von Beschädigung über eine größere Fläche.

6. **Pappel** (Populus tremula), von Herrn Geh. Sanitätsrat Dr. Fries in Göttingen mitgeteilt.

Der Blitz hatte in einen Ast eingesetzt, indem er ein keilförmiges Loch herausschlug; von da ab wurde der Ast der Länge nach gespalten. Weiteres war nicht mehr festzustellen.

Die Frage, ob der Blitz imstande ist, gesunde lebende Bäume, die er trifft, in Brand zu setzen, ist jetzt wohl dahin entschieden, daß dies nicht vorkommt. Nur in alten hohlen Stämmen, deren Höhlung mit trocknem Mulm erfüllt ist, kann der Blitz zünden; dann beobachtet man aber immer nur ein Glimmen und Schwelen in dem Stamm, eine große leuchtende Flamme wird nicht gesehn. „So verhielt sich z. B. auch eine von Herrn Hegemeister Blöcher im „Urwalde“ bei der Sababurg im Reinhardswald noch schwelend angetroffene dicke Eiche, deren Höhlung jetzt innen völlig verkohlt ist. Wenn auch über die Art der Beschädigung bei den verschiedenen Baumarten noch durchaus nicht genügend zahlreiche Beobachtungen mitgeteilt worden sind, um eine allgemeine Aufstellung von Gesetzmäßigkeiten zu ermöglichen, so hat doch die

oben genannte Behandlung des Gegenstandes durch E. Stahl bereits eine wesentliche Klärung gebracht und zu weiteren Beobachtungen angeregt. Nach diesen Ausführungen werden Bäume, deren Stammoberfläche glatt ist und sich leicht benetzt, weniger oft und schwer durch Blitz beschädigt als solche Bäume, deren Stamm eine rissige Borke hat, so daß das Regenwasser in einzelne Rinnen zerlegt am Stamm herunterfließt. Denn jene bieten der Elektrizität eine große leitende Oberfläche dar, durch die eine rasche Ableitung zum Erdboden erfolgen kann, während die mit Rißborke versehenen Bäume nur schmale Leitungsbahnen herstellen, die für die im Blitz enthaltene große Elektrizitätsmenge nicht genügen, so daß ein Übergreifen auf die durchfeuchteten Stammgewebe stattfinden muß, das mit Zerstörungen endet.

Vielfach sind Blitzschläge („Streublitze") nachgewiesen worden, bei denen durch einen einzigen Blitz 2 und mehr Bäume getroffen und zerstört wurden. Das ist ohne Zweifel auf die oftmals beobachtete Verästelung eines Blitzes zurückzuführen, bei der 2 und mehr Stellen der Erde zugleich getroffen werden.

Auch bei den von A. Hoepffner[1]) aus Kiefernbeständen beschriebenen „Blitzlöchern" handelt es sich vermutlich um Streublitze, da in beiden Fällen 3 bezw. 4 nahe beieinander stehende Bäume vom Blitz getroffen waren. Hier starben dann nachträglich von den umgebenden Bäumen noch eine große Anzahl (70 Stämme) unter Vertrocknung der Krone, Abwerfen der Rinde und teilweiser Schwarzblaufärbung des Splintes ab.

Haberlandt[2]) erwähnt einer ähnlichen Erscheinung bei Palmen in tropischen Gegenden.

Aber es gibt noch eine andere Art der Blitzwirkung, die bislang meines Wissens nicht beachtet worden ist, und über deren Folgen irgendwelche Mitteilungen nicht vorliegen, In den letzten Jahren ist mir eine Anzahl derartiger Fälle bekannt geworden, so daß ich im nachstehenden schon eine kleine Übersicht derselben geben kann. Durch Herrn Forstmeister Vogt in Göttingen wurde ich bereits im Jahre 1908 darauf hingewiesen, daß im Bereich der Klosterforst Mandelbeck unweit Northeim in Hannover nach einem bestimmten Gewitter das Absterben nicht nur einer einzigen Fichte

---

1) A. Hoepffner, Beobachtungen über elektrische Erscheinungen im Walde. Ein weiterer Beitrag zum Kapitel „Blitzlöcher" im Walde. Naturwiss. Zeitschrift für Forst- und Landwirtschaft, 8. Jahrg. 1910, S. 411—416, mit 6 Abbildungen.

2) Haberlandt. Botanische Tropenreise.

infolge Blitzschlages stattgefunden hatte, sondern daß auch von den umgebenden Bäumen nach einiger Zeit eine größere Anzahl vertrocknete und wegen der entstandenen Borkenkäfergefahr beseitigt werden mußte. Dabei war festgestellt worden, daß nur ein einziger Blitz eingeschlagen hatte. Da somit durch einen Blitzschlag sämmtliche Bäume auf einer mehr oder minder ausgedehnten Waldfläche geschädigt werden, könnte man versucht sein, solche Fälle als „Flächenblitze“ zu bezeichnen, wenn nicht dieser Ausdruck, wie oben gesagt, etwa durch eine andere Erscheinung vorweggenommen wäre. Solche Beobachtungen waren zuerst im Jahre 1880 gemacht, damals aber nicht verstanden worden. Seither hat sich die Zahl derartiger „Blitzschlagflächen“ bis auf ein Dutzend erhöht, von denen ich einige teils erst während des Fällens der Bäume, teils schon vorher angesehen habe.

In sehr dankenswerter Weise hat sich Herr Hegemeister Blaeser, dessen Revier im Schutzbezirk Mandelbeck dieser Art von Blitzwirkung ganz besonders ausgesetzt zu sein scheint, der Mühe unterzogen, eine Zusammenstellung der dort bisher zur sicheren Beobachtung gelangten Fälle zu machen; auch ist von dem Genannten die Handzeichnung einer solchen Stelle angefertigt worden, aus der die Ausdehnung der Blitzschlagflächen, die Einschlagstelle des Blitzes in die Fläche, die Besetzung der Fläche mit Bäumen und die Art des Absterbens der nicht direkt vom Blitz getroffenen Bäume ersichtlich wird. Aus diesen Aufzeichnungen und seinen eigenen in mehreren Fällen an Ort und Stelle angestellten Untersuchungen der Blitzschlagflächen ergibt sich folgende Übersicht. Es handelt sich immer um reinen Fichtenbestand der Mandelbecker Klosterforst und immer um die Wirkungen eines einziges Blitzschlages.

1. Im Jahre 1880 wurde im Distrikt 84 in einem 90jährigen Bestande ein Stamm zersplittert; in den darauffolgenden 4 Jahren mußte eine 0.4000 ha große Fläche wegen Absterbens der Bäume und eingetretenen Käferfrasses völlig geräumt werden. Der Boden war eine Tonstelle.

2. 1904 (oder 1905) traf der Blitz im Distrikt 101 in 60-jährigem Bestande einen Stamm, dessen Rinde nur teilweise abgelöst wurde; erst im Winter wurden die inzwischen vollständig trocken gewordenen Stämme gefunden und sofort abgetrieben. Von Borkenkäfern befallene Stämme waren nicht darunter, so daß die Vermutung besteht, daß der Blitzschlag im Herbst erfolgt ist.

Die Fläche, auf der die Bäume um den vom Blitz getroffenen abstarben, betrug 0.1 Hektar, auf Lehmboden.

3. Im Distrikt 72 auf Buntsandstein mit einer Lehmschicht tödtete ein Blitz am 15. August 1907 in 45- bis 50jährigem Bestande eine Fichte derart, daß sie in 3 Stücke zerbrach, und zwar blieb ein Teil des Stammes stehen, ein Mittelstück fiel heraus, und die Krone wurde als Ganzes erhalten. Bei diesem Gewitter ereignete sich nur dieser einzige Blitz. 66 Bäume, die um den zertrümmerten Baum herumstanden auf 0.0528 ha Fläche, starben bis zum 6. März 1908 teils völlig ab, teils zeigten sie Vertrocknungserscheinungen, die sich entweder nur auf den unteren Teil, oder nur auf den oberen Teil oder nur auf den mittleren erstreckten, in einigen Fällen den unteren und oberen Teil des Baumes betrafen, während der mittlere Teil noch saftig war. In sehr zahlreichen Fällen waren nur einige Astspitzen dürr geworden, doch mußten schließlich sämtliche Stämme bis zum Januar 1909 abgehauen werden, weil sie eingingen und die Gefahr einer Invasion durch Käfer dringend wurde.

4. Im Jahre 1909 wurde im Distrikt 79 auf Buntsandstein mit Lehmschicht in 80jährigem Bestande ein Fichtenstamm vom Blitz zerschlagen; in der nächsten Nachbarschaft zeigten sich auf 0.0208 ha die Zweigspitzen der Bäume wie versengt. Die Bäume wurden bis auf einige Probestämme, die aber im folgenden Winter auch trocken wurden, sofort aufgearbeitet.

5. Ebenfalls 1909 wurde im Distrikt 96 auf Kalkboden mit einer Lehmschicht in 55—60jährigem Bestand ein Stamm vom Blitz zerspalten. Auf einer umgebenden Fläche von 0.0320 ha erschienen sämtliche Bäume alsbald an den oberen Zweigspitzen wie angesengt. Sie wurden dann insgesamt sofort eingeschlagen mit dem Erfolg, daß Trocknis und Käferstämme in den darauf folgenden Jahren daselbst nicht mehr vorkamen.

6. Das Jahr 1910 war reich an derartigen Beschädigungen (Nr. 6—11). So kam eine derselben im Distrikt 62 auf 0.0288 ha in 35—40jährigem Bestande vor, der sich auf Kalk mit darübergelegter Lehmschicht befindet. Ich habe sie selbst gesehen. Viele Bäume mit dürr gewordenen Astspitzen wurden gefällt, teilweise photographiert.

7. Im Distrikt 65 auf gleicher Unterlage wurde in 65—75jährigem Bestande durch den Blitz ein Stamm zerschlagen; auf 0.0100 ha Fläche um ihn herum trockneten an den anderen

Meter

30

20

10

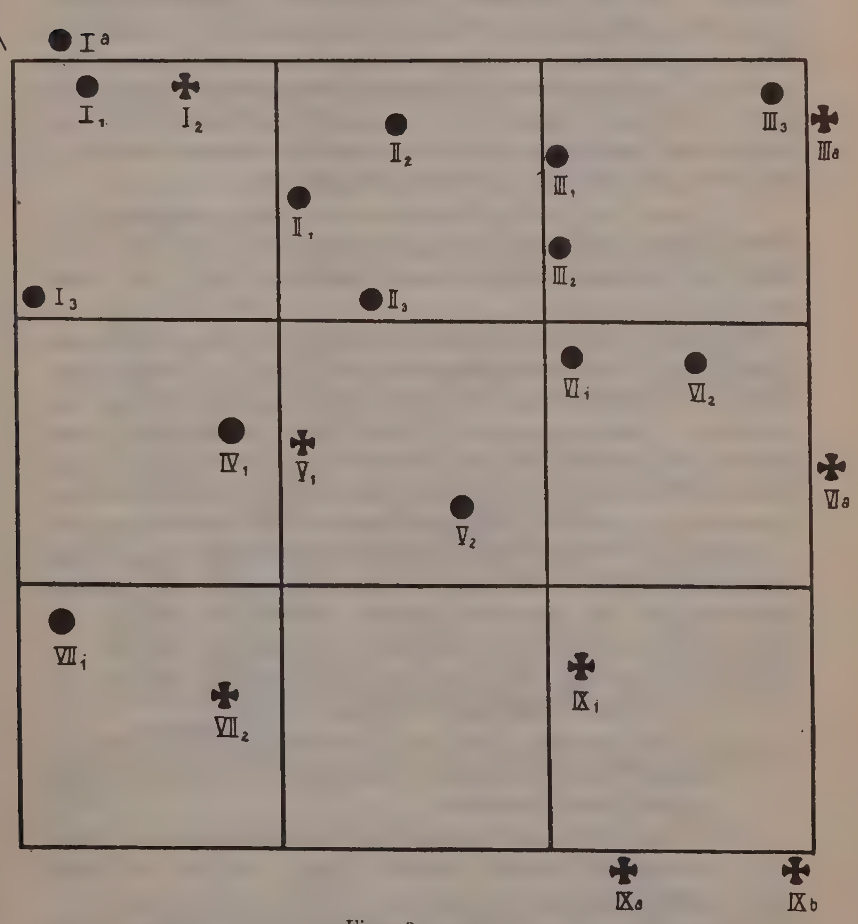
I_a I_1 I_2 II_1 II_2 II_3 III_1 III_2 III_3 IV_1 V_1 V_2 VI_1 VI_2 I_3 VII_2 IX_1

Figur 1.

Bäumen die oberen Zweige ab. Sämtliche Stämme wurden sofort aufgearbeitet, ein Nachhieb war nicht weiter erforderlich.

8. Ein weiterer Fall im Distrikt 71 in 45—50jährigem Bestand und auf Boden von derselben Beschaffenheit verlief ebenso. Die betroffene Fläche betrug 0.0016 ha.

9. Das Jahr 1910 brachte im Distrikt 81 b in 50jährigem Bestande auf Kalkboden mit Lehmschicht auch einen Fall, bei dem die Blitzwirkung nur durch das Absterben von Astspitzen



Figur 2.

auf einer Fläche von 0.0540 ha beobachtet wurde, nicht aber auch ein einzelner Stamm in erkennbarer Weise angeschlagen worden wäre. Sämtliche Stämme wurden sofort aufgearbeitet, ein Nachhieb ist nicht erfolgt.

10. Wiederum 1910 erfolgte im Distrikt 102 auf Kalkunterlage mit starker Lehmschicht in 75jährigem Bestande ein Blitzschlag, durch den ein Fichtenstamm vollständig zerschmettert wurde. Aus dem Stamm schlug der Blitz 2—3 m lange Holzsplitter heraus, die bis auf viele Meter Entfernung fortgeschleudert wurden. Der Fall ist schon oben erwähnt (5), photographische Aufnahmen sind gemacht worden. Ein Teil der umgebenden Bäume, die verdorrte Zweige zeigten, wurde alsbald nach dem Auffinden gefällt, andere blieben als Probestämme einstweilen stehen, doch vertrockneten sie in den Jahren 1910 und 1911 vollständig und mußten auf 0.0448 ha beseitigt werden. Dabei ist ein starker Käferanflug zu beobachten gewesen.

11. Auch im Distrikt 103 wurde eine völlig gleichartige Beschädigung in 65jährigem Fichtenbestand über eine Fläche von 0.0352 ha beobachtet und ebenso behandelt wie 10. Die Bodenunterlage war dieselbe.

12. Der letzte beobachtete Fall betraf im Jahre 1912 denselben Distrikt 103 in 65jährigem Bestande auf Kalk mit starker Lehmschicht. Hier hatte ich wiederum Gelegenheit die auf der betroffenen Fläche stehenden 18 Bäume fällen zu lassen und festzustellen, in welcher Weise Vertrocknungserscheinungen eingetreten und wieweit sie vorgeschritten waren. Die beiden Diagramme Fig. 1 und Fig. 2 ergeben näheres; das erstere zeigt die Anordnung der Bäume auf der betroffenen Fläche, das andere veranschaulicht die Verteilung der trockenen und noch saftigen Stammteile an den einzelnen Bäumen, wie sie an den eben gefällten und sofort entrindeten Stämmen ausgemessen wurden.

Baum I, 1: war bis 19 m über der Erde trocken, darüber auf 12 m Erstreckung bis zur Spitze feucht.

„ I, 2: die untersten 2 m saftig, die folgenden 10 m trocken, dann 8 m bis zur Spitze grün, jedoch ziemlich viel Astspitzen dürr geworden.

„ I, 3: unten 6 m mit einigen Trockenflecken und auch schon strichweise einseitig trocken, dann 18 m bis zur Spitze ganz trocken.

„ I, a: unten 11 m trocken, dann 3 m grün; war ein unterdrückter Stamm.

Baum II, 1: 15 m trocken, darüber 7 m saftig, ziemlich viele Astspitzen dürr.

„ II, 2: 6 m trocken, darüber 11 m feucht, auch der Wipfel noch grün.

„ II, 3: 24 m langer Baum, bis zur Spitze völlig trocken, auch schon bis zum Wipfel dürr geworden.

„ III, 1: 16 m hoher Baum, bis zur Spitze ganz trocken, auch die Äste stark abgewelkt.

„ III, 2: unten auf 14 m Erstreckung trocken, darüber 12 m saftig, auch die Spitze noch gut grün.

„ III, 3: 8,5 m ganz dürr, der Wipfel beschädigt, die Astspitzen abgestorben; der Baum war unterdrückt.

„ IV, 1: 22 m trocken, 8 m grün, der Wipfel gut.

„ V, 1: 3 m gesund, darüber 4 m fleckig, dann 12 m saftig, weitere 5 m fleckig, 4 m saftig; die Spitze noch völlig grün, die darunter befindlichen Äste mit abgestorbenen Spitzen.

„ V, 2: unten 1 m halbtrocken, darüber 23 m, nämlich ganz bis zur Spitze trocken, alle Äste ± abgestorben, der Wipfel dürr.

„ VI, 1: über der noch saftigen Wurzel 12 m lang trocken (bei 11—12 m Höhe Harzausfluß wie bei III, 1 u. III, 2). dann 16 m bis zur Spitze grün, doch hatte der Wipfel einige vertrocknete Astspitzen.

„ VI, 2: unten 1 m saftig, darüber 8 m trocken, dann weiter 10 m lang feucht, darauf 3 m trocken, 1 m feucht, 2 m trocken, endlich 5 m bis zur Spitze grün.

„ VII, 1: war schon früher gefällt worden, unten trocken.

„ VII, 2: 22 m saftig, darüber 8.75 m trocken, hat einige dürre Astspitzen.

„ IX, 1: erschien noch gesund, war auch von unten her auf 21 m saftig, darüber 3 m trocken, dann noch 4 m bis zur Spitze grün, aber die Zweigspitzen waren teilweise abgestorben.

Die Bäume Nr. III a, VI a, IX a, IX b blieben zur Probe stehen.

Zum Verständnis der beschriebenen Erscheinungen läßt sich folgende Aufstellung machen: Der Blitz schlägt an einer Stelle des Baumes ein, die genügende Leitungsfähigkeit besitzt. Infolge

der starken Erwärmung wird das in Cambium und Splintholz enthaltene Wasser zur plötzlichen Verdampfung gebracht. Dadurch wird die Rinde abgesprengt. Je weiter abwärts, desto größer sind die Widerstände, die der Blitz auf seinem Wege zum Stammgrunde findet oder sich selbst bereitet, daher nimmt die Breite der Wunde, insbesondere die der abgerissenen Rindenfläche nach unten zu; auch dringt der Blitz mehr und mehr in den Splint ein, aus dem er Streifen und ± grosse Splitter herausschlägt. Daß die Durchfeuchtung des Holzes im unteren Teil des Stammes relativ geringer ist als im oberen, dünneren Teil desselben, geht aus der Überlegung hervor, daß der nämliche aufsteigende Wasserstrom unten auf einen größeren Kreisumfang verteilt ist als oben; und aus der direkten Beobachtung, daß dickere Stammabschnitte ein weniger tiefes Eindringen des Wassers zeigen als dünnere, wie man besonders gut an gefrorenen Stämmen, die im Winter gefällt werden, erkennen kann. — Durch Herrn Professor Dr. Simon in Göttingen werde ich darauf hingewiesen, daß möglicherweise auch das Skin-Phänomen (Haut-Phänomen) mit zum Verständnis heranzuziehen sei, nach welchem ein starker elektrischer Strom auf seinem Wege mehr und mehr an die Oberfläche des Leiters gedrängt wird; um so besser wäre dann das stärkere Entrinden der unteren Stammteile zu verstehen. Die Beschädigung und das nachträgliche gleichzeitige Absterben zahlreicher Fichten-Bäume auf größerer Fläche erkläre ich mir folgendermaßen. Wenn der Blitz in eine Fichte einschlägt und so stark ist, daß er nicht nur diesen Baum zerschmettert, sondern auch noch einen Überschuß an Strom besitzt, so geht er vom Stammgrunde längs der gut leitenden — weil durchfeuchteten — und oft netzartig mit einander verwachsenen Wurzeln allseitig auf andere Bäume über. Die Wurzeln der Fichte streichen in geringer Tiefe wagerecht, Pfahlwurzeln sind nicht vorhanden. Daher kommt es, daß eine Anzahl Bäume auf größerer Fläche in der Umgebung des Einschlagsbaumes geschädigt wird, daß die Vertrocknungserscheinungen an diesen Stämmen in den meisten Fällen unten beginnen und nach oben fortschreiten, und daß zunächst die Zweigspitzen verdorren, die am stärksten verdunsten und am ehesten die Hemmung der Wasserzufuhr empfinden müssen. Endlich kann man es verstehen, daß an den Wurzeln keine Beschädigungen zu sehen sind. Denn die feuchten Wurzeln leiten gut, jedenfalls besser als der Erdboden in ihrer Umgebung. Die stärkeren Wurzeläste verbinden benachbarte Stämme eines geschlossenen Bestandes mit einander, so daß die Elektrizität in die feineren Auszweigungen der Wurzel

garnicht gelangt. So erscheint es begreiflich, daß man Beschädigungen der feinen Wurzelenden nicht hat auffinden können, die auf Einwirkung von starken elektrischen Strömen zurückzuführen wären.

Da andere Waldbäume tiefgehende Wurzeln haben, und nur die Fichte mit dem gesamten Wurzelwerk der Erdoberfläche nahe bleibt, so werden die Beschädigungen über größere Flächen im Walde immer nur in Fichtenbeständen beobachtet, nicht bei anderen Nadelholzarten oder in Laubholzwaldungen.

Ueber einen Satz des Herrn Caratheodory.

Von

Ludwig Bieberbach in Basel.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung vom 1. November 1913.

1. Im 72sten Bande der mathematischen Annalen hat Herr Caratheodory einen Satz bewiesen, der sich so aussprechen läßt: Es sei $A_1, A_2 \ldots$ eine Folge einfach zusammenhängender schlichter gleichmäßig beschränkter Bereiche und $f_n(z)$ diejenige Funktion, die A_n auf das Innere des Einheitskreises $|z| < 1$ konform abbildet und wo $f_n(0) = 1$ und $f_n'(0)$ reell und positiv ist. Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz der $f_n(z)$ gegen eine Grenzfunktion $f(z)$ die, daß die Gebietsfolge der A_n gegen ihren Kern konvergiert. Die Grenzfunktion bildet den Einheitskreis umkehrbar eindeutig und konform auf diesen Kern ab. Unter Kern einer Gebietsfolge versteht Herr Caratheodory das größte den Nullpunkt im Inneren enthaltende Gebiet, dessen einzelne Punkte innere Punkte fast aller Gebiete A_n sind. Wenn es kein solches gibt, den Nullpunkt allein. Man sagt eine Gebietsfolge konvergiere gegen ihren Kern, wenn jede Teilfolge den gleichen Kern besitzt. In diesem Satze hat also die naive Vorstellung, daß bei stetiger Änderung des Gebietes auch die Funktionen, die es auf den Einheitskreis abbilden, sich stetig ändern ihre präzise Formulierung erfahren. In der Tat hat ja auch Herr Caratheodory seinen Satz für eine bestimmte Klasse von Gebieten noch so verschärft, daß er den Inhalt jener naiven Vorstellung noch genauer ausschöpft (cf. § 25 der Arbeit). Bei sinngemäßer Erweiterung des Begriffes Kern konnte Herr Caratheodory seinen Satz auch für nicht schlichte Gebiete A_n

aussprechen. Die Caratheodorischen Beweise benutzen einmal den Montel-Vitalischen Satz von der gleichmäßigen Konvergenz passender Teilfolgen einer gleichmäßig beschränkten Funktionenfamilie und außerdem gewisse Folgerungen die Herr Caratheodory in seiner Arbeit aus dem Schwarzschen Lemma zieht. In der Tat sind aber wie wir bald erkennen werden diese Folgerungen aus dem Schwarzschen Lemma für den Beweis nicht erforderlich. Dieses Festhalten am Schwarzschen Lemma verhinderte wohl auch Herrn Caratheodory seinen Satz so allgemein auszusprechen als er sich in Wirklichkeit formulieren läßt. Er gilt nämlich nicht allein für die Abbildung auf einen Kreis sondern in genau gleicher Fassung auch für jeden beliebigen anderen Bereich, mag dieser nun einfach oder mehrfach zusammenhängend sein. Die Methoden die wir zum Beweis dieses allgemeineren Satzes verwenden werden sind sehr elementarer Natur. Nicht einmal zum neuen Eindeutigkeitssatz des § 5 brauchen wir ein anderes Hilfsmittel als den Montelschen Satz der meine ganze Arbeit beherrscht.

2. Ausführlich wollen wir nur bei dem Falle von lauter schlichten Bereichen verweilen, weil sich auf die anderen Fälle mein Beweis genau so wie der Caratheodorysche übertragen läßt. Einiges nähere wird wohl auch eine im Entstehen begriffene Basler Dissertation unter anderem enthalten. Auch hier könnten wir uns darauf beschränken die §§ 13 und 14 der Caratheodoryschen Arbeit zu übernehmen, wo vom Schwarzschen Lemma kein Gebrauch gemacht wird und brauchten dann nur statt § 15 unseren abweichenden Beweisgang anzugeben. Aber im Interesse einer einheitlichen Darstellung will ich meinen vollständigen Beweis hierher setzen. Übrigens geht die Caratheodorysche Gedankenführung dicht an der Ideenverbindung meines Beweises vorbei. Ich werde den Satz zunächst in einer ein kleinwenig anderen Fassung beweisen und dann erst auf die von Herrn Caratheodory gewählte Formulierung zu sprechen kommen. Ich beweise zunächst folgendes: In einem beliebigen schlichten und beschränkten den Nullpunkt umschließenden Bereich B der z-Ebene sei eine Folge von gleichmäßig beschränkten Funktionen gegeben $f_1(z) \ldots f_n(z) \ldots$ wo $f_2(0) = 0$ und $f'_n(0) = 1$. Diese Funktionen mögen B auf lauter schlichte Gebiete A_n einer x-Ebene abbilden und unsere Funktionenfolge möge gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f(z)$ konvergieren. Dann bildet $f(z)$ das Gebiet B auf den Kern A jener Gebietsfolge ab.

3. Beweis: a. Jedenfalls ist die Grenzfunktion nicht konstant, da auch für sie $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ gilt. Sie vermittelt jedenfalls eine Abbildung des Bereiches B auf einen Bereich der ein- oder mehrblättrig ganz über dem Kern A oder einem Teil desselben ausgebreitet ist. Man kann (cf. § 13 der Arbeit des Herrn Caratheodory) leicht zeigen, daß die Abbildung schlicht sein muß. Wir halten uns nicht dabei auf. Das ergibt sich nachher alles ganz von selbst. Es genügt wenn wir zeigen, daß alle Punkte in welchen $f'(z)$ von Null verschieden ist in innere Punkte des Kernes A bei der Abbildung durch $f(z)$ übergehen. Für die anderen folgt es ja daraus sofort. Sei P irgend ein Punkt des Bereiches B in dem $f'(z)$ von Null verschieden ist. Wir verbinden ihn mit dem Nullpunkt durch eine einfache stetige Kurve die keinen Punkt trifft in dem $f'(z) = 0$ ist. Um jedem Punkt dieser Kurve läßt sich ein Kreis schlagen, der durch $f(z)$ auf einen schlichten Bereich der x-Ebene abgebildet wird, und nach dem Borelschen Theorem genügen endlich viele Kreise, um zu erreichen, daß jeder Punkt der Kurve dem Inneren eines solchen angehört. Diese Kreise werden wegen der gleichmäßigen Konvergenz der $f_n(z)$ gegen $f(z)$ durch fast alle dieser Näherungsfunktionen auf Bereiche abgebildet, die von der durch $f(z)$ vermittelten Abbildung beliebig wenig abweichen. Daher verläuft ein beliebig großer innerer Teilbereich der durch $f(z)$ vermittelten Kreisbilder im Inneren fast aller Gebiete A_n und daher verläuft auch ein beliebig großer innerer Teilbereich desjenigen Gebietes, das die Gesamtheit jener Kreisbilder ausmacht im Inneren fast aller Gebiete A_n und gehört daher mit $x = 0$ dem Kerne an. Daher ist auch das Bild von P ein innerer Punkt des Kernes.

b. Seien nun $\varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x) \ldots$ die Umkehrungsfunktionen der $f_1(z) \ldots f_n(z) \ldots$ Diese sind im Kerne A gleichmäßig beschräkt. Ich wähle eine Folge aus die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $\varphi(x)$ konvergiert. Von den $f_n(z)$ denke ich mir nur die zu den ausgewählten $\varphi_n(x)$ als Umkehrungsfunktionen gehörigen beibehalten. Ich behaupte $\varphi(x)$ ist die Umkehrungsfunktion von $f(z)$. Betrachten wir nämlich einen Punkt z_0 aus B. $x_0 = f(z_0$, ist nach a. ein innerer Punkt des Kernes A. Um z_0 schlage ich einen Kreis vom Radius ϱ der ganz dem Bereich B angehört. $f(z)$ bildet ihn ab auf einen Bereich, der der über einem den Punkt x_0 im Inneren enthaltenden Gebiet der x-Ebene ausgebreitet ist. Die Näherungsfunktionen $f_n(z)$ bilden den Kreis vom Radius ϱ ab auf schlichte Gebiete, die fast alle den Punkt x_0 im Inneren enthalten. (Jedenfalls wird nämlich ein genügend kleiner Teilbereich,

der z_0 umschließt, durch $f(z)$ entweder auf eine schlichte Umgebung von x_0 abgebildet oder auf einen Bereich der x_0 als einzigen Windungspunkt hat und dessen Rand eine von Null verschiedene Minimaldistanz von x_0 hat. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der $f_n(x)$ gegen $f(z)$ gehört daher x_0 dem Inneren fast aller der schlichten Bereiche an, in die jene Umgebung von z_0 durch die Näherungsfunktionen übergeführt wird.) Die so gewonnenen Umgebungen von x_0 werden durch die $\varphi_n(x)$ auf jenen Kreis vom Radius ϱ abgebildet. Also sind fast alle $\varphi_n(x_0)$ Punkte dieses Kreises. Da wir aber ϱ beliebig wählen können so ist z_0 der einzige Häufungspunkt der $\varphi_n(x_0)$. Wir haben also $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x_0) = z_0$. Für jeden Punkt x_0 der einen von der Funktion $f(z)$ angenommenen Wert darstellt, folgt also aus $x_0 = f(z_0)$, daß auch $z_0 = \varphi(x_0)$. Also ist $\varphi(x)$ die Umkehrungsfunktion von $f(z)$.

c. Zu diesen Werten x_0 gehören aber alle Punkte des Kernes A. Denn in jedem derselben ist $\varphi(x)$ definiert und nimmt da einen Wert an, der wie man ebenso wie vorhin unter a erkennt dem Inneren des Bereiches B angehört. War also der Wert, den wir daraufhin untersuchen wollen, ob er von $f(z)$ angenommen wird oder nicht x_0 so folgt analog wie unter b aus $z_0 = \varphi(x_0)$, daß auch $x_0 = f(z_0)$, daß also x_0 zu den von $f(z)$ angenommenen Werten gehört.

d. Daraus folgt also nun, daß jedenfalls der Bildbereich des Bereiches B so wie ihn die Funktion $f(z)$ vermittelte, über dem ganzen Kern A ausgebreitet ist und zwar schlicht und unverzweigt weil die Umkehrungsfunktion $\varphi(x)$ von $f(z)$ im ganzen Kern A eindeutig und regulär ist —.

4. Wir wollen nun den bewiesenen Satz noch verallgemeinern und überhaupt aus unserer Methode alles herausholen was sie enthält. Zunächst brauchen die Funktionen $f_n(z)$ nicht alle im selben Bereich B definiert zu sein. Es genügt anzunehmen daß jede in einem Gebiete B_n definiert ist, derart daß diese Gebiete gleichmäßig beschränkt sind und gegen ihren Kern B konvergieren. Durch diese Annahme bleibt unser Beweis unverändert. Wir bemerken weiter, daß die A_n unter den Bedingungen des Satzes jedenfalls gegen den Kern A konvergieren. Sonst könnten wir eine Teilfolge herausgreifen, die einen anderen Kern besitzt und $f(z)$ würde, wie wir ganz ebenso beweisen könnten eine Abbildung von B auf diesen neuen Kern vermittlen was offenbar unsinnig wäre. Alles in allem haben wir also jetzt bewiesen:

In den gleichmäßig beschränkten Gebieten B_n,

die gegen ihren Kern B konvergieren sei eine Folge gleichmäßig beschränkter regulärer Funktionen definiert ($f_n(z)$ in B) und es sei der Nullpunkt innerer Punkt aller dieser Bereiche und in demselben $f_n(0) = 0$ und $f'_n(0) = 1$. Die $f_n(z)$ mögen gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f(z)$ konvergieren B_n werde durch $f_n(z)$ auf ein schlichtes Gebiet A_n abgebildet. Die A_n seien gleichmäßig beschränkt. Dann bildet $f(z)$ den Kern B umkehrbar eindeutig und konform auf den Kern A ab. Die A_n konvergieren gegen ihren Kern.

5. Nun kann man aber weiterhin auch umgekehrt aus der Konvergenz der A_n gegen ihren Kern auf die gleichmäßige Konvergenz der $f_n(z)$ gegen eine Grenzfunktion schließen. Denn wenn die $f_n(z)$ nicht gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergierten, so würden wir aus der gleichmäßig beschränkten Folge der $f_n(z)$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen, deren Grenzfunktion dann gleichfalls den Kern B auf den Kern A abbilden würde. Zwei derartige Abbildungsfunktionen würden aber nur dann von einander verschieden sein können, wenn es eine von z verschiedene Funktion gäbe die den Bereich B in sich abbildet, dabei einen inneren Punkt festläßt und dort eine Ableitung vom Werte 1 hat. Eine solche Funktion gibt es aber nicht. Dies zeigt der folgende Eindeutigkeitssatz, den wir mit Rücksicht auf eine erst hernach zu machende Anwendung gleich etwas allgemeiner aussprechen als wir ihn momentan brauchen.

Eindeutigkeitsatz. Sei B ein den Nullpunkt umschließender schlichter beschränkter Bereich und $f(z)$ eine im Bereich reguläre von z verschiedene Funktion die den Nullpunkt festläßt und dort eine Ableitung $a = 1$ oder $|a| \neq 1$ besitzt. Dann kann diese Funktion niemals eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Bereiches auf sich selbst vermitteln.

Beweis: Nehmen wir zunächst an, die Ableitung a_1 sei von eins verschieden. Dann dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinzeit annehmen daß der Betrag $|a_1|$ größer als eins ist. Denn sonst brauchten wir nur zur inversen Funktion überzugehen um dies zu erreichen. Bilden wir nun $f_1 = f$, $f_2 = f(f_1)$, $f_3 = f(f_2)$ allgemein $f_n = f(f_{n-1})$ und so fort in infinitum, so haben wir hier eine Folge von gleichmäßig beschränkten im Bereich B definierten Funktionen. (Sie bilden ihn ja alle auf sich ab.) Wir könnten also eine gleichmäßig konvergente Folge auswählen. Das geht aber nicht an, weil die Werte der Ableitungen bei $x = 0$ die

folgenden sind a_1, a_1^2, ... a_1^2 ... also wegen $|a_1| > 1$ mit n in infinitum wachsen und keinen endlichen Häufungswert besitzen, der als Wert der Ableitung einer Grenzfunktion auftreten könnte. Es bleibt nun der Fall zu betrachten, daß die Ableitung gleich eins ist. Dann möge die Entwicklung der Funktion so beginnen $f(z) = z + a_n z^n + \cdots$ Es möge also a_n der erste nicht verschwindende Koeffizient sein. Bilden wir nun die Funktionenfolge $f_1 = f$, $f_2 = f(f_1)$ ... und allgemein $f_n = f(f_{n-1})$, so beginnen die Entwicklungen dieser Funktionen so $f_n = z + na_n z^n + \cdots$ Die zweiten Koeffizienten wachsen nun über alle Grenzen und darum können wir aus der gleichmäßig beschränkten Funktionenfolge keine gleichmäßig konvergente Folge auswählen wie es nach dem Satze von Montel der Fall sein müßte.

Damit haben wir also nun den folgenden allgemeinen Satz bewiesen.

Sei B_1 ... B_n ... eine Folge gleichmäßig beschränkter schlichter Gebiete die gegen ihren Kern konvergieren und die den Nullpunkt im Inneren enthalten. Sei weiter in jedem der Bereiche eine Funktion $f_n(z)$ erklärt, die ihn auf einen schlichten Bereich A_n abbildet und seien diese Bereiche ebenfalls gleichmäßig beschränkt und sei $f_n(0) = 0$, $f'_n(0) = 1$. Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die $f_n(z)$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f(z)$ konvergieren die, daß die A_n gegen ihren Kern A konvergieren. Die Grenzfunktion bildet den Kern B auf den Kern A ab.

6. Wir können uns nun auch leicht von der Annahme frei machen, daß $f'_n(0) = 1$ und sie durch die andere, daß $f'_n(0)$ dem Betrag nach größer oder kleiner als eins sei ersetzen.

Wenn zunächst die Funktionenfolge gleichmäßig gegen eine von Null verschiedene Grenzfunktion konvergiert so können wir genau wie oben zeigen, daß die A_n gegen ihren Kern konvergieren und daß die Grenzfunktion die beiden Kerne aufeinander abbildet. Wenn dagegen die $f_n(z)$ gleichmäßig gegen Null konvergieren so können wir im Anschluß an Herrn Caratheodory so schließen, daß der Kern A aus dem Nullpunkt allein bestehen muß. Denn wäre der Kern ein Gebiet um $x = 0$ so könnten wir aus der gleichmäßig beschränkten Folge der im Kerne A definierten Umkehrungsfunktionen eine in A gleichmäßig konvergente Folge auswählen. Sei $\varphi(x)$ die Grenzfunktion. Sie bildet wie man genau

wie oben erkannt A ab auf einen ganz über B ausgebreiteten Bereich bezw. den Punkt $z = 0$ wenn $\varphi = 0$ ist. Sei also $x_0 \neq 0$ ein Punkt von A und z_0 der Bildpunkt in B. Wir haben $z_0 = \varphi(x_0)$. Es gibt einen Kreis um z_0 in dem fast alle $f_n(z)$ beliebig wenig von Null verschieden sind. Da aber andererseits $z_0 = \lim\limits_{n=\infty} (\varphi_n(x_0))$ gilt, wenn n Indizes der Teilfolge durchläuft und die $f_n(z)$ die Umkehrungsfunktionen der $\varphi_n(x)$ sind, so gibt es in beliebiger Nähe von z_0 für die zugehörigen $f_n(z)$ Punkte in welchen $f_n(z) = x_0$ ist, also nicht beliebig wenig von Null verschieden ist. Wir müssen daher die Annahme fallen lassen, daß A ein Gebiet ist. Auch erkennt man jetzt leicht, daß die A_n gegen diesen ihren aus einem einzigen Punkt bestehenden Kern konvergieren müssen. Denn sonst gäbe es eine Teilfolge, deren Kern ein Gebiet wäre, während nach wie vor die $f_n(z)$ gegen Null konvergieren. Damit haben wir nun ganz allgemein gezeigt daß die Konvergenz der A_n gegen ihren Kern notwendig ist für die Konvergenz der $f_n(z)$. Es bleibt uns zu zeigen, daß die Konvergenz der A_n gegen ihren Kern auch ausreicht, um auf die Konvergenz der $f_n(z)$ zu schließen. Wir betrachten zunächst den Fall, daß keine Teilfolge gegen Null konvergiert. Dann können wir genau wie oben schließen, daß jede Grenzfunktion den Kern A_n auf den Kern A abbildet und unser Eindeutigkeitssatz lehrt uns, daß alle diese Abbildungsfunktionen übereinstimmen daß also die Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert. Es bleibt also der Fall zu behandeln, daß irgend eine Teilfolge gleichmäßig gegen Null konvergiert. Dann sind zwei Fälle denkbar nämlich jenachdem der Kern A nur aus dem einen Punkte $x = 0$ besteht, oder aber eine diesen Punkt umschließendes Gebiet enthält. Im ersten Falle muß jede Teilfolge gegen Null konvergieren. Denn wenn eine Teilfolge gegen eine nichtkonstante Grenzfunktion konvergierte, so müßte nach unseren seitherigen Schlußweisen durch sie B auf A abgebildet werden und es könnte nicht aus diesem einzigen Punkte bestehen. Wenn aber im zweiten Falle der Kern ein Gebiet um A enthielte, so könnten wir wie vorhin schließen, daß keine Grenzfunktion identisch Null sein kann. Damit haben wir nun in allen Teilen den folgenden Satz bewiesen:

Die schlichten Bereiche B_n mögen alle den Punkt $z = 0$ enthalten und gleichmäßig beschränkt sein. In jedem derselben sei eine Funktion $f_n(z)$ definiert, $f_n(0) = 0$ und $|f'_n(0)1 \neq$ oder $f'_n(0) = 1$, die ihn auf einen

schlichten Bereich A_n abbildet; die A_n seien gleichmäßig beschränkt. Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die $f_n(z)$ gleichmäßig konvergieren die, daß die A_n gegen ihren Kern konvergieren und $f(z)$ bildet B auf A ab.

Auf den oben schon einmal erwähnten verschärften Caratheodoryschen Satz für spezielle Gebietsklassen gehe ich hier nicht ein, da sich mein Beweis dafür besser den Gedankengängen einer demnächst an anderer Stelle erscheinenden Arbeit einreiht.

7. Hier mag nur noch eine Anwendung des bewiesenen Satzes Platz finden. Wir wollen nach dem Gedanken der Kontinuitätsmethode beweisen, daß man jedes gradlinig begrenzte verzweigungspunktfreie Polygon auf das Innere eines Kreises konform abbilden kann. Ähnlich dürfte sich auch zeigen lassen, daß man jeden mehrfach zusammenhängenden von geradlinigen Polygonen begrenzten Bereich auf einen Kreisbereich abbilden kann (und damit überhaupt jeden endlich vielfach zusammenhängenden Bereich), da sich analog wie bei einfachzusammenhängenden Polygonen auch hier die Abbildungsfunktionen explizite angeben lassen. Allerdings dürften bei einer Durchführung noch einige Schwierigkeiten zu überwinden sein.

Der Grundgedanke der Kontinuitätsmethode ist dieser: Ein geradliniges n-Eck hängt von $n+1$ Parametern ab. Durch die Formel

$$x = \int_0^z \frac{(z-z_1)^{\mu_1} \ldots (z-z_n)^{\mu_n} dz}{z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n}} \qquad \mu_1 + \mu_2 \cdots + \mu_n = -2, \quad \zeta_\varkappa = re^{2\vartheta_\varkappa} \; (\varkappa = 1, 2 \ldots n)$$

Wird der Kreis vom Radius r auf ein n-Eck mit den Außenwinkeln $-\mu_\varkappa \pi$ abgebildet. Diese Formeln enthalten auch $n+1$ Parameter. Kommt so jedes n-Eck heraus, daß den Nullpunkt in seinem Inneren enthält?

Jede Formel liefert ein bestimmtes Polygon und ein n-Eck wird wenn überhaupt nur von einer Formel geliefert. Das Kontinuum der Formelpolygone ist somit jedenfalls ein Teil des Kontinuums der Polygone, welche den Nullpunkt im Inneren enthalten. Wir müssen zeigen daß das Kontinuum der Formelpolygone dieses Polygonkontinuum ausfüllt. Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall, so hätte das Kontinuum der Formelpolygone einen Grenzpunkt im Inneren des Polygonkontinuums, Wir hätten also mit anderen Worten eine Folge von Polygonen die von unseren Formeln geliefert würden und die gegen ein n-Eck als Kern konver-

gierten das auch den Nullpunkt im Inneren hat. Dieses n-Eck nun würde entweder selbst nicht mehr von den Formeln geliefert oder aber es lägen doch in seiner beliebigen Nähe n-Ecke die nicht von den Formeln erreicht würden. Dieser letztere Fall ist nicht möglich, denn wenn ein Polygon von einer Formel geliefert so liefern die Nachbarformeln alle Nachbarpolygone. Dies folgt wegen der umkehrbar eindeutigen stetigen Beziehung zwischen den beiden Kontinuen entweder nach dem Brouwerschen Satz von der Invarianz des Gebietes wonach aus einem inneren Punkte kein Grenzpunkt werden kann oder nach der von Schäfli Crelle 78 durchgeführten Berechnung der Funktionaldeterminante der Abbildung, die ihr Nichtverschwinden aufweist. Wir haben also nur die Annahme weiter zu verfolgen daß ein Polygon welches $x = 0$ im Inneren hat Grenze von Formelpolygonen ist, ohne selbst ein Formelpolygon zu sein. Die Polygone A_n konvergieren also gegen ihren Kern A. Wir dürfen annehmen daß sie gleichmäßig beschränkt sind. Sonst würden wir durch reziproke Radien zu Kreisbogenpolygonen übergehen die dieser Bedingung genügen; an unseren weiteren Schlüssen würde dadurch nichts geändert. Die Radien der Bildkreise liegen jedenfalls zwischen festen positiven von Null und unendlich verschiedenen Grenzen. Denn beliebig groß kann kein Radius werden. Denn durch eine in einem Kreise reguläre Funktion, die in seinem Mittelpunkt den Abbildungsmodul eins hat, wird dieser Kreis immer auf einen Bereich abgebildet der einen größeren (inneren) Inhalt hat. (In einer anderen Arbeit will ich auf diesen Punkt näher eingehen.) Da aber die Bildgebiete gleichmäßig beschränkt sind müssen demnach auch die Kreisradien unter einer endlichen Schranke bleiben. Da alle Gebiete A_n einen den Nullpunkt umschließenden festen Kreis im Inneren haben so zeigt die gleiche Schlußweise, daß unsere Kreisradien auch nicht beliebig klein werden können. Wir können also eine Kreisfolge und damit eine Polygonfolge herausgreifen derart, daß unsere Kreise gegen einen Grenzkreis als Kern konvergieren. Nach dem Satz von Caratheodory konvergieren dann die Formeln gegen eine Grenzformel die den Grenzkreis auf das Grenzpolygon abbildet. Diese Formel kann nicht ausarten weil keine zwei der $z_\varkappa$ zusammenrücken können. Sonst würde nämlich die Formel ein Polygon von weniger als n-Ecken liefern.

Einiges über die Continuitätsmethode in anderen Fällen wird wohl eine im Entstehen begriffene Basler Dissertation enthalten.

Über Translationen am Phosgenit und Bleiglanz.

Von

O. Mügge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 1. November 1913.

Wie M. Taricco[1]) gezeigt hat, erhält man durch Eindrücken oder Einschlagen einer Spitze in ein basisches Spaltblättchen von Phosgenit von 1—2 mm Dicke, das sich auf etwas nachgiebiger Unterlage befindet, auf der oberen Fläche Vertiefungen von der Form von Pyramiden mit rechteckiger bis quadratischer Basis, auf der Unterseite erhabene Pyramiden derselben Form. Die Seitenflächen dieser Pyramiden liegen wie tetragonale Pyramiden (hhl) erster Ordnung des Phosgenit, sie sind aber nicht eben sondern stark horizontal, also parallel dem Prisma erster Ordnung gestreift, sodaß namentlich die untere erhabene Pyramide treppenförmig gestuft erscheint. Der Grundriß dieser Pyramiden liegt mithin diagonal zu den Spuren der prismatischen Spaltflächen (100), hat also mit dieser Spaltbarkeit nichts zu tun und Taricco vergleicht sie deshalb mit den sog. Bauerschen Druckfiguren am Bleiglanz. Während aber die letzteren auf der Biegung um die Diagonale der gepreßten Würfelflächen unter Translation nach dieser selben Fläche beruhen, entstehen diese Tariccoschen Figuren am Phosgenit durch bloße Translation nach den Flächen $T = (110)$ in der Richtung $t = [001]$.

Dies läßt sich am Phosgenit wegen seiner Durchsichtigkeit und guten Spaltbarkeit nach der Basis besonders gut zeigen. Stellt man die Tariccosche Figur an einer möglichst dicken (ca. 2 mm) Spaltungsplatte her und spaltet sie dann in der Mitte nach der Basis durch, so zeigt sich auf den neuen Spaltflächen keine Spur

1) Atti R. Accad. d. Lincei. **19**, 278, 1910.

der oberen vertieften oder der unteren erhabenen Pyramide, die neue Spaltfläche erscheint vielmehr ganz eben (während am Bleiglanz alle Spaltflächen zwischen der oberen und unteren Fläche des gedrückten Stückes die Bauersche Figur ebenso wie letztere selbst erkennen lassen). Die Flächen jener Pyramiden sind also am Phosgenit nicht gekrümmte Basisflächen sondern nur Scheinflächen, hervorgerufen durch den von der Druckstelle aus nach allen Seiten hin abnehmenden Betrag der Translation.

Bewirkt man die Translation an einem nach (110) tafligen Stückchen durch Druck in der Richtung seiner Hauptaxe, sodaß die Kante [001 : 110] eine (scheinbare) Krümmung erfährt, so zeigt das Präparat nach dem Dünnschleifen nach (110), daß die Spaltrisse nach (001) auch die verschobenen Teile mit (scheinbar) gekrümmter Kante zur Basis geradlinig in unveränderter Richtung durchsetzen und daß auch diese Teile durchaus einheitlich und gleichzeitig mit den nicht verschobenen, nämlich parallel diesen Spaltrissen, auslöschen.

Durch die Basis gesehen erweisen sich die verschobenen Teile zwar wie vorher als merklich isotrop, aber im konvergenten Licht erscheint das Axenbild mehr oder weniger gestört, zweiaxig, mit wechselnder Größe des Axenwinkels und wechselnder Lage der Axenebene. Dies rührt offenbar von Spannungen her, welche bei der Beanspruchung der Platten bis zum Eintreten der Translation entstehen und nach Aufhören der Beanspruchung nicht völlig wieder verschwinden. Auf diesen bleibenden Spannungen beruht es auch wohl, daß man die Spuren der verschobenen lamellaren Teile auf den Spaltflächen wie auch auf muschligen Bruchflächen unregelmäßiger Lage in feinen Schlieren oder Streifen angedeutet findet.

Die Translationsfähigkeit längs der Hauptaxe macht sich übrigens auch beim Schleifen von Platten parallel $T = (110)$ auffallend bemerklich. Läßt man die Kristallplatte dabei wie gewöhnlich annähernd kreisförmige Bahnen auf der Schleifscheibe beschreiben, so hat man das Gefühl, als hake die Platte fortwährend fest und als würden dann kleine Stückchen abgerissen. Unter dem Mikroskop sieht man in dem abgeschliffenen Blättchen zahlreiche senkrecht zur Hauptaxe gestreckte Unebenheiten, von welchen sich viele in der Richtung der Hauptaxe aneinander reihen. Die Erscheinung rührt daher, daß jedesmal, wenn die Bewegung der Platte parallel ihrer Hauptaxe erfolgt, die von der Schleifscheibe abgerissenen Teilchen (die meist gestreckt nach der Hauptaxe sein werden) sich um die Normale der Hauptaxe fälteln und

zu kleinen Zylindern aufrollen, auf welchen die Platte dann rollt (wie denn auch an prismatischen Spaltblättchen Biegbarkeit um die Kante zur Basis festzustellen war). Die Erscheinung hört sofort auf, sobald man die Platte beim Schleifen nur senkrecht zur Hauptaxe gradlinig hin und her bewegt; die Platte nimmt dann sogar auf der harten Glasschleifplatte ziemlich schnell Politur an, ihre Ritzbarkeit durch Glas auf (110) ist also in der Richtung senkrecht zur Hauptaxe offenbar nur gering, während dieselbe Platte parallel zur Hauptaxe schon von einer Spitze von Kiefernholz geritzt wird.

Die Translationen am Phosgenit sind ein Gegenstück zu jenen am Eis: an letzterem kann man Lamellen nach der Basis herausschieben, beim Phosgenit Fäden senkrecht zur Basis. Während aber beim Eis Translationen nach allen Richtungen in der Basis erfolgt (Unterschiede der Translationsfähigkeit sind an den untersuchten Eismassen nicht festzustellen, da sie stets Aggregate sind), geht die Translation am Phosgenit stets nur längs der Flächen des Prismas erster Ordnung, nicht auch längs zwischenliegender Flächen vor sich, wenigstens sind Translationsstreifen anderer Lage niemals beobachtet. In dieser Hinsicht ist nun der Bleiglanz von besonderem Interesse, da sein Verhalten allen beiden vorgenannten Körpern analog ist. Hier gibt es nämlich wie beim Phosgenit mehrere (gleichwertige) Translationsebenen (parallel dem Würfel) und gleichzeitig wie beim Eis in jeder Translationsfläche mehrere gleichwertige Translationsrichtungen, nämlich nach den Diagonalen der Würfelflächen. Wie beim Phosgenit erfolgt nun auch hier, soweit aus dem Verlauf der Translationsstreifen zu schließen, die Translation nur parallel den Würfelflächen, nicht auch nach zwischenliegenden Flächen, z. B. solchen von rhombendodekaedrischer Lage, dagegen kommen als Translationsrichtungen nicht nur die Würfeldiagonalen sondern, wie nun Taricco[1]) nachgewiesen hat, auch die zwischenliegenden Richtungen der Würfelkanten in Frage.

Treibt man eine feine Nadel durch ganz leichten Schlag (etwa mit Bleistift) in ein möglichst dünnes und dabei möglichst breites Spaltblättchen von Bleiglanz ein, so wird durch die im Verhältnis zu ihrer Dicke große seitliche Ausdehnung der angeschlagenen Fläche {001} eine Translation nach dieser selbst und damit auch Durchbiegung um ihre Diagonalen [110] und [1$\bar{1}$0] sehr erschwert, dagegen findet nun eine Translation in der Richtung der Normalen

1) l. c. p. 508.

des Blättchens [001] längs der wenig ausgedehnten Flächen {100} und {010} besonders geringen Widerstand. Es erscheint daher auf der Gegenfläche der angeschlagenen eine kleine erhabene Pyramide, deren Seitenflächen ganz wie beim Phosgenit stark horizontal gestreift und treppenartig gestuft sind, sie liegen wie Flächen von Pyramidenwürfeln, sind aber in Wirklichkeit auch hier nur Scheinflächen. Sind die angeschlagenen Stückchen etwas dicker, so entsteht meist gleichzeitig die Bauersche Druckfigur mit einer Tariccoschen in der Mitte, man kann alle Kombinationen beider erhalten, solche in welchen die Bauersche Figur noch kaum sichtbar ist bis zu solchen wo die Tariccosche nur noch eben unter dem Mikroskop durch feine kurze Streifen parallel den Würfelkanten angedeutet ist.

Daß es sich auch hier bei den Tariccoschen Figuren im Gegensatz zu den Bauerschen lediglich um Translation handelt, kann man an etwas dickeren Spaltblättchen nachweisen: ist durch Schlag auf die obere Fläche {001} auf der unteren eine deutliche Tariccosche Figur, etwa umgeben von einer Bauerschen, entstanden, und spaltet man nun das Blättchen parallel der angeschlagenen Würfelfläche durch, so ist auf dieser zwischenliegenden Spaltfläche wohl die Bauersche, nicht aber die Tariccosche Figur zu sehen; die Spaltbarkeit durchsetzt also die in der Richtung einer Würfelkante verschobenen Teile ohne jede Ablenkung.

Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit magnetischer Störungen und Pulsationen. Bericht über die erdmagnetischen Schnellregistrierungen in Apia (Samoa), Batavia, Cheltenham und Tsingtau im September 1911.

Von

G. Angenheister.

Mit 5 Figuren im Text.

Vorgelegt von Herrn E. Wiechert in der Sitzung am 24. Mai 1913.

Auf Veranlassung des Verfassers wurden im September 1911 an den Observatorien zu Apia, Batavia, Cheltenham und Tsingtau magnetische Schnellregistrierungen vorgenommen. Der Zweck der gemeinschaftlichen Arbeit war, mit größerer Registriergeschwindigkeit, als der gewöhnlich gebrauchten, Material zum Studium der Störungen und der kleinen sinusartigen Wellenzüge der sogenannten „Pulsationen“ zu beschaffen. Vor allem sollten hierbei die Eintrittszeiten markanter Bewegungen von Station zu Station verfolgt werden. Solche Bewegungen, die sich in den Registrierungen selbst weit entfernter Stationen mit Sicherheit identifizieren lassen, sind vor allem die Störungsanfänge und die Umkehrpunkte der Pulsationen.

Van Bemmelen hat schon mehrfach die Eintrittszeiten von Pulsationen verglichen. Zuletzt hat auf seine Veranlassung auch Linke 1906 am Samoa-Observatorium gleichzeitig mit dem Observatorium in Batavia und einer temporären holländischen Station in Neu Guinea Schnellregistrierungen vorgenommen. Aus dem Vergleich derselben kommt van Bemmelen zu der Ansicht, daß die registrierten Pulsationen nicht gleichzeitig erfolgen. Die Zeit-

differenzen sind jedoch nur sehr gering, wenige Sekunden, und die Anzahl der beobachteten Fälle bei der Cooperation 1906 nur 2. (Siehe „Observations Batavia Vol. XXIX Appendix.“)

Die Störungsanfänge wurden bereits früher mehrfach verglichen. So von K. Birkeland (The Norwegian Aurora Polaris Expedition 1902/3), der zu der Ansicht kam, daß die Differenz zwischen den Eintrittszeiten an verschiedenen Observatorien jedenfalls zu klein sei, als daß sie durch die vorhandenen langsamen Registrierungen aufgedeckt werden könnte. Zu einem entgegengesetzten Resultat gelangt durch zahlreiche Vergleichungen der Eintrittszeiten von Störungsausbrüchen L. A. Bauer im Terr. Magn. XV. S. 9 (conf. auch Farris Terr. Magn. XV. S. 93). Das Resultat dieser Vergleichungen ist von L. A. Bauer zusammengefaßt in einer weiteren Arbeit (Terr. Magn. XV. 219 ff.), in der er 38 Störungen aus den Jahren 1883—1908 vergleicht.

Zum Vergleich dienen ihm in 4 Fällen 3 Observatorien, in 2 Fällen 4, in 13 Fällen 5, in 17 Fällen 8 und in einem Falle 25 Stationen. Nach dieser Zusammenstellung treten die plötzlichen Störungsanfänge nicht gleichzeitig auf, sondern die Störung pflanzt sich mit einer meßbaren Geschwindigkeit um die Erde fort und zwar in $^3/_4$ aller Fälle ostwärts, in $^1/_4$ westwärts. Die Zeit für einen ganzen Umlauf beträgt in beiden Richtungen im Mittel etwa 7 Minuten. Es ist fraglos, daß die Beantwortung der Frage nach der Fortpflanzungsrichtung und Geschwindigkeit der magnetischen Störungen für die physikalische Erklärung derselben von der allergrößten Wichtigkeit ist. Es ist sogar, wie mir scheint, bei dem jetzigen Stand der Theorie von der Erforschung dieser Frage am ehesten eine Weiterförderung der Kenntnis der Natur der Störungen zu erwarten. Es sind darum die Schritte, die die Carnegie-Institution zur Klärung dieser Frage neuerdings getan hat, mit ganz besonderer Freude zu begrüßen.

Im Dezember 1910 richtete nämlich das Department of Terr. Magn. der Carnegie-Institution durch L. A. Bauer ein Rundschreiben an alle Observatorien mit der Bitte um genaue Angaben über die plötzlichen Anfangsphasen der 15 markantesten Störungen der Jahre 1906—1909. In dankenswerter Weise sind die auf diese Anfrage eingegangenen Berichte von 32 Observatorien in extenso in Terr. Magn. 1911 veröffentlicht worden, und so ist jeder hierdurch in Stand gesetzt, aus diesem Material sich ein Urteil über die Frage der Fortpflanzung der Störungsanfänge zu bilden.

Zu diesem Zwecke habe ich die 32 Stationen nach geographischer Länge geordnet und zu 4 Gruppen zusammengefaßt.

Siehe Tabelle I. Berücksichtigt wurde nur die Horizontal-Intensität, weil an Tropenstationen nur in der Horizontal-Intensität die Anfänge scharf zu sein pflegen. Bei der Mittelbildung für die einzelnen Gruppen wurde für Mauritius nur die Störung 1, 2, 3, 7 benutzt, weil alle andern Störungen um 6—13 Minuten später registriert wurden, als an allen andern Stationen. Natürlich liegt hierin eine gewisse Willkür, aber die Abweichungen sind so außerordentlich im Vergleich zu andern Stationen, daß sie zunächst einmal unberücksichtigt bleiben mögen. Die Eintrittszeiten für die 15 Störungen sind nun folgende. (S. Tabelle I auf S. 4/5.)

Aus Tabelle I erkennt man zunächst, daß die Differenz zwischen den Eintrittszeiten der einzelnen Gruppen recht klein ist; bei den besonders zahlreichen Gruppen 3 und 4 beträgt sie oft nur $0{,}1^m$ oder $0{,}0^m$, nie über $0{,}5^m$ und im Mittel nur $0{,}3^m$. Die Differenzen nah benachbarter Stationen sind oftmals viel größer als die Differenzen der Gruppen. Ferner sieht man, daß sich nur in 7 von 15 Störungen die Gruppen so ordnen lassen, daß der Störungsanfang mit der Zeit von Ost nach West (4 mal) oder umgekehrt (3 mal) fortschreitet. In 8 Fällen ist dies nicht möglich, sondern es folgt der Zeit nach fortschreitend auf die eine Gruppe nicht die benachbarte, sondern die übernächste, z. B. nacheinander Gruppe 1, 3, 2, 4.

Zu bemerken ist hierbei, daß nach den Regeln der Permutationsrechnung sich die Glieder einer viergliedrigen Gruppe a, b, c, d in $^1/_3$ der möglichen Permutationen in der alphabetischen Reihenfolge lesen lassen, wenn man bei a beginnend vorwärts oder rückwärts fortschreitet.

Es ist also nach der Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß in den 15 Störungen, wenn die Zeitdifferenzen der einzelnen Stationen nicht reell sind, sondern nur auf zufälligen (nicht systematischen) Beobachtungsfehlern beruhen, in $^1/_3$, also in 5 Fällen, die Stationen sich der Eintrittszeit nach ordnen, wie sie geographisch nach Osten oder Westen fortschreitend liegen. Da nur in 7 Störungen diese Ordnung tatsächlich vorhanden ist, so läßt sich aus dem geringen Überschusse über die Wahrscheinlichkeit (7 statt 5) wenig Sicheres schließen.

Zu bedenken ist ferner, daß die Störungen nach der Tabelle keineswegs immer an dem Teil der Erde beginnen, der gerade eine bestimmte bei allen Störungen gleiche Tageszeit hat, wie man vielleicht erwarten könnte (z. B. an der Mittagseite). Die Störungen beginnen vielmehr in Gebieten, die gerade folgende Tageszeit haben.

Tabelle I. Datum und Zeit

Gruppe	No.	Station	Länge	Mittlere Länge der Gruppe	Ausdehnung der Gruppe in Länge	1	2	3
						1906		
						29. VII.	7. VIII.	21. XII.
						19h	13h	21h
I.	1	Pilar	64° W	76°	31°	—	—	30.0
	2	Porto Rico	65°			56.4	36.7	34.0
	3	Cheltenham	77°			56.5	39.0	31.8
	4	Agincourt	79°			56.3	40.3	31.0
	5	Baldwin	95°			57.1	39.2	30.6
		Mittel der Gruppe I (Amerika)				56.6	38.8	31.5
II.	6	Sitka	135°	155°	36°	56.0	40.2	30.6
	7	Honolulu	158°			54.3	37.2	28.3
	8	Samoa	171°			56.9	37.6	27.5
		Mittel der Gruppe II (Pazif. Ozean)				55.7	38.3	28.8
III.	9	Zikawei	239°	276°	64°	54.0	37.0	30.0
	10	Batavia	254°			56.4	38.4	—
	10a	Buitenzorg	254°			56.1	36.3	30.0
	11	Toungoo	262°			57.3	37.8	30.1
	12	Bakapore	272°			57.0	37.7	31.3
	13	Debra Dun	282°			56.9	37.9	31.5
	14	Kodaikanal	283°			57.8	37.9	31.1
	15	Bombay	288°			56.4	38.2	30.2
	16	Ekaterinburg	300°			56.7	38.8	31.5
	17	Mauritius	303°			56.0	40.0	29.0
		Mittel der Gruppe III (Asien)				56.5	38.0	30.5
IV.	18	Helwan	330°	354°	35°	—	—	—
	19	Potsdam	347°			56.5	37.5	30.0
	20	Pola	348°			57.6	36.0	28.6
	21	Rud Skov	348°			—	—	—
	22	München	349°			56.3	39.5	30.6
	23	Wilhelmshaven	352°			56.4	39.9	31.4
	24	De Bilt	355°			56.4	37.6	—
	25	Uccle	356°			57.0	39.5	32.9
	26	Val Joyeux	358°			56.0	36.9	30.0
	27	Tortosa	359°			—	—	—
	28	Greenwich	360°			57.0	34.0	30.0
	29	Kew	360°			57.0	39.0	31.0
	30	Stonyhurst	362°			55.7	37.5	28.1
	31	Eskdalemuir	363°			—	—	—
	32	Falmouth	365°			57.0	38.0	34.0
		Mittel der Gruppe IV (Europa)				56.6	37.8	30.7
		Gesamtmittel				56.6	38.1	30.5

Anm.: Eingeklammerte Zahlen sind wegen ihrer Unsicherheit bei der Mittelbildung ausgeschaltet.

der Störungsanfänge.

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1907			1908						1909		
9. II.	10. VII.	13. X.	26. III.	19. VIII.	11. IX.	11. IX.	28. IX.	29. IX.	14. V.	25. IX.	25. IX.
14h	14h	7h	17h	0h	7h	21h	8h	1h	4h	8h	11h
15.4	23.5	42.5	42.4	—	—	—	38.9	—	52.3	38.3	41.2
13.1	22.6	43.4	41.4	15.2	20.5	47.2	40.8	31.8	54.2	38.6	40.8
13.2	22.7	43.0	44.6	14.4	20.1	46.7	41 3	31.2	56.4	39.0	41.2
12.5	22.5	43.3	42.8	14.2	21.1	47.7	41.8	30.3	57.3	38.7	41.5
13 0	23.2	43.3	42.2	14 9	20.8	49.1	41.6	31.6	54.7	37.7	40.5
13.4	22 9	43.1	42.7	14.7	20.6	47.2	40.9	31.2	55.0	38.5	41.0
13.5	22.4	44.0	—	15.7	21.0	40.8	42.9	—	57.1	39.8	41.0
12.0	20.9	42.1	40.2	13.8	21.6	46.0	43.1	32 0	54.8	37.9	40.6
12.8	—	43.8	42.0	14.3	20.6	47.7	41.3	31.6	—	—	—
12.8	21.7	43.3	41.1	14.6	21.1	46.8	42.4	31.8	55.9	38.8	40.8
11.0	22.0	44.0	—	15.0	19.0	45.0	39.0	33.0	54.0	37.0	40.0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12.0	23.1	40 8	38.4	14.7	18.9	47.1	42.6	34.8	55.2	38.7	42.6
13.7	24.5	42.9	41.0	—	—	—	—	—	—	37.4	40.2
—	23.4	42.9	41.5	14.1	—	47.7	41.3	33.9	—	37.8	40.2
14.2	22.4	43.6	40.9	14.4	22.8	47.1	42.2	31.9	—	37.0	40.5
14.8	24.7	43.1	41.5	14.4	23.2	48.6	42.2	32.5	—	37.5	41.9
13.1	22.4	43.9	41.4	13.2	20.7	45.4	41.4	31.2	53.7	38.0	42.2
14.0	23.3	45.6	43.5	14.5	—	—	42.8	31.8	56.6	38.8	40.0
(21.0)	(32.0)	(49.0)	38.0	(20.0)	(29.0)	(58.0)	(54.0)	(40.0)	(5.0)	—	(50.0)
13.3	23.2	43.3	40 8	14.3	20.9	46.8	41.6	32.7	54.9	37.8	40.9
—	21.0	44.0	42.0	16.0	22.0	49.0	39.0	33.0	54.0	38.0	39.0
12.4	23.2	43.7	41.3	14.5	20.7	47.6	42.6	32.0	55.8	37.8	41.0
11.9	25.1	40.3	39.8	13.6	—	58.2	41.1	31.1	52.3	37.1	39.4
—	23.5	—	41.9	13.3	20.6	47.5	43.4	33.1	—	37.7	—
12.0	20.6	45.0	36.5	14.9	22.5	46.0	42.8	32.4	51.2	38.5	39.0
10.4	21.9	41.4	40.4	15.4	19.9	46.4	41.4	31.4	49.4	38.4	—
—	—	42.5	41.0	14.0	21.2	46.1	41.0	31.5	55.3	38.0	41.0
11.6	22.4	46.8	40.7	14.3	21.3	44.9	42.6	32.1	54.6	38 6	41.4
11.4	23.0	38.6	38.0	16.1	20.0	45.9	41.1	33.5	56.6	39.3	41.1
16.9	22.5	40.4	41.6	12.1	19.7	45.5	—	33.0	—	37.1	41.2
14.0	23.0	44.0	43.0	15.0	20.0	47.9	42.0	33.0	58.0	40.6	40.0
13.0	22.0	43.0	43.0	15.0	18.0	47.0	41.0	29.0	57.0	38.0	41.0
15.1	22.5	42.7	—	11.6	17.8	45.2	41.2	34.0	54.3	29.0	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	(30.0)	41.5
14.0	24.0	45.0	44.0	15 0	21.5	45.5	42.0	31.0	55.0	36.0	39.0
13.1	22.7	42.9	41.0	14.3	20.4	46.4	41.8	32.2	54.5	38.0	40.4
13.2	22.8	43.1	41.2	14.4	20.6	46.7	41.7	32.2	54.8	38.1	40.7

Tabelle II.

Gruppen	Anz. d. Glieder d. Gruppen	Distanz der Gruppen	Differenzen der Eintrittszeit der Störungen in Minuten														
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
I—II	8	80°	+0.9	+0.5	+2.7	+0.6	+1.2	—0.2	+1.6	+0.1	—0.5	+0.4	—1.5	—0.6	—0.9	—0.3	+0.2
II—III	12	120°	—0.8	+0 3	—1.7	—0.5	—1.5	0.0	+0.3	+0.3	+0.2	0.0	+0.8	—0.9	+1.0	+1.0	—0.1
III—IY	23	80°	—0.1	+0.2	—0.2	+0.2	+0.5	+0.4	—0.2	0.0	+0.5	+0.4	—0.2	+0.5	+0.4	—0.2	+0.5
IV—I	19	80°	0.0	—1.0	—0.8	—0.3	—0.2	—0.2	—1.7	—0.4	—0.2	—0.8	+0.9	+1.0	—0.5	—0.5	—0.6
I—III	14	160°	0.1	0.8	1.0	0.1	0.3	0.2	1.9	0.4	0.3	0.4	0.7	1.5	0.1	0.7	0.1
II—IV	17	160°	0.9	0.5	1.9	0.3	1.0	0.4	0.1	0.3	0.7	0.4	0.6	0.4	1.4	0.8	0.4

Gruppen	Anzahl der Glieder der Gruppen	Distanz der Gruppen	Summe der + Differenz geteilt durch Anzahl	Summe der — Differenz geteilt durch Anzahl	Mittel für + (ostwärts) für 360°	Mittel für — (westwärts) für 360°	Gewichtetes Mittel für 360° und +	Gewichtetes Mittel für westw. für 360° und —	Numerische Summe (ohne Rücksicht auf ±)	Algebraische Summe	Numerische Mittel	Algebraische Mittel	Numerische Mittel für 360°	Algebraische Mittel für 360°	Gewichtetes num. Mittel für 360°
									Min.						
I—II	8	80°	$+\frac{8 2}{8}$	$-\frac{4.0}{7}$	+4.5	—2.7	+2.4	—1.9	12.2	+4.2	0.8	+0.3	3.6	+1.3	2.2
II—III	12	120°	$+\frac{3.9}{8}$	$-\frac{5.5}{7}$	+1.5	—2.4			9.4	—1.6	0.6	—0.1	1.8	—0.3	
III—IV	23	80°	$+\frac{3.6}{9}$	$-\frac{0.9}{6}$	+1.8	—0 7			4.5	+2.7	0.3	+0.2	1.4	+0.9	
IV—I	19	80°	$+\frac{1.9}{3}$	$-\frac{7 2}{12}$	+2.7	—2.7			9 1	—5.3	0.6	—0.4	2.7	—1.8	
I—III	14	160°							8.6		0.6		1.3		1.5
II—IV	17	160°							10.1		0.7		1.6		

No. 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10^a	2^p	11^a	4^a	4^a	8^a	12^p	6^a	7^a	9^p	4^a	9^p	5^a	3^p	12^a

Es fällt allerdings auf, daß die Störungen nicht von den Plätzen auszugehen scheinen, die an der Nachtseite der Erde zwischen 9 Abends und 4 Morgens liegen.

Tabelle II gibt die Differenz der Eintrittszeiten der einzelnen Gruppen. Es sind immer zwei Gruppen von Ost nach West fortschreitend kombiniert (1—2; 2—3; 3—4; 4—1), so daß eine positive Differenz bedeutet, daß die Störung in der östlichen der kombinierten Gruppen später eintrat, also nach Osten zog. Außerdem ist noch 1—3 und 2—4 kombiniert; von einem Vorzeichen ist hier abgesehen worden, weil die Distanz 1—3 und 2—4 fast einen halben Erdumfang beträgt. Die positiven (Bewegung ostwärts) und negativen (westwärts) Differenzen sind alsdann gesondert zu Mittelwerten vereinigt; diese sind gewichtet nach der Zahl der Stationen, aus deren Angabe sie gewonnen wurden, und auf 360° umgerechnet. Ferner sind die algebraischen und numerischen Mittel der Differenzen gebildet, wie oben gewichtet und auf 360° umgerechnet. Das numerische Mittel gibt die mittlere Umlaufzeit für 360° ohne Rücksicht auf den Richtungssinn der Bewegung. Das algebraische Mittel dagegen entspricht der Annahme, daß die Bewegung nur in einem Sinne erfolgt und diejenigen Zeitdifferenzen zwischen benachbarten Stationen, die auf eine Bewegung in entgegengesetztem Sinne deuten, als Beobachtungsfehler aufzufassen sind. Aus der Tabelle läßt sich nun Folgendes entnehmen:

1) Man sieht, je größer die Anzahl der Stationen der beiden kombinierten Gruppen ist, um so kleiner scheint die Zeitdifferenz zwischen ihnen zu werden.

2) Die Zugrichtung verteilt sich wie folgt:

Gruppe	ostwärts	westwärts
1—2	8 mal	7 mal
2—3	8 „	7 „
3—4	9 „	6 „
4—1	3 „	12 „

Also 28 mal ostwärts und 32 mal westwärts; während nach L. A. Bauers Tabellen ³/₄ aller Störungen ostwärts laufen.

3) Die Fortpflanzungszeit für 360° beträgt im gewichteten Mittel für ost- und westwärts (numerisches Mittel ohne Rücksicht auf das Vorzeichen), aus den Gruppen 1—2, 2—3, 3—4, 4—1 berechnet, 2.2^m. Berechnet man dasselbe Mittel aus den weiter von einander entfernten Gruppen 1—3, 2—4, so erhält man 1.5^m.

Die Fortpflanzungszeit für 360° für ostwärts Bewegung gesondert berechnet beträgt $+2.4^m$, für westwärts -1.9^m. Das algebraische Mittel der Zeitdifferenzen beträgt für 360°:

aus	1—2	berechnet	$+1.3^m$
„	2—3	„	-0.3^m
„	3—4	„	$+0.9^m$
„	4—1	„	-1.8^m.

L. A. Bauer erhielt als numerisches Mittel für 360°: 6.76^m, als algebraisches Mittel für 360°: 2.96^m (ostwärts). Es scheint hiernach, daß mit der wachsenden Anzahl der Beobachtungsstationen, die in den Tabellen I und II benutzt wurden, sich sowohl das numerische, wie auch das algebraische Mittel für 360° ganz bedeutend kleiner berechnet, als es sich aus den von L. A. Bauer benutzten Angaben einer geringeren Anzahl von Observatorien ergibt.

Der Verdacht, daß die auch jetzt noch vorhandenen Zeitdifferenzen nur auf zufälligen und vielleicht auch systematischen Fehlern beruhen, wird jedenfalls außerordentlich verstärkt.

Ich habe nun die Tabelle der 17 Störungsanfänge 1882—89 (L. A. Bauer Terr. Magn. XV. S. 225) genauer untersucht. Fig. 1 gibt die Abweichung der Eintrittszeiten der Störungen für jedes der 8 Observatorien von ihrem gemeinsamen Mittel für die willkürlich ausgewählten Störungen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Die geographische Länge der Stationen ist als Abszisse, die Eintrittszeit als Ordinate eingetragen.

Man erkennt, daß zwischen den Stationen Bombay, Batavia, Zikawei und Melbourne eine bestimmte konstante, fast immer genau wiederkehrende Differenz besteht. Danach beginnen z. B. die 6 dargestellten Störungen alle in Zikawei und zwar ganz unabhängig von der sehr verschiedenen Tageszeit, die beim Beginn der Störung in Zikawei herrschte. Dies letztere ist wohl kaum vereinbar, mit dem physikalischen Bild, das man sich bisher von den magnetischen Störungen gemacht hat. Ferner ist bei einer einfachen nach geographischer Länge fortschreitenden Bahn der Störungen die konstante Differenz zwischen den obigen Stationen wohl nicht zu erklären. Es ist nun schwer zu entscheiden, ob die Differenz zwischen Bombay, Batavia, Zikawei und Melbourne auf systematischen Fehlern oder auf einer allerdings dann sehr komplizierten Besonderheit der Fortpflanzungsbahn magnetischer Störungen beruht. Um zufällige Beobachtungsfehler kann es sich hier wohl nicht handeln, denn bei Mittelbildung über alle 17 Stö-

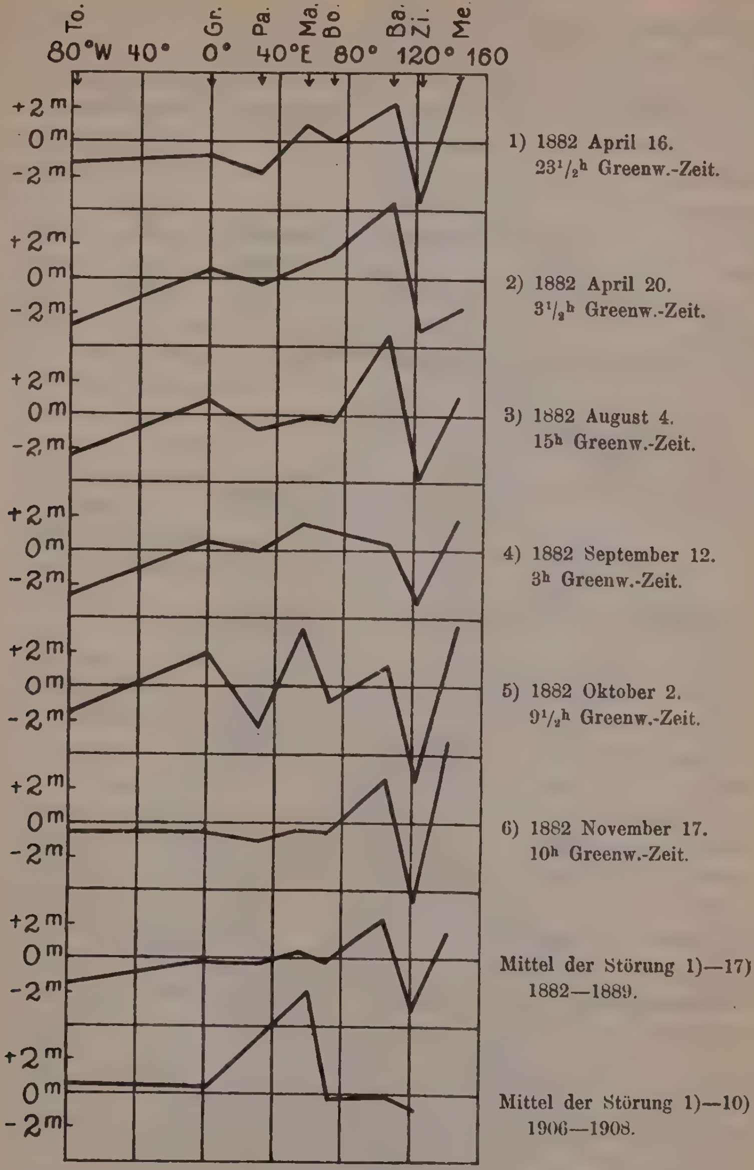


Fig. 1. Vergleich der Zeit der Störungsanfänge.
To. = Toronto. Pa. = Palowsk. Bo. = Bombay. Zi. = Zikawei.
Gr. = Greenwich. Ma. = Mauritius. Ba. = Batavia. Me. = Melbourne.

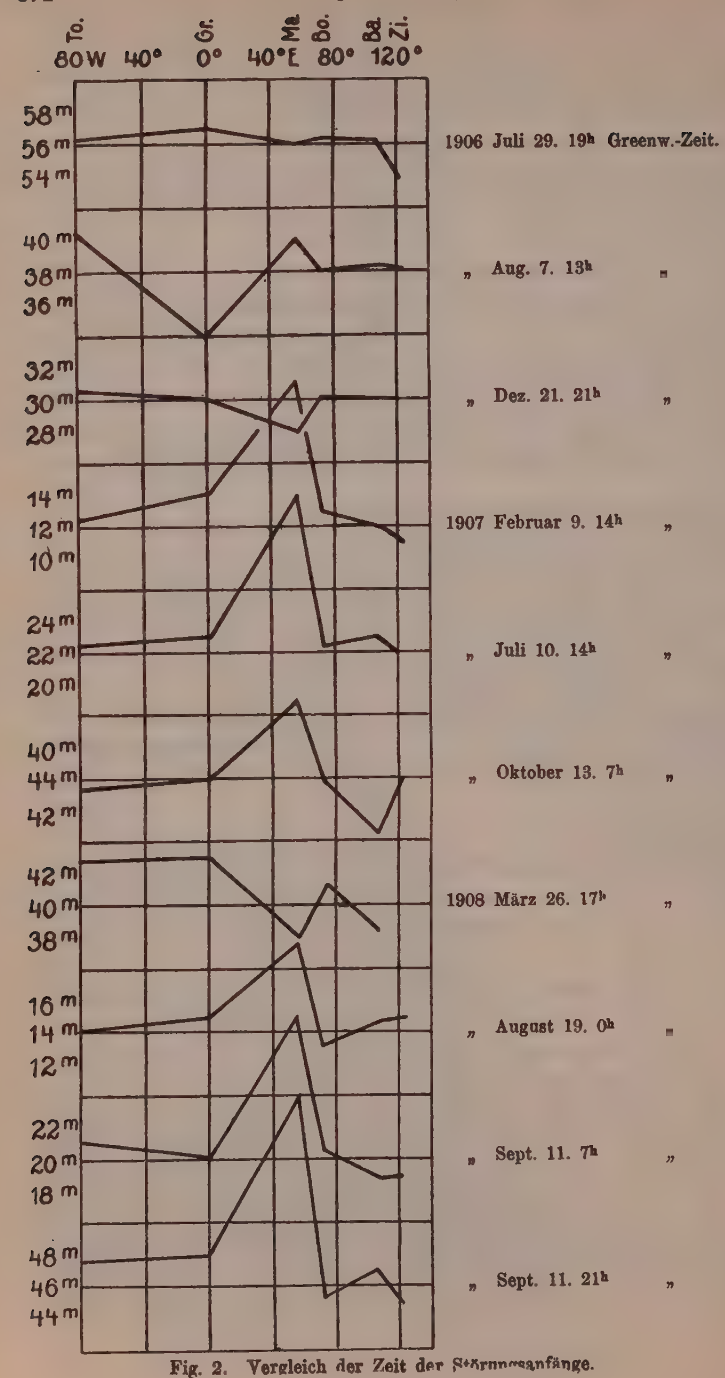


Fig. 2. Vergleich der Zeit der Störungsanfänge.

rungen der Tabelle 3 (Terr. Magn. XV. S. 225) kehrt die sehr charakteristische Differenz zwischen den Eintrittszeiten in Bombay, Batavia, Zikawei und Melbourne wieder zu Tage. Siehe Fig. 1. Falls es sich tatsächlich um eine Besonderheit der Fortpflanzungsbahn handelte, müßte sie wohl auch zu anderen Zeiten immer wieder auftreten. Ich habe darauf einige Störungen neueren Datums, nämlich die der Tabelle I, angesehen. Fig. 2 zeigt dies; leider fehlen Palowsk und Melbourne für diesen Vergleich. Es sind aus Tabelle I nur die Observatorien gewählt, die auch in Fig. 1 aufgeführt wurden. Das Bild der Zeitdifferenzen ist jetzt ein ganz anderes; der charakteristische Unterschied zwischen Bombay, Batavia und Zikawei tritt kaum mehr hervor, dagegen hat Mauritius fast alle Störungen um 6—10^{m} später als alle anderen Stationen. In Fig. 1 tritt von dieser Sonderstellung von Mauritius nichts zu Tage. (Aus diesem Grunde sind die stark abweichenden Daten von Mauritius in Tabelle I und II nicht berücksichtigt worden.) Die Figuren 1 und 2 legen die Vermutung nahe, daß die konstanten Abweichungen einzelner Stationen nicht auf Besonderheit der Fortpflanzungsbahn beruhen, sondern auf systematischen Fehlern, die ja in den einzelnen Zeitepochen sehr wohl verschieden sein können. Ein solcher systematischer Fehler könnte sein, daß bei der Verschiedenheit der Einsätze von Station zu Station nicht genau die gleichen Phasen als Eintrittszeiten angegeben werden. Zweifellos liegt eine Subjektivität in der Bestimmung des Anfangspunktes der Störung, die sehr wohl mit dem Beobachter wechseln könnte.

Die ganze bisherige Betrachtung gibt nun zwar keinen strengen Beweis, sondern macht es nur höchst wahrscheinlich, daß die Zeitdifferenzen zwischen einzelnen Gruppen, die sich aus den bisherigen Registrierungen ableiten lassen, nicht ein Maß für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störungen sind, sondern eher für die Beobachtungsfehler. Man kann von vornherein zweifelhaft werden, ob es überhaupt gelingen wird, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus den Störungsanfängen zu bestimmen. Dies hängt nicht nur von der Größe der Registriergeschwindigkeit ab, sondern auch von der Schärfe der Einsätze und Umkehrpunkte und von der Sicherheit, mit der sich bestimmte Phasen auf den Registrierungen verschiedener Stationen identifizieren lassen.

Das Bild des Störungsausbruchs wechselt von Station zu Station. Besonders zeigen Z und D oftmals schon bei nah benachbarten Stationen entgegengesetzten Verlauf. Es ist deshalb oftmals unmöglich infolge der geringen Registriergeschwindigkeit von 0.33^{mm} pro Min., den Anfangspunkt oder ersten Umkehrpunkt

des Störungsausbruches beim Vergleich verschiedener Statione auf halbe oder auch nur ganze Minuten sicher zu identifiziere

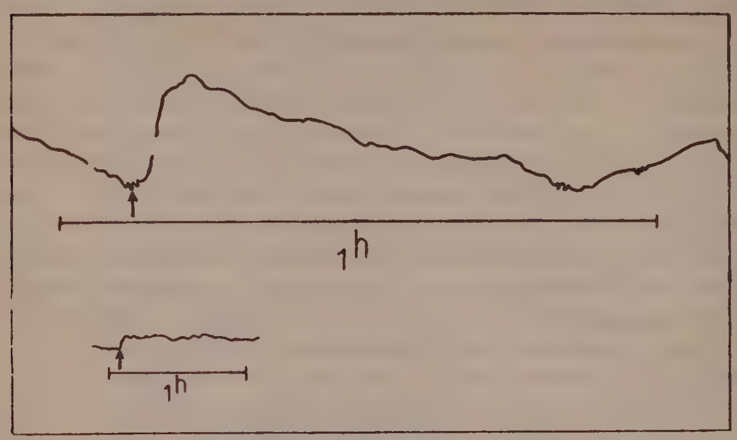
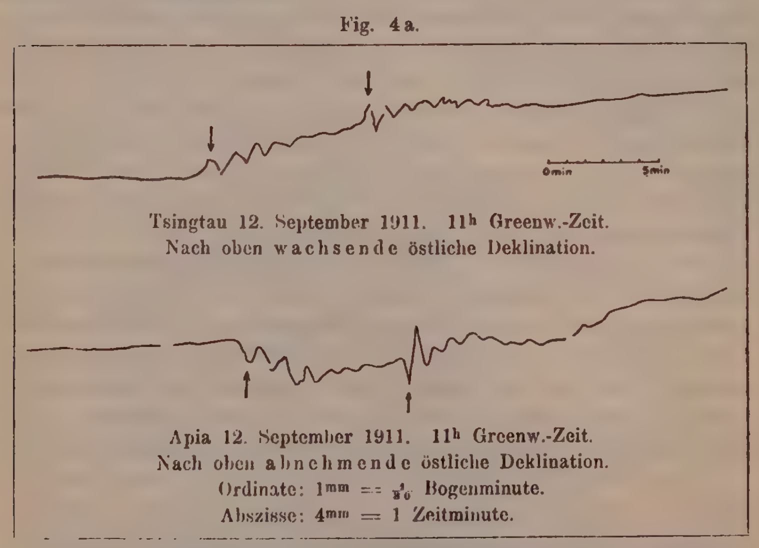


Fig. 3. Störungsanfang 2. Oktober 1911 4^h Greenw.-Zeit.
oben: Schnellfeinregistrierung: Zeitskala $1^h = 88^{mm}$. Empfindlichkeit $1^{mm} = 0.4$
unten: gewöhnl. Registrierung: Zeitskala $1^h = 20^{mm}$. Empfindlichkeit $1^{mm} = 3.3^{\gamma}$

Nur größere Registriergeschwindigkeit und erhöhte Empfindlichkeit können hier weiterhelfen.

Fig. 4a.



Tsingtau 12. September 1911. 11^h Greenw.-Zeit.
Nach oben wachsende östliche Deklination.

Apia 12. September 1911. 11^h Greenw.-Zeit.
Nach oben abnehmende östliche Deklination.
Ordinate: $1^{mm} = \frac{1}{30}$ Bogenminute.
Abszisse: $4^{mm} = 1$ Zeitminute.

Vergleich der Deklination in der Schnellregistrierung Apia und Tsingtau. Die beiden Kurven verlaufen spiegelbildlich zu einander, weil in Tsingtau wachsende östliche Deklination nach oben, in Apia nach unten geht.

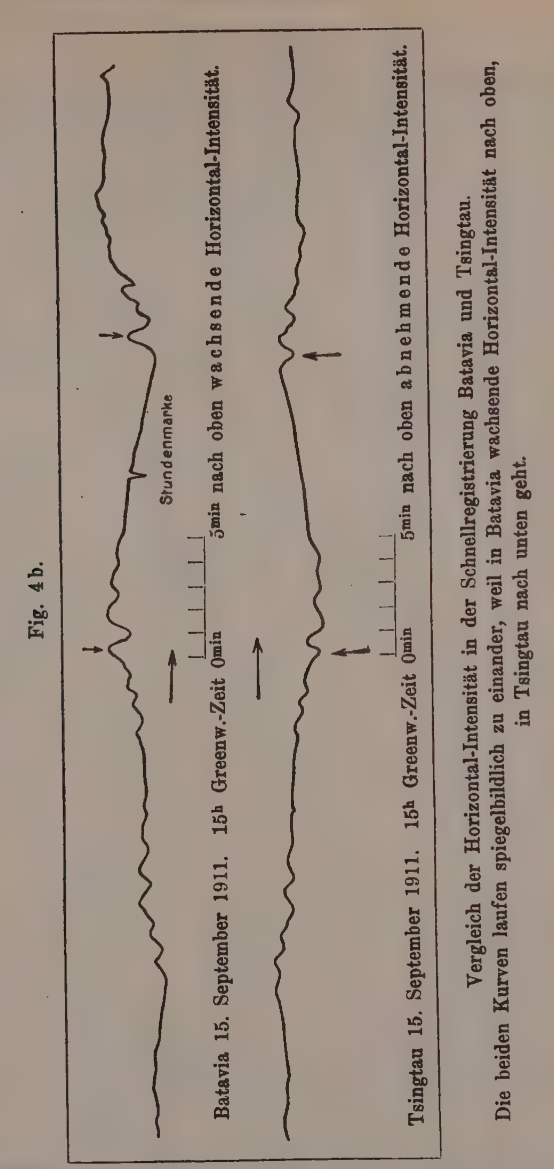


Fig. 4 b.

Vergleich der Horizontal-Intensität in der Schnellregistrierung Batavia und Tsingtau.
Die beiden Kurven laufen spiegelbildlich zu einander, weil in Batavia wachsende Horizontal-Intensität nach oben, in Tsingtau nach unten geht.

Wie sehr viel detaillierter das Bild eines Störungsausbruches bei der Schnell-Feinregistrierung wird, als es sich bei langsamer Registrierung mit der üblichen Empfindlichkeit zeigt, illustriert Fig. 3.

Tabelle III.

Datum		Apia	Tsingtau	Batavia	Potsdam	Cheltenham	Ap.-Ts.	Ap.-Ba.	Ts.-B
		171° W	240° W	254° W	13° E	75 W	71°	83°	14°
		m s	m s	m s	m	m s	s	s	s
1911 Sept. 4. 15h	DI	—	38 24	38 22			—	—	+2
	DII	—	39 18	39 29			—	—	−11
„ „ 6. 16h	D	17 49	18 19	17 42		17 24	−30	+7	+37
	H			17 37					
„ „ 12. 11h	H	31 6	31 4	—	31.2	31 19	+2	—	—
„ „ 13. 9h	H	36 51	34 36?	—		36 31		—	—
	D	36 15	36 29	—			−14	—	—
„ „ 14. 14h	H	—	24 47	24 52					−5
	D	25 0	25 18	24 52			−18	+8	+26
„ „ 15. 15h	HI	—	37 25	37 12	36.8		—	—	+13
„ „ 15. 15h	HII	—	55 35	55 23	55.0		—	—	+12
„ „ 17. 14h	DI	3 51	4 9	4 16			−18	−25	−7
	DII	4 14	4 43	4 45			−29	−31	−2
	DIII	4 38	5 3	5 8			−25	−30	−5
„ „ 18. 18h	HII	—	25 38	25 42		25 58?	—	—	−4
	HIV	26 48?	27 15	27 22		27 46?	—	—	−7
„ „ 18. 19h	H	—	0 25	0 20			—	—	+5
„ „ 19. 20h	H	—	9 56	9 53		9m 18s od. 48 ?	—	—	+3
„ „ 22. 12h	H	28 8	27 12?	27 43				+25	
	H	44 32	44 51	44 51		44 0?	−19	−19	0
„ „ 24. 10h	H	23 8	23 0	—		22 59	+8	—	—
11h	H	10 0	9 41	—		9 14	+19	—	—
12h	H	1 29	1 22	—		1 49?	+7	—	—
„ „ 26. 15h	H	58 15	58 35	58 27		58 10?	−20	−12	+8
„ „ 27. 11h	HI	47 12	47 13	47 13			−1	−1	0
	HII	48 53	48 51	48 54			+2	−1	−3
„ „ 28. 20h	HI	49 16	—	49 13		49 8?	—	+14	—
21h	HII	4 16	—	4 2		3 56	—	+3	—

Die gemeinsame Schnell-Feinregistrierung der oben genannten Observatorien im September 1911, die auf Grund der obigen Erwägungen unternommen wurde, brachte nun leider keinen plötzlichen Störungsausbruch; dagegen gelangte eine große Reihe von Pulsationen zur Aufzeichnung. Diese zeigen zum Teil ein so bestimmtes charakteristisches Bild, daß eine Identifizierung derselben Phasen in den Registrierungen der oben genannten Observatorien mit Sicherheit gelang. In Fig. 4a und 4b sind Pulsationen an verschiedenen Stationen durch photographische Vergrößerung auf gleiches Zeitmaß gebracht: 1 Min. = 4^{mm}. Es ist ganz erstaunlich, wie außerordentlich ähnlich, bis in die kleinsten Details, die Bewegung an Stationen verläuft, die wie Apia und Potsdam fast einen halben Erdumfang von einander entfernt sind. Es scheint, daß sich dies Phänomen auf der Erde von Ort zu Ort kaum oder gar nicht ändert. Die Umkehrpunkte sind bei der kurzen Periode der Pulsationen oft auf 1—2 Sekunden genau angebbar (falls die Registriergeschwindigkeit groß genug ist). Die Tabelle III gibt das Resultat der Vergleichung der Eintrittszeiten solcher Umkehrpunkte an den verschiedenen Observatorien. Die Genauigkeit der Eintrittszeit setzt sich zusammen aus der Genauigkeit der Uhrzeiten und aus der Genauigkeit der Kurvenablesungen. Die Uhrzeiten waren meist so genau bekannt, daß sie gegenüber der Genauigkeit der Kurvenablesung vernachlässigt werden konnten. Die Registriergeschwindigkeit betrug in Batavia 1^{mm} = 15 Sek., Apia 1^{mm} = 40 Sek., Tsingtau 1^{mm} = 60 Sek.

Die Genauigkeit der Kurvenablesung war in den Kurven von Batavia am größten, weil dort der Sekundenzeiger einer Uhr jede Minute den Lichtspalt der Lampe 2 Sek. lang verdeckte; dadurch war die Zeitmarke auf den H- und D-Kurven selbst enthalten, und die so schwierige Übertragung der Zeit von der Basis aus erspart. Hierdurch ist hier die große Genauigkeit 0.1^{mm}—0.2^{mm} gleich 1,5—3,0 Sek. erreicht worden sein. In Apia und Tsingtau geschah die Zeitmessung von der Basis aus. Die Übertragung der Zeit von der Basis aus auf die Kurve von H und D kann bei Berücksichtigung der Ungenauigkeit der Parallaxebestimmung wohl nicht genauer als 0.2^{mm}—0.3^{mm} erfolgen; das ist für Apia 8—12 Sek., Tsingtau 12—18 Sek. Auf eine Unsicherheit mag noch hingewiesen werden, die vielleicht nicht allgemein bekannt ist, und auf die Herr Dr. Meyermann mich besonders aufmerksam machte. Die Klappenfälle aufeinander folgender Stunden differieren bei manchen Apparaten um einige Sekunden, auch wenn der tägliche

Gang der Uhr 0 Sek. beträgt, ein Übelstand, der durch Ungleichheit der Zähne der Klappenfallvorrichtung bedingt ist.

Nach Fertigstellung dieser Arbeit wurden mir nachträglich die Kurven der Schnellregistrierung von Cheltenham zugängig. Nicht alle oben für Apia, Batavia und Tsingtau ausgemessenen Pulsationen hoben sich in den Registrierungen von Cheltenham so deutlich heraus, daß sie mit Sicherheit identifiziert werden konnten. Mit Sicherheit ließen sich die Pulsationen vom 6., 12., 13., 24., 28. September wiederfinden, während bei den andern oben angeführten einige Unsicherheit bestehen blieb, ob die richtige Phase gewählt wurde. Die Registriergeschwindigkeit in Cheltenham betrug 1^{mm} pro Minute.

In Potsdam habe ich in Gemeinschaft mit Herr Geh. Rat. Schmidt in den Kurven, die mit gewöhnlicher Registriergeschwindigkeit ($^1/_3{}^{mm}$ pro Minute) geschrieben waren, die besonders markanten Pulsationen vom 12. und 15. September aufgesucht; sie waren den hier reproduzierten Bildern außerordentlich ähnlich; die Unsicherheit der Zeitmessung ist trotz der sehr großen Feinheit der Kurven und dem Fehlen der Parallaxe wegen der geringeren Zeitskala wohl etwas geringer als bei den anderen Stationen $\pm 0.1^{mm} = \pm 0.33^{min}$.

Die Eintrittszeiten der oben angeführten Pulsationen in Cheltenham und Potsdam sind der Tabelle III beigefügt. Für die weiteren Berechnungen sind diese nachträglichen Ausmessungen der Kurven von Cheltenham und Potsdam nicht verwendet. Sie würden, wie sich leicht ersehen läßt, das Resultat nicht ändern.

Das Resultat der Tabelle ist, daß das numerische Mittel (ohne Rücksicht auf Vorzeichen) der Differenzen der Eintrittszeiten zwischen 2 Stationen von der Größe der Genauigkeit der Zeitmessung ist; das algebraische entsprechend kleiner.

Berechnet man nach der Fehlerrechnung den mittleren Fehler der einzelnen Messung der Differenz der Eintrittszeiten und den mittleren Fehler des Mittelwertes, so erhält man, wie die Tabelle zeigt, Beträge für diese mittleren Fehler bei der algebraischen Differenz, die durchaus von der Größenordnung der gefundenen Differenz sind, d. h. aber nichts anders, als daß die gefundene algebraische Differenz zwischen den Eintrittszeiten verschiedener Stationen nur ein Maß für die Genauigkeit der Zeitangaben, nicht für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bildet. Auch bei der numerischen Differenz sind die Unterschiede zwischen den gefundenen Differenzen und ihren mittleren Fehlern nicht viel größer.

	Anzahl der Fälle	Mittlere num. Differenz der Eintrittszeiten	Mittlere algebr. Differenz der Eintrittszeiten	Genauigkeit der Zeitangabe			Mittlerer Fehler der numer. Differenz		Mittlerer Fehler der algebr. Differenz		Mittl. num. Diff. für 10000 km.	Mittl. algebr. Diff. für 10000 km.
				Apia	Tsin.	Bat.	d. einz. Messung	des Mittels	d. einz. Messung	des Mittels		
[illegible]° Apia-Tsingtau	14	15^{sec}	-10^{sec}	10^{sec}	15^{sec}		$\pm 16^{sec}$	$\pm 4^{sec}$	$\pm 18^{sec}$	$\pm 5^{sec}$	19^{sec}	-12^{sec}
3° Apia-Batavia	12	15	-5	10		2	± 11	± 3	± 18	± 5	16	-6
4° Batavia-Tsingtau	18	8	$+3.5$		15	2	± 9	± 2	± 12	± 3	20	$+8$

Bemerkenswert ist auch hier wieder, ebenso wie bei Störungsanfängen, daß nach den Angaben von je zwei Stationen die Störungen fast ebenso oft ostwärts (18 mal) als westwärts (24 mal) laufen.

Aus allem glaube ich daher zusammenfassend folgern zu können, daß die Zeitdifferenz zwischen Ausbrüchen von Störungen oder Pulsationen an verschiedenen Observatorien kleiner ist als die mit Hülfe der bisherigen Registrierung garantierten Genauigkeit. Dies ist für die physikalische Bedeutung dieser magnetischen Vorgänge von außerordentlicher Wichtigkeit. Darauf wird an anderer Stelle genauer eingegangen werden. Hier mag nur noch auf einen Umstand hingewiesen werden, der mir nicht ohne praktische Bedeutung zu sein scheint. Wenn nämlich die Pulsationen auch für größere Entfernungen auf der Erde praktisch gleichzeitig erfolgen, so scheinen sie mir bei ihrem fast täglichen Auftreten und ihrer großen Ähnlichkeit ein recht zuverlässiges und bequemes Mittel zur Bestimmung der geographischen Länge eines Ortes zu sein.

Wenngleich durch die gemeinsame Arbeit der 4 Observatorien Apia, Batavia, Cheltenham und Tsingtau, über die hier berichtet wurde, die Frage nach der Fortpflanzung magnetischer Bewegungen wohl eine Weiterförderung erfahren haben mag, so schien es uns doch zweckmäßig, ja notwendig, die gemeinsame Schnellregistrierung zu wiederholen, um weiteres, und noch zuverlässigeres Material zu beschaffen.

Vor allem soll auch untersucht werden, welche Unterschiede der Richtungssinn und die Größe der Bewegung in H, D und Z an verschiedenen Orten zeigt.

Dies ist im Oktober 1912 bereits geschehen. Auch ist es gelungen, die Observatorien in Cheltenham (Washington) und Potsdam für diese gemeinsame Arbeit zu gewinnen. Über das Ergebnis wird demnächst berichtet werden.

Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand.

Von

R. v. Mises.

Mit 4 Figuren im Text.

Vorgelegt von Herrn C. Runge in der Sitzung vom 1. November 1913.

Die Mechanik der Kontinua, die sich auf dem von Cauchy geschaffenen allgemeinen Spannungsbegriff aufbaut, ist bisher fast ausschließlich auf flüssige und auf feste elastische Körper angewandt worden. Für das Gebiet der plastischen oder bleibenden Formänderungen fester Körper hat Saint-Venant[1]) eine Theorie skizziert, die jedoch nicht die erforderliche Zahl von Gleichungen zur Bestimmung der Bewegung liefert. Auch andere gelegentliche Versuche in dieser Richtung sind nicht zum Abschluß gelangt[2]).

Die folgenden Zeilen führen zu einem vollständigen Ansatz von Bewegungsgleichungen für plastisch-deformable Körper — im Rahmen der Cauchyschen Mechanik und gestützt auf bestimmte, den Anwendungsbereich charakterisierende Erfahrungs-Tatsachen.

§ 1. Bezeichnungen.

Der Spannungs-Zustand in einem Punkte des Körpers sei, unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, gegeben durch die drei Normalspannungen σ_x, σ_y, σ_z und die Tangentialspannungen τ_x, τ_y, τ_z. In dem Schema

1) Comptes Rendus, Paris, t. 70, 72, 74. Journ. de math. 1871, p. 473.

2) Haar und v. Kármán, Göttinger Nachr. 1909, leiten Bewegungsgleichungen aus einem neuen Variationsprinzip ab, dessen Verhältnis zur übrigen Mechanik noch nicht aufgeklärt ist.

(1)
$$\begin{matrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{matrix}$$

bedeuten also die Größen der ersten Zeile die Komponenten des Spannungs-Vektors $\bar{\sigma}_x$ für ein Oberflächenelement, dessen äußere Normale die Richtung der positiven x-Achse hat, u. s. f. Das durch (1) dargestellte vektorische Gebilde, das sich in bekannter Weise mittelst der Gleichung

(2)
$$\bar{\sigma}_{x'} = \bar{\sigma}_x \cos(x, x') + \bar{\sigma}_y \cos(y, x') + \bar{\sigma}_z \cos(z, x')$$

transformiert, bezeichnen wir auch kurz als die Spannungsdyade $\bar{\bar{\sigma}}$.

Analoge Begriffsbildung führt zu der Deformationsdyade $\bar{\bar{\varepsilon}}$ und zur Dyade der Deformations-Geschwindigkeit $\bar{\bar{\lambda}}$. Bezeichnet man mit ξ, η, ζ die unendlich kleinen, elastischen Verschiebungen eines Punktes, so sind die Dehnungen und Winkeländerungen gleich:

(3)
$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \ \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \ \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z};$$

$$\gamma_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \ \gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right), \ \gamma_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right);$$

und die Dyade $\bar{\bar{\varepsilon}}$ hat das Schema:

(4)
$$\begin{matrix} \varepsilon_x & \gamma_z & \gamma_y \\ \gamma_z & \varepsilon_y & \gamma_x \\ \gamma_y & \gamma_x & \varepsilon_z . \end{matrix}$$

Nimmt man statt ξ, η, ζ die Komponente u, v, w des Geschwindigkeitsvektors, so erhält man die Dehnungs- und Schiebungs-Geschwindigkeiten:

(5)
$$\lambda_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \ \lambda_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \lambda_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\nu_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \ \nu_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \ \nu_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

und das Schema für die Dyade $\bar{\bar{\lambda}}$:

(6)
$$\begin{matrix} \lambda_x & \nu_z & \nu_y \\ \nu_z & \lambda_y & \nu_x \\ \nu_y & \nu_x & \lambda_z . \end{matrix}$$

Zu jeder Dyade gibt es mindestens ein Koordinatenkreuz, für das sich das Schema auf die Glieder der Hauptdiagonale reduziert, also z. B. für (1) auf die Form:

$$(7) \qquad \begin{matrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3. \end{matrix}$$

Hierin sind die „Hauptspannungen" $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die Wurzeln der Säkulargleichung oder auch durch folgende drei Bedingungen bestimmt:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Legt man ein Koordinatenkreuz so, daß die z-Achse mit der dritten Hauptachse zusammenfällt, während die x- und y-Achse

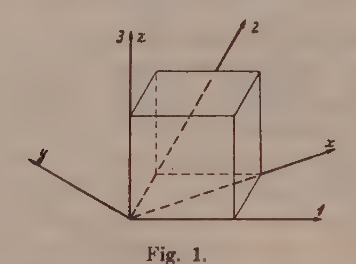


Fig. 1.

die Winkel der beiden ersten Hauptachsen halbieren (Fig. 1), so ergibt sich zufolge (2) folgendes Schema:

$$(9) \qquad \begin{matrix} \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, & \dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, & 0 \\ \dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, & \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & \sigma_3. \end{matrix}$$

Zugleich kann man sehen, daß die hier auftretenden τ-Werte Extrema der Tangentialspannung sind, d. h. unter den drei Größen

$$(10) \qquad \tau_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$

befindet sich stets die absolut größte und kleinste Tangential-

spannung. Wir nennen die τ_1, τ_2, τ_3, deren Summe gleich null ist, die Haupt-Tangential-Spannungen.

Die einfachste aller Spannungsdyaden ist die der idealen Flüssigkeit $-\overline{\overline{p}}$. Sie hat in jedem Koordinatensystem das Schema

$$(11) \qquad \begin{matrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p. \end{matrix}$$

Subtrahiert man von den Spannungen, die durch (1) dargestellt sind, einen Spannungszustand von der Form (11), so bleiben die Tangentialspannungen unverändert und es ergibt sich ein Schema:

$$(12) \qquad \begin{matrix} \sigma_x' & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y' & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z' \end{matrix}$$

mit

$$(13) \qquad \sigma_x' = \sigma_x + p, \quad \sigma_y' = \sigma_y + p, \quad \sigma_z' = \sigma_z + p.$$

Die Dyade (12) hat dieselben Hauptrichtungen wie (1) und die Hauptwerte $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ sind die um $-p$ verminderten Hauptwerte von (1). Daraus folgt nach (10), daß die Haupt-Tangential-Spannungen für (12) und (1) identisch sind.

Alle diese Beziehungen gelten natürlich auch für die Deformationsdyade $\overline{\overline{\varepsilon}}$ oder für $\overline{\overline{\lambda}}$.

Wir geben noch eine im Folgenden zur Verwendung kommende Formel, die aus einer Verbindung von (10) mit (8) entsteht. Es ist:

$$(14) \qquad \begin{aligned} \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 &= \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \tfrac{1}{2}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - \tfrac{3}{2}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - \tfrac{3}{2}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \tfrac{3}{2}(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) = \\ &= \left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{2}(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2). \end{aligned}$$

§ 2. Erfahrungs-Grundlagen.

Wir führen jetzt diejenigen Erfahrungs-Tatsachen an, denen die weiter unten folgenden Bewegungs-Gleichungen Rechnung tragen. Dabei beanspruchen wir nicht, einen axiomatischen Aufbau zu liefern, d. h. wir sehen davon ab, gerade ein Minimum von Voraussetzungen zu benutzen.

a) Alle festen Körper verhalten sich bei hinreichend kleinen Spannungen wie elastische: es besteht

eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen Spannung und Deformation.

Durch diesen Satz grenzen wir die festen Körper gegenüber den zähflüssigen ab. „Fest" ist z. B. bildsamer Wachs, das freilich schon geringem äußeren Druck nachgibt, ebenso wie Eisen, das erst bei sehr hohem Druck an die Elastizitätsgrenze gelangt. Dagegen ist etwa Pech od. dgl. bei normaler Temperatur nicht plastisch deformierbar, sondern flüssig.

Über die Bedeutung und die Gestalt der Elastizitätsgrenze sprechen wir weiter unten.

Den Zusammenhang zwischen Spannungs- und Deformationsdyade, $\bar{\bar{\sigma}}$ und $\bar{\bar{\varepsilon}}$, setzt die mathematische Elastizitäts-Theorie bekanntlich als linear voraus:

$$\bar{\bar{\sigma}} = L(\bar{\bar{\varepsilon}}). \tag{15}$$

Die allgemeinste lineare Beziehung, bei der keine Richtung im Raume bevorzugt ist, besteht darin, daß die beiden Dyaden gleiche Hauptrichtungen haben und die Hauptwerte so verbunden sind:

$$\begin{gathered} \sigma_1 = \alpha\varepsilon_1 + \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \quad \sigma_2 = \alpha\varepsilon_2 + \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\ \sigma_3 = \alpha\varepsilon_3 + \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \end{gathered} \tag{16}$$

Hierbei sind α und β die elastischen Konstanten. In bekannter Weise kann (16) so umgeformt werden, daß Beziehungen zwischen den auf beliebige Achsen bezogenen Komponenten entstehen.

b) Ist die Elastizitätsgrenze erreicht, so verhält sich der feste Körper wesentlich wie eine zähe, nahezu inkompressible, Flüssigkeit.

Das hier gemeinte Verhalten der Flüssigkeit charakterisiert sich dadurch, daß nicht der Deformations-Zustand, wie beim elastischen Körper, sondern der Deformations-Vorgang Spannungen bedingt. Aber man darf jetzt nicht einfach die Spannungsdyade $\bar{\bar{\sigma}}$ als Funktion der Deformations-Geschwindigkeits-Dyade $\bar{\bar{\lambda}}$ ansetzen, sondern muß beachten, daß ein Volumelement unter äußerem, allseits gleichen Druck keine endliche Deformations-Geschwindigkeit erfährt. Die dabei auftretende Volumänderung bleibt, wie die Beobachtungen übereinstimmend zeigen, stets von der Größenordnung der elastischen Verrückungen.

Es folgt demgemäß, daß man in der Mechanik zäher Flüssigkeiten von der Spannungsdyade σ einen Teil $-p$ abziehen muß, der einem allseits gleichen Druck entspricht. Der Rest σ' (vgl. (12) in § 1) kann dann als lineare Funktion

$$\sigma' = L(\lambda) \tag{17}$$

angeschrieben werden. Beachtet man dieselbe Symetrie wie oben, so ergibt sich analog (16):

(18) $$\sigma_1' = k\lambda_1 + k'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \ldots$$

Aber der in Klammern stehende Ausdruck mißt gerade die Divergenz oder die Volumänderung, von der eben erwähnt wurde, daß sie gegenüber λ_1 vernachlässigbar klein sei. Somit erhält man:

(19) $$\sigma_1' = k\lambda_1, \quad \sigma_2' = k\lambda_2, \quad \sigma_3' = k\lambda_3.$$

Diese Gleichungen besagen nichts anderes als daß $\overline{\overline{\sigma}}'$ aus $\overline{\overline{\lambda}}$ hervorgeht, wenn man jede Komponente von $\overline{\overline{\lambda}}$ mit k multipliziert, also:

(20) $$\sigma_x' = \sigma_x + p = k\lambda_x, \quad \sigma_y' = \sigma_y + p = k\lambda_y, \quad \sigma_z' = \sigma_z + p = k\lambda_z;$$
$$\tau_x = k\nu_x, \quad \tau_y = k\nu_y, \quad \tau_z = k\nu_z.$$

Dies sind genau dieselben Gleichungen, zu denen die Navier-Stokes'sche Theorie zäher Flüssigkeiten führt. Ein wesentlicher Unterschied wird erst zutage treten, wenn wir die Bedeutung der Größe k näher untersuchen. Dazu führt folgender, entscheidender Erfahrungssatz.

c) Verändert man unter Aufrechterhaltung aller Verhältnisse den absoluten Wert der Geschwindigkeiten, mit denen eine Bewegung vor sich geht, so ändert sich, bei plastisch deformablen Körpern, die Arbeit nicht, die zur Erzielung einer bestimmten Formänderung verbraucht wird.

Diesen Satz leiten wir her aus der Gesamtheit des Beobachtungsmaterials, das auf dem Gebiete der bleibenden Formänderungen, namentlich in der Technik, bisher gewonnen worden ist. Großenteils benützt die Technik Formeln für den Arbeitsaufwand, die von vornherein vom Einfluß der Geschwindigkeit absehen. Wo dieser Einfluß besonders beobachtet wurde, erwies er sich als gering[1]. Man wird die im Satz c) behauptete Konstanz ähnlich aufzufassen haben, wie etwa die Konstanz der Reibungskoeffizienten gegenüber wechselndem Normaldruck, bei der Gleitreibung fester Körper. Zumindest ist mit der Annahme von c) ein Idealfall präzisiert, der eine bestimmte Theorie gestattet, und der für das tatsächliche Verhalten der Körper eine brauchbare Näherung bedeutet.

Die sekundlich aufzuwendende Arbeit pro Volumeinheit ist allgemein gegeben durch:

1) Einzelnachweise, auch Literaturangaben, vgl. in meinem Encyclop. Artikel IV 10, Nr. 5, p. 187.

$$(21) \qquad \sigma'_x \lambda_x + \sigma'_y \lambda_y + \sigma'_z \lambda_z + 2\tau_x \nu_x + 2\tau_y \nu_y + 2\tau_z \nu_z = \\ = k(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 + 2\nu_x^2 + 2\nu_y^2 + 2\nu_z^2).$$

Multipliziert man alle Geschwindigkeiten mit einem Faktor c, so ändert sich dieser Ausdruck proportional kc^2. Zugleich wird aber die Dauer des Deformations-Vorganges im Verhältnis $1:c$ verkürzt, die ganze Arbeit wird also proportional kc. Daher muß der in (20) eingeführte Proportionalitätsfaktor k umgekehrt proportional der Geschwindigkeit sein. Oder auch: Die Spannungsdyade $\overline{\overline{\sigma'}}$ bleibt dieselbe, wenn alle Komponenten von $\overline{\overline{\lambda}}$ im gleichen Verhältnis verändert werden.

Aus der letzteren Formulierung folgt, daß die Spannungen bei einem plastisch deformablen Körper in einem Bereich von geringerer Mannigfaltigkeit variieren müssen, als etwa bei einem elastischen. Es ist klar, daß dieser Bereich nichts anderes sein kann als die Elastizitätsgrenze. D. h. unser Satz c) kann auch so gefaßt werden:

c′) Bei plastischen Deformationen bleibt die Spannung stets an der Elastizitätsgrenze.

Dieser Satz schließt die Forderung in sich, daß die Elastizitätsgrenze von einem additiven Bestandteil der Form (11) unabhängig sein muß (s. weiter unten).

Man kann c′) unmittelbar an Beobachtungen prüfen. Im eindimensionalen Fall der Zugbeanspruchung eines Stabes müßte das Spannungs-Dehnungs-Diagramm nach c′) die Gestalt der Fig. 2 aufweisen: Zunächst eine geneigte Gerade für den elastischen Zustand, dann eine horizontale, entsprechend der von der Geschwindigkeit unabhängigen Grenzspannung im plastischen Gebiet. Die Beobachtung zeigt nun, daß bei Eisen, Stahl und ähnlichen Materialien zwar ein horizontales Stück an die geneigte Gerade anschließt, dieses aber bald in eine schwach ansteigende Linie übergeht. Man führt das zurück auf einen mit der kristallinischen Natur des Körpers zusammenhängenden, stark thermisch beeinflußten Vorgang, den man die „Festigung" nennt. Dieser Festigung trägt unsere Theorie somit nicht Rechnung. Man muß aber bedenken, daß der eigentliche Anwendungsbereich der Plastizitätstheorie auf dem Gebiete der Druckbeanspruchung liegt (positives p). Es ist noch nicht hinreichend klar gestellt, ob es auch bei Druck von Eisen u. s. f. eine solche Festigung

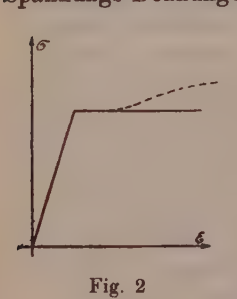


Fig. 2

gibt. Jedenfalls scheint es nicht unwahrscheinlich, daß bei leicht bildsamen Körpern, wie Wachs u. ähnl. der „Festigung“ eine sehr geringe Rolle zufällt.

Wir wenden uns zu einer letzten, die Natur der Elastizitätsgrenze betreffenden, Aufstellung:

d) In einem Koordinatensystem, das die Haupt-Tangentialspannungen zu Koordinaten hat, erscheint die Elastizitätsgrenze als eine geschlossene, den Nullpunkt einschließende, Kurve in der Ebene

(22) $$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.$$

Man verdankt bekanntlich O. Mohr die ersten, eingehenden Untersuchungen über die Elastizitäts- und Bruchgrenze [1]). Nach Mohr kommt es hierbei nur auf die größte und kleinste der drei Hauptspannungen, sagen wir σ_1 und σ_2, an. In einem Koordinatensystem

(23) $$x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad y = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = -\tau_3$$

sieht die Bruchgrenze, wenn man außer den von Mohr berücksichtigten, auch die neuen Versuche von von Kármán in Be-

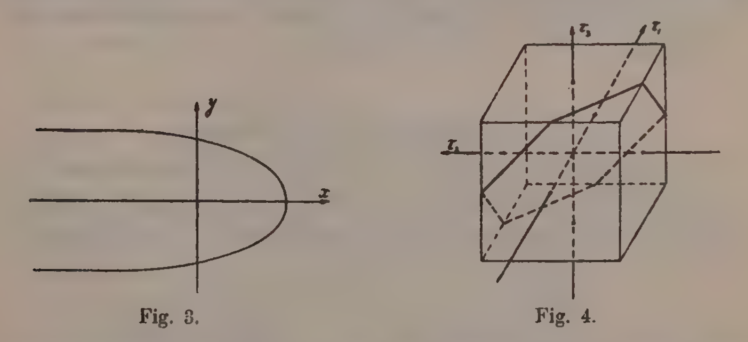


Fig. 3. Fig. 4.

tracht zieht [2]), etwa so aus, wie Fig. 3 zeigt. Der große Unterschied zwischen dem Verhalten bei positivem x (Zug) und negativem (Druck) rührt daher, daß es ein Zerreißen bei allseitigem Zug, aber kein Zerdrücken bei allseits gleichem Druck gibt. Es ist nicht sehr wahrscheinlich, daß der analoge Gegensatz auch für die Grenze des elastischen Verhaltens besteht. Da wir uns überdies in erster Linie mit Zuständen bei großem mittleren Druck zu befassen haben, wird es gestattet sein, die horizontalen Asymp-

1) O. Mohr, Abhandl. a. d. Gebiete der techn. Mechanik, Berlin 1906, p. 187.
2) Zeitschr. d. Vereines deutscher Ingenieure 1911, p. 1749.

toten der Fig. 3 als die wesentliche Begrenzung anzusehen. Diese, auch sonst vielfach vertretene Auffassung, führt zu der Elastizitätsgrenze:

$$|\tau_1| \leqq K, \quad |\tau_2| \leqq K, \quad |\tau_3| \leqq K. \tag{24}$$

Der Würfel (24) wird von der Ebene (22) in einem regelmäßigen Sechseck geschnitten (Fig. 4), so daß unsere Bedingung d) erfüllt ist.

Noch in anderer Richtung wollen wir aber den Mohr'schen Ansatz modifizieren. Von dem Sechseck (22), (24) sind durch die bisherigen Versuche lediglich die Eckpunkte festgestellt, das sind Zustände, bei denen eines der τ null, der Absolutwert der beiden anderen gleich ist. Die geradlinige Verbindung entspringt der Annahme, daß es auf die mittlere Hauptspannung, bezw. auf die kleineren Haupt-Tangentialspannungen gar nicht ankommt. Diese Annahme scheint nicht so sehr plausibel, daß man nicht versuchen dürfte, das Sechseck durch ein einfacheres Gebilde, nämlich durch den umgeschriebenen Kreis, zu ersetzen. Statt des Würfels (24) hat man dann die Kugel:

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 2K^2. \tag{25}$$

Jedenfalls gestattet (25) eine viel einfachere analytische Behandlung, ohne daß der Unterschied gegenüber (24) größer wäre, als der Spielraum, den die bisher angestellten Versuche lassen.

§ 3. Bewegungsgleichungen.

Wir bezeichnen mit ϱ die spezifische Masse des Körpers, mit $\varkappa_x, \varkappa_y, \varkappa_z$ die Komponenten der spezifischen Volumkraft (Schwere u. s. f.). Dann lauten die Bewegungsgleichungen jedenfalls:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} \varrho \frac{du}{dt} &= \varkappa_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \\ \varrho \frac{dv}{dt} &= \varkappa_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \\ \varrho \frac{dw}{dt} &= \varkappa_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z'}{\partial z}. \end{aligned}$$

Die sechs Spannungskomponenten $\sigma_x' \ldots \tau_z$ drücken sich nach (20) und (5) durch die drei Geschwindigkeitsgrößen u, v, w wie folgt aus:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} &\sigma_x' = k\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y' = k\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_z' = k\frac{\partial w}{\partial z}; \\ &\tau_x = \tfrac{1}{2}k\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad \tau_y' = \tfrac{1}{2}k\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad \tau_z = \tfrac{1}{2}k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Zur Elimination von p dient, wie in der Hydromechanik, die Kontinuitätsgleichung:

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Hierbei ist Inkompressibilität vorausgesetzt entsprechend Satz b) und den daran geknüpften Bemerkungen, doch ließe sich im Rahmen unserer Theorie auch der allgemeinere Fall ohne weiters behandeln.

Der Ansatz (I) bis (III) stimmt völlig überein mit dem für zähe Flüssigkeiten. Allein dort ist die Größe k die gegebene Zähigkeitszahl, bei uns ist es eine Reaktionsgröße, die sich erst aus der Kenntnis der Bewegung selbst errechnen läßt. Hierzu dient die Aussage, daß die Spannung während der plastischen Deformation an der Elastizitätsgrenze bleibt.

Nimmt man die Grenze als Kreis in der Form (25) an und setzt hierin den Wert (14) ein, so erhält man:

$$\text{(26)} \quad (\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z')^2 - 3(\sigma_x'\sigma_y' + \sigma_y'\sigma_z' + \sigma_z'\sigma_x') + 3(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) = 4K^2.$$

Denn aus der letzten Form des Ausdruckes (14) folgt, daß man die σ auch durch die σ' ersetzen darf. Addiert man die ersten drei der Gl. (II) und beachtet (III), so findet man aber:

$$\text{(27)} \qquad \sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = 0,$$

sodaß sich (26) reduziert auf:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{4K^2}{3} = \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 - (\sigma_x'\sigma_y' + \sigma_y'\sigma_z' + \sigma_z'\sigma_x').$$

Setzt man hier die Werte aus (II) ein, so hat man die gesuchte Gleichung für k. Die Gleichungen (I) bis (IV) sind das vollständige System von Bewegungsgleichungen für plastisch deformable Körper.

Als Randbedingung muß hier hinzutreten: die Angabe des Geschwindigkeits-Komponenten u, v, w für jeden Oberflächenpunkt. Sie kann auf der ganzen Oberfläche oder einem Teil durch Angabe der Oberflächenspannung ersetzt werden.

Im Fall einer ebenen Bewegung reduziert sich unser Ansatz auf den Saint-Venantschen. Es liegt das zum Teil daran, daß im ebenen Fall der Unterschied zwischen der Elastizitätsgrenze nach (24) (Sechseck) oder nach (26) (Kreis) verschwindet. Denn man hat jetzt nur zwei Haupt-Tangentialspannungen τ_1, τ_2 mit

$$\text{(28)} \qquad \tau_1 + \tau_2 = 0,$$

sodaß $\tau_1^2 + \tau_2^2 \leqq 2K^2$ dasselbe sagt wie $|\tau_1| \leqq K$, $|\tau_2| \leqq K$.

Man kann die Gl. (I) bis (IV) sehr einfach mit Benützung von Vektor-Symbolik schreiben. Bezeichnet $\bar{v}$ den Geschwindigkeitsvektor, $\bar{\varkappa}$ den Vektor der spezifischen Kraft, so hat man:

$$\text{(I')} \qquad \varrho \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\varkappa} - \operatorname{grad} p + \nabla \bar{\bar{\sigma}}',$$

$$\text{(II')} \qquad \bar{\bar{\sigma}}' = k \bar{\bar{\lambda}},$$

$$\text{(III')} \qquad \operatorname{div} \bar{v} = 0,$$

$$\text{(IV')} \qquad -(\bar{\bar{\sigma}}')_2 = \frac{4K^2}{3}.$$

Dabei bedeutet das Symbol ∇ in (I') die an der Dyade auszuführende Differentiation, die durch (I) bestimmt ist. Der Index 2 in (IV') soll darauf hinweisen, daß von der Dyade $\bar{\bar{\sigma}}'$ die zweite der in § 1, Gl. (8) angeschriebenen Orthogonal-Invarianten zu nehmen ist.

Aus (I') bis (IV') läßt sich auch leicht $\bar{\bar{\sigma}}'$ eliminieren und man erhält:

$$\text{(a)} \qquad \varrho \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\varkappa} - \operatorname{grad} p + \nabla (k \bar{\bar{\lambda}}),$$

$$\text{(b)} \qquad \operatorname{div} \bar{v} = 0,$$

$$\text{(c)} \qquad k^2 = -\frac{4K^2}{3(\bar{\bar{\lambda}})_2}.$$

Multipliziert man (I') skalar mit $\bar{v}$ und integriert nach dem Volumen, so findet man nach entsprechender Umformung, daß die Dissipationsfunktion durch (21) dargestellt wird, wodurch die Übereinstimmung des Ansatzes mit unserer Annahme c) in § 2 erwiesen ist.

Straßburg i. E., 4. Oktober 1913.

Zur Unterscheidung von Racemie und Pseudoracemie.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 1. November 1913.

Die Analyse der Schmelzwärmen[1]) führt zu der Vermutung, daß die Entropieänderungen der Moleküle beim Übergang aus dem geordneten Zustande gleicher krystallographischer Punktsysteme in den flüssigen Zustand bei unverändertem inneren Druck, unveränderter Molekularkonzentration und normalem Molekulargewicht von der chemischen Zusammensetzung des Moleküls unabhängig sind, und daß die Entropieänderungen der Moleküle in Krystallen verschiedener krystallographischer Systeme bei jenen Bedingungen sich für je zwei Systeme um einen konstanten Wert unterscheiden.

Denkt man sich mit Hilfe der zweiten Annahme die Entropieänderung des Moleküls vom Einfluß des krystallographischen Systems befreit, so sollte die Entropieänderung beim Übergange des Moleküls aus dem anisotropen in den isotropen Zustand bei Erfüllung jener Bedingungen eine universelle Konstante, ähnlich der Gaskonstanten R, sein.

Der Erfahrung nach ist diese Extrapolation dahin zu beschränken, daß für metallische und nichtmetallische Stoffe diese Konstante sehr verschiedene Werte hat.

Die Unterschiede der inneren Arbeiten und der Energieänderungen beim Übergang der Moleküle aus einer Art der Anisotropie in eine andere machen nur einen relativ kleinen Betrag der Schmelzwärme, etwa 20 Prozent derselben, aus. Man dürfte also erwarten, daß die aus der molekularen Schmelzwärme $r_p \cdot M$ mittelst Division

1) Nachrichten der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen 1913, 335.

durch die Schmelztemperatur T_s abgeleitete Entropieänderung beim Schmelzen $\frac{r_p \cdot M}{T_s}$ für verschiedene nichtmetallische Stoffe um 40 Prozent eines Mittelwertes in Folge der Verschiedenheit der inneren Arbeiten und des Krystallsystems sich ändern könnte.

Sehr viel größere Abweichungen können durch Änderung der Molekularkonzentration beim Schmelzen bedingt werden. Bezeichnet $\varDelta\alpha$ die Änderung der Molekularkonzentration in Bruchteilen des Gr. Mols und W die Wärme, welche beim Umsatz eines Gr. Mols frei oder gebunden wird, so wird die der eigentlichen Schmelzwärme fremde Wärme $\varDelta\alpha \cdot W$, die in Folge der Änderung der Molekularkonzentration beim Schmelzen frei oder gebunden wird, die Schmelzwärme verkleinern oder vergrößern. Für die molekulare Entropieänderung beim Schmelzen würde allgemein die Gleichung:

(1) $$\frac{r_p \cdot M}{T_s} \pm \frac{\varDelta\alpha \cdot W}{T_s} = 10 \text{ bis } 16 \text{ cal}$$

gelten.

Bei normalen Flüssigkeiten, deren Molekulargewicht sich bei der Krystallisation nicht ändert, ist $\varDelta\alpha = 0$; es folgt also für diese die Regel Waldens, nach der für alle zu normalen Flüssigkeiten schmelzenden Krystalle die Gleichung:

(2) $$\frac{r_p \cdot M}{T_s} = 10 \text{ bis } 16 \text{ cal}$$

gelten sollte.

Man ersieht aber, daß diese Regel auch für assoziierte Flüssigkeiten gilt, wenn $W = 0$ ist.

Die Molekulargewichtsbestimmung der Moleküle des Krystallzustandes ist besonders leicht auszuführen, wenn $\varDelta\alpha$ oder W zu vernachlässigende Werte haben[1]). Dann wird die zweite Gleichung erfüllt sein, und das Molekulargewicht ergibt sich angenähert zu:

$$M = \frac{13.0}{r_p} \cdot T_s.$$

Aus den flüsssigen Gemischen optisch aktiver *d*- und *l*-Körper bilden sich häufig Krystalle, deren Lösungen optisch inaktiv sind. Diese *i*-Krystalle können aus Molekülen, die je ein *d*- und *l*-Molekül enthalten, aufgebaut sein; man nennt sie dann racemisch; oder sie

1) Die Bestimmung von $W \cdot \varDelta\alpha$ wäre auf Grund der Abhängigkeit der spezifischen Wärmen von der Temperatur für den isotropen und anisotropen Zustand zu versuchen.

können aus den unverbundenen d- und l-Molekülen, als Mischkrystalle, aufgebaut sein; man nennt sie dann pseudoracemisch.

Roozeboom[1]) hat in seiner grundlegenden Arbeit: „über die Löslichkeit und den Schmelzpunkt als Kriterien für racemische Verbindungen, pseudoracemische Mischkrystalle und inaktive Konglomerate“ diese Frage zu entscheiden gesucht. Er ging hierbei von der alten Auffassung der Krystallstruktur und ihrer Anwendung auf den Isomorphismus aus. Man nahm früher an, daß die Krystalle aus polyedrischen Bausteinen, bestehend aus einzelnen Molekülen oder einem Aggregat von Molekülen, aufgebaut sind. Diese Bausteine sollten bei isomorphen Stoffen gleiche Form haben. Ferner sollten die Bausteine einer Verbindung von denen ihrer Komponenten, auch wenn diese isomorph wären, verschieden sein. Hieraus würde folgen, daß eine Verbindung mit ihren Komponenten keine Mischkrystalle bilden kann. Die Erfahrungen über die Krystallisation binärer Schmelzen bei höheren Temperaturen haben diese Forderung nicht bestätigt. Häufig bilden Verbindungen mit ihren Komponenten Mischkrystalle, was die neuere Punktsystem-Raumgitter-Theorie zuläßt.

Roozeboom wollte also vom Standpunkt der Baustein-Theorie die Entscheidung über Racemie respektive Pseudoracemie treffen.

Zur Entscheidung dieser Frage bedarf es einer Methode der Molekulargewichtsbestimmung für die Moleküle in krystallinischen Körpern.

Die Bedingungen, unter denen diese Bestimmung ausführbar ist, werden im Folgenden genauer formuliert werden. Diese Bedingungen sind nicht nur bei der Molekulargewichtsbestimmung der i-Krystalle zu beachten, sondern auch bei Entscheidung der Frage, ob die dem Maximum oder Minimum der Schmelzkurve einer Mischkrystallreihe entsprechende Krystallart ein Mischkrystall oder eine Verbindung ist.

Für den Fall, daß die flüssigen d- und l-Körper normal sind, also nur aus je einer Molekülart bestehen, würden für die auf je 1 gr bezogenen Entropieänderungen $\frac{r_p}{T_s}$ beim Schmelzen folgende Beziehungen gelten.

1) Wenn beim Schmelzen der i-Krystalle keine Dissoziation der i-Moleküle in d- und l-Moleküle eintritt, $\Delta\alpha = 0$, oder wenn die Dissoziationswärme W zu vernachlässigen wäre, $W = 0$, so würde $\left(\frac{r_p}{T_s}\right)$ für den i-Körper nahezu die Hälfte von $\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_d$ oder l

1) Z. f. phys. Chem. 28, S. 494, 1899.

für den d- oder l-Körper sein. Wenn das zutrifft und die Mischungswärme der d- und l-Schmelzen einen merklichen Wert hat, so ist $\Delta\alpha = 0$; wenn aber die Mischungswärme verschwindet, während $2\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_i$ nahezu gleich $\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_{d \text{ oder } l}$ ist, so ist $W = 0$.

2) Im Falle der Pseudoracemie wird, wenn die Schmelze sehr arm an i-Molekülen ist, was man daran erkennen kann, daß die Schmelze der i-Krystalle und der d- oder l-Krystalle identische oder fast identische Eigenschaften haben, die Dissoziation der i-Moleküle im flüssigen und im Krystallzustande eine vollständige sein, $\Delta\alpha = 0$, und daher wird $\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_i$ nahezu gleich $\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_{d \text{ oder } l}$ sein.

Wenn in diesem Fall außerdem noch Isomorphie der i-, d- und l-Krystalle besteht, so werden sich jene Werte noch mehr einander nähern. Wenn schließlich auch die inneren Arbeiten beim Schmelzen für die i-, d- und l-Krystalle einander gleich sind, so würde die Gleichung:

$$\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_i = \left(\frac{r_p}{T_s}\right)_d = \left(\frac{r_p}{T_s}\right)_l$$

genau zutreffen.

3) Wenn beim Schmelzen der i-Krystalle eine Dissoziation der i-Moleküle in d- und l-Moleküle eintritt, so kann bei der Dissoziation Wärme frei oder gebunden werden. Eine Wärmeentwicklung bei der Dissoziation würde die Schmelzwärme verkleinern und eine Wärmebindung dieselbe vergrößern. Dementsprechend würde gelten:

für Wärmebindung bei der Dissoziation	für Wärmeentwicklung bei der Dissoziation
$2\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_i > \left(\frac{r_p}{T_s}\right)_{d \text{ oder } l}$	$2\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_i < \left(\frac{r_p}{T_s}\right)_{d \text{ oder } l}$.

Die Mischungswärme gleicher Mengen der flüssigen d- und l-Körper ist sehr nahe gleich der Bildungswärme der in der Schmelze der i-Krystalle vorhandenen Menge der i-Moleküle. Das Vorzeichen der Mischungswärme ist also dem der Dissoziationswärme der i-Moleküle entgegengesetzt. Im ersten Falle wird also bei der Mischung Wärme entwickelt, im zweiten Wärme gebunden. Im zweiten Falle brauchen wir, um mit Sicherheit auf Racemie zu schließen, das Vorzeichen der Mischungswärme nicht zu kennen, im ersten Falle wäre diese Kenntnis aber nötig, da der Wert von $\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_i$ sich dem Werte $\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_{d \text{ oder } l}$ nähern könnte und man dann

fälschlich auf Pseudoracemie schließen würde. Tritt aber bei de Mischung Wärmeentwicklung auf, so liegt Racemie vor.

4) Wenn bei Pseudoracemie in der Schmelze der *i*-Krystalle eine erhebliche Menge von *i*-Molekülen existieren sollte, deren Menge in den *i*-Krystallen sehr viel geringer ist, so würden folgende Beziehungen gelten.

für Wärmeentwicklung bei der Dissoziation

$$\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_i < \left(\frac{r_p}{T_s}\right)_{d \text{ oder } l}$$

für Wärmebindung bei der Dissoziation

$$\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_i > \left(\frac{r_p}{T_s}\right)_{d \text{ oder } l}.$$

Im ersten Falle müßte die Mischungswärme der *d*- und *l*-Schmelzen merkliche negative und im zweiten Falle merkliche positive Werte haben. Der erste Fall ist vom ersten unter 3) aufgeführten nicht zu unterscheiden. Sollte sich bei Erweiterung unserer Kenntnisse herausstellen, daß im Falle der Pseudoracemie beim Schmelzen immer eine vollständige Dissoziation der *i*-Moleküle eintritt, so wäre diese Unterscheidung überflüssig, da dann der letzte Fall in Wirklichkeit nicht eintreten würde.

Für *d*-, *l*- und *i*-Carvoximpräparate, welche ich der Güte Herrn O. Wallachs verdanke, sowie für den von Kahlbaum bezogenen *d*-Weinsäuredimethylester und den *i*-Traubensäuredimethylester [1]) wurden die Schmelzwärmen für je 1 gr bestimmt. Zu diesem Zwecke erwies sich eine früher [2]) von mir angegebene Methode als geeignet. Unter genau denselben Bedingungen wurden die Abkühlungskurven dieser 5 Präparate und die anderer Stoffe mit entsprechenden gleichen Schmelztemperaturen und bekannten Schmelzwärmen bestimmt. Bei gleichen Abkühlungsbedingungen werden die Zeitdauern Δz der Haltepunkte auf den Abkühlungskurven für gleiche Mengen der Schmelzwärmen der beiden verglichenen Stoffe proportional sein, wenn das spezifische Volumen und die Wärmeleitfähigkeit beider Stoffe angenähert gleich und die äußeren Bedingungen der Abkühlung streng gleich sind:

$$\Delta z : \Delta z_1 = r_{p1} : r_{p1}.$$

---

1) Der Dimethylester der Traubensäure hatte ursprünglich einen Schmelzpunkt von 83,5°. Durch eine Umkrystallisation aus absolutem Alkohol im Exsiccator stieg er auf 87°. Der Dimethylester der *d*-Weinsäure hatte ursprünglich den Schmelzpunkt 41°; durch eine Umkrystallisation aus absolutem Alkohol und eine darauffolgende aus Benzol stieg der Schmelzpunkt auf 49°. Die höheren Schmelzpunkte von J. Gróh (Ber. d. deutsch. chem. Ges. 45, S. 1441, 1912) von 89° und 50° waren also für die untersuchten Präparate nicht ganz erreicht.

2) Z. f. anorg. Ch. 43, 215, 1905.

Zur Bestimmung der Abkühlungskurven wurde je 1 gr der zu vergleichenden Stoffe in einem Probierglase geschmolzen, ein geeichtes Thermoelement (Konstantan-Kupfer) zentral in die Schmelze geführt und das Probierglas in ein weiteres, von einer größeren Wassermenge umgebenes Rohr gebracht. Bei den Stoffen mit höheren Schmelzpunkten wurde zur Verkleinerung der Abkühlungsgeschwindigkeit über das Probierglas mit dem zu untersuchenden Stoffe ein zweites Schutzrohr gebracht und dann der Stoff im kochenden Wasserbade geschmolzen.

Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Stoffe	T_s abs. Temp. d. Schmelzpunkts	Haltezeiten Δz in Sek.	Mittel aus den Δz-Werten	r_p in cal.	$\frac{M \cdot r_p}{T_s}$	$\frac{r_p}{T_s}$
Traubensaurer Dimethylester	360°	320 335	328	35,2	17,4	0,0980
Vergleichsstoff						
Naphtalin	354°	330 335	332	35,7 [1]		
d-weinsaurer Dimethylester	322°	370 375	372	21,4 21,6 } 21,5	11,9	0,0667
Vergleichsstoffe						
Thymol	321°	485 470	477	27,5 [1]		
Benzophenon	321°	410 405	407	23,7 [1]		
i-Carvoxim	364°	280 282 285	282	24,6 24,7 } 24,6	11,2	0,0677
Vergleichsstoffe						
Betol	366°	202 207 210	206	18,0 [1]		
Tribromphenol	366°	153	153	13,4 [1]		
l-Carvoxim	344°	271 273 275	273	22,8 24,0 } 23,4	11,2	0,0680
d-Carvoxim	344,5°	270 274	272	22,7 23,9 } 23,3	11,2	0,0676
Vergleichsstoffe						
Azobenzol	342°	350 345	347	29,0 [1]		
p-Chloranilin	342°	420 425	422	37,2 [1]		

1) Landolt-Börnstein, Tabellen.

Mit Hilfe der bekannten Schmelzwärmen der Vergleichsstoffe berechnen sich nach obiger Proportion für das *d*- und *l*-Carvoxim fast gleiche Schmelzwärmen, die zu normalen Werten 11,2 und 11,2 für $\frac{M \cdot r_p}{T_s}$ führen. Da sich ferner die Werte $\frac{r_p}{T_s}$ für das *i*-Carvoxim und die beiden aktiven Isomeren nur wenig unterscheiden, so hat man hieraus zu schließen, daß die Mischungswärme von *d*- und *l*-Carvoxim bei der Temperatur des Schmelzpunktes von *i*-Carvoxim im Vergleich zur Schmelzwärme verschwindend klein ist. Unter diesen Bedingungen darf ferner behauptet werden, daß die angenäherte Gleichheit der $\frac{r_p}{T_s}$-Werte für das *i*-Carvoxim einerseits und das *d*- und *l*-Carvoxim andererseits nur so zu deuten ist, daß erstens das *i*-Carvoxim als Mischkrystall anzusprechen ist, zweitens, daß das *i*-Carvoxim mit dem *d*- und *l*-Carvoxim isomorph ist und drittens, daß die inneren Arbeiten beim Schmelzen von *i*-Carvoxim einerseits und *d*- und *l*-Carvoxim andererseits, angenähert gleich sind.

Anmerkung. J. H. Adriani[1]) hat die Schmelzkurve der Mischungen von *d*- und *l*-Carvoxim bestimmt und gefunden, daß sie eine symmetrische Kurve mit einem Maximum bei gleichen Mengen von *d*- und *l*-Carvoxim ist und daß im Maximum die Temperaturintervalle der Krystallisation verschwinden, während sie bei den *d*- resp. *l*-Carvoxim-reicheren Mischungen deutlich hervortreten, um dann nach dem reinen *d*- und *l*-Carvoxim hin abzunehmen und bei diesen zu verschwinden. *d*- und *l*-Carvoxim bilden also eine lückenlose Reihe von Mischkrystallen, deren Schmelzkurve ein Maximum hat. In solchen Fällen kann man aber weder behaupten, daß der Konzentration des Maximums eine Verbindung entspricht, noch behaupten, daß der betreffende Krystall keine Verbindung ist. Zur Entscheidung hierüber mußte eine Methode der Molekulargewichtsbestimmung zu Hilfe genommen werden; eine solche ist hier entwickelt worden. Nach dieser Methode sind die *i*-Krystalle mit dem maximalen Schmelzpunkt nicht als eine Verbindung, sondern als Mischkrystalle anzusprechen.

Das Zustandsdiagramm der Mischungen von *d*- und *l*-weinsaurem Dimethylester verdanken wir ebenfalls Adriani. Die Kurve des Beginns der Krystallisation der *i*-Krystalle dehnt sich fast über das ganze Konzentrationsgebiet aus. Leider ist aber das Ende der Krystallisation von Adriani nicht untersucht worden; daher ist es nicht bekannt, ob die *i*-Krystalle mit den *d*- und *l*-Krystallen Mischkrystalle bilden, und wie weit die betreffende Mischbarkeit im anisotropen Zustande sich erstreckt. Beim weinsauren Dimethylester ergab sich für $\frac{M \cdot r_p}{T_s}$ des *d*-Körpers der nor-

1) Z. f. phys. Ch. 33, S. 469, 1900.

male Wert von 11,9 cal., ferner

$$\left(\frac{r_p}{T_s}\right)_i = 0{,}098 \text{ und } \left(\frac{r_p}{T_s}\right)d = 0{,}0667.$$

Über die Mischungswärme der flüssigen *d*- und *l*-Körper ist leider nichts bekannt. Wenn bei ihrer Mischung über 90° sich Wärme entwickeln würde, so würde aus den unter (3) aufgeführten Möglichkeiten zu folgern sein, daß die *i*-Krystalle racemisch sind. Für die Existenz racemischer Moleküle in der Schmelze spricht der Befund von J. Gróh[1]), daß der Temperaturkoeffizient der molekularen Oberflächenenergie für die *i*-Schmelze (2,26) kleiner als für die *d*-Schmelze (2,37) ist; dementsprechend müßte, da Assoziation diesen Temperaturkoeffizienten verkleinert, in der *i*-Schmelze eine gewisse Menge assoziierter racemischer Moleküle vorhanden sein. Auch der Befund von K. Beck[2]), daß bei den Mischungen von *d*-weinsaurem und traubensaurem Dimethylester die innere Reibung bei 85° sich mit der Konzentration ändert, spricht für das Vorhandensein racemischer Moleküle in der Schmelze.

Wenn man die Mischungswärme der flüssigen *d*- und *l*-Körper zum wenigsten ihrem Vorzeichen nach kennt und die Beziehungen des $\frac{r_p}{T_s}$-Wertes des *i*-Körpers und des *d*- oder *l*-Körpers bekannt sind, so kann, wenn für den *d*- oder *l*-Körper die molekulare Entropieänderung zwischen 10 und 15 cal. liegt, eine Molekulargewichtsbestimmung für die *i*-Krystalle ausgeführt werden, aus der sich dann die Antwort auf die Frage, ob der *i*-Körper racemisch oder pseudoracemisch ist, ergibt.

Noch auf einem anderen Wege könnte die Frage nach der racemischen oder pseudoracemischen Natur eines *i*-Krystalls entschieden werden. Dieser Weg würde, wenn sich die racemische Verbindung in einem pseudoracemischen *i*-Krystall bildet, einzuschlagen sein.

Die Bildung einer Verbindung in einem Raumgitter, das von den Molekülen der Verbindungskomponenten besetzt wird, hätte man sich in der Weise vorzustellen, daß von den Ebenenschaaren des Raumgitters in Folge des Zusammentretens je zweier Komponenten-Moleküle die Hälfte der Ebenen gewisser Ebenenschaaren verschwindet. Es würde also bei der Bildung der Verbindung aus 2 Molekülen die auf dasselbe Volumen bezogene Dichte der Raumgitterbesetzung auf den halben Wert sinken.

---

1) Ber. d. deutsch. chem. Ges. 45, S. 1444 (1912).
2) Zeitschr. f. phys. Chem. 48, S. 669 (1904).

Wenn die Zusammensetzung der Verbindung bei einem geradzahligen Verhältnis der Komponentenmoleküle liegt, und bei der Konzentration der Verbindung die ganze Menge des Mischkrystalls sich in die Verbindung umwandelt, so sind für das Raumgitter des Mischkrystalls, in dem sich die Verbindung bildet, diejenigen Raumgitter ausgeschlossen, in denen die Zahl der Moleküle der Raumgitter-Elemente nicht eine gerade Zahl ist.

Ein Beispiel, an dem die Entscheidung über die Bildung einer racemischen Verbindung in einer Reihe von Mischkrystallen der *d*- und *l*-Moleküle mittelst Röntgenstrahlen möglich wäre, liegt vielleicht beim Kampferoxim vor.

Die Schmelztemperatur der Mischkrystalle von *d*- und *l*-Kampferoxim ist nach Adriani[1]) merkwürdigerweise von ihrer Zusammensetzung unabhängig: 118,8°. Zwischen 112,6° bis 109,4° tritt eine Umwandlung der durchscheinenden Mischkrystalle in eine andere Form unter Volumenabnahme ein. Die betreffende Umwandlungskurve hat bei gleichen Mengen von *d*- und *l*-Kampferoxim ein sehr flaches Minimum. Da diese Umwandlung bei allen Mischungen und auch bei den *d*- und *l*-Körpern auftritt, so kann diese Umwandlung nicht auf die Bildung von racemischen Molekülen zurückgeführt werden. Schließlich tritt bei 103° in den Mischkrystallen mit gleichenMengen des *d*- und *l*-Kampferoxims Doppelbrechung ohne merkliche Änderung des Volumens auf. Diese Umwandlung konnte noch in den Mischkrystallen mit 30 % *d*- und 70 % *l*-Kampferoxim und in den Mischkrystallen mit 30 % *l*- und 70 % *d*-Kampferoxim beobachtet werden, nicht mehr aber in den Mischkrystallen mit 20 % *d*- und 80 % *l*- respektive 20 % *l*- und 80 % *d*-Kampferoxim. Diese Umwandlungskurve hat ein ausgesprochenes Maximum für den Mischkrystall mit gleichen Teilen von *d*- und *l*-Kampferoxim. Adriani hat nach einer entsprechenden Umwandlung auch bei den *l*- und *d*-Körpern gesucht, sie aber nicht gefunden. Wenn diese Umwandlung nur bei den Mischkrystallen, welche die *d*- und *l*-Moleküle in größerer Menge enthalten, und nicht bei den reinen *d*- und *l*-Krystallen auftritt, so hat man allen Grund, die Ursache dieser Umwandlung in einem Übergange der pseudoracemischen Mischkrystalle in racemische Mischkrystalle zu erblicken, da diese Umwandlung nur in den Mischkrystallen, in denen die Bedingungen für die Bildung größerer Mengen von Racemmolekülen günstig sind, nämlich in den Mischkristallen mittlerer Zu-

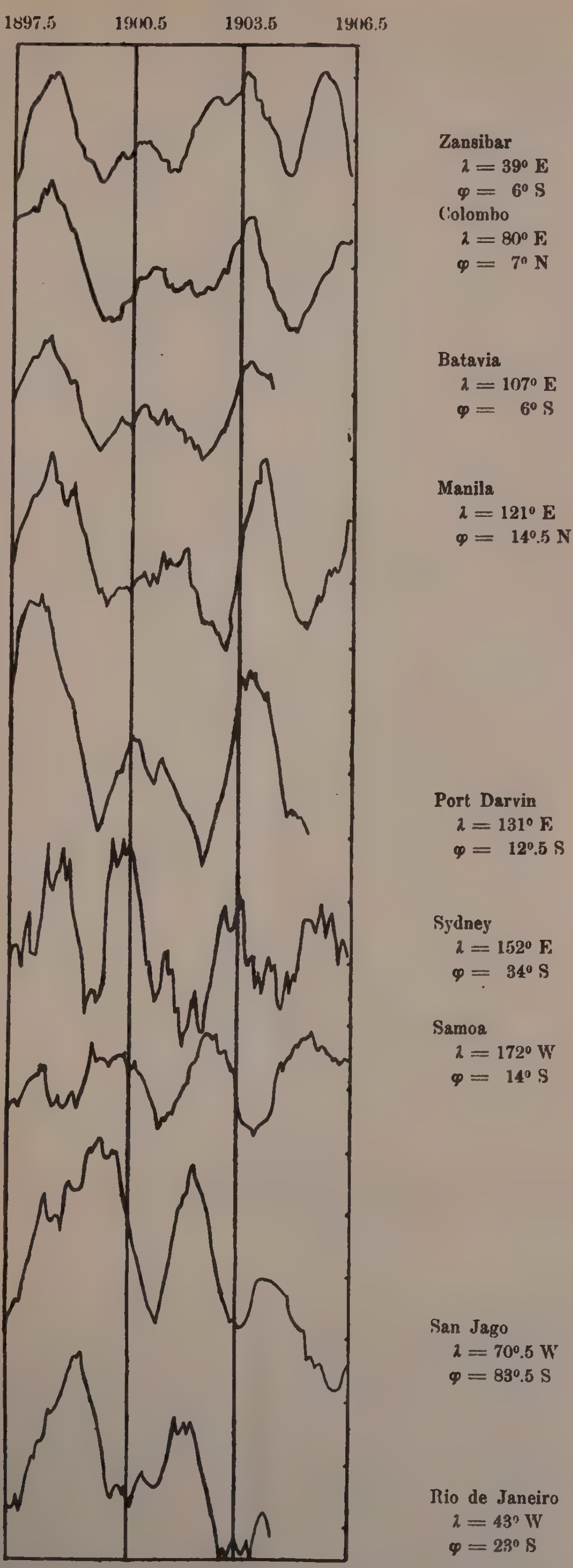
1) Z. f. phys. Ch. 33, S. 468, Fig. 5.

sammensetzungen, auftritt. Es weist also gerade der Umstand, daß die betreffende Umwandlung dem *d*- und *l*-Körper fehlt, auf die Bildung von Racemmolekülen hin.

Diese Schlüsse könnten durch eine Untersuchung der *i*-, *d*- und *l*-Krystalle mittelst Röntgenstrahlen wesentlich gestützt werden.

Auch die früher vom Verfasser gezogenen Schlüsse über den molekularen Aufbau der Krystallarten einer und verschiedener thermodynamischer Gruppen könnten durch Untersuchung mittelst Röntengenstrahlen einer weiteren Prüfung unterzogen werden. Bei den Krystallarten derselben Gruppe müßte die Dichte der Raumgitterbesetzung bezogen auf dasselbe spezifische Volumen der Krystallarten dieselbe sein. Bei den Krystallarten verschiedener Gruppen würde die Dichte der Raumgitterbesetzung, falls ihre Moleküle isomer sind, ebenfalls dieselbe sein. Wenn aber die Moleküle der Krystalle verschiedener Gruppen polymer sind, so würde die Dichte der Raumgitterbesetzung in einfachen rationalen Verhältnissen zu einander stehn. Der halben Dichte der Raumgitterbesetzung würde das doppelte Molekulargewicht entsprechen.

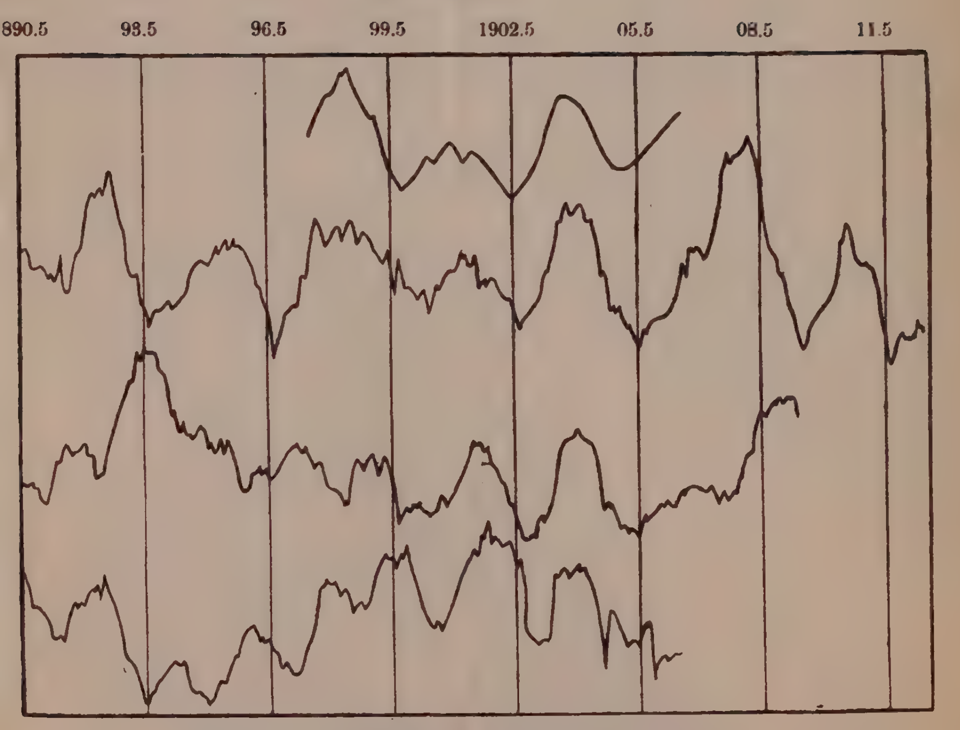
TAFEL I.



Luftdruckschwankungen: $10^{mm} = 0.5^{mm}$ Quecksilber.

Nachrichten von der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen.
Math.-phys. Kl. 1914, Heft 1 (Angenheister).

TAFEL II.



Gang der Jahresmittel von Monat zu Monat.

I Luftdruck in Batavia.
II Regenmenge in Samoa.
III Luftdruck in Samoa.
IV Zahl der Tage mit Westwind pro Jahr in Samoa.